

التحكم بالتشكيل لنظام متعدّد العملاء بالاعتماد على المسافات فقط

Pure Distance–Based Formation Control for Multi–Agent Systems

إعداد

م. علي زين العابدين اسماعيل

دراسة أُعدَّت لنيل درجة الماجستير

اختصاص التحكم والروبوتيك

إشراف

د. عادل الكفري

د. لمى الحسن

الملخص

يقدم هذا البحث حلاً لمسألة التحكم بنظام متعدد العملاء لملاحقة تشكيل محدد. المقصود بكلمة تشكيل هو توضّع للعملاء في المستوي ثنائي البعد. طُرح في البحث توصيف لمسألة التحكم بالتشكيل بالاعتماد على المسافات ما بين العملاء فقط، واستُعرضت أهم الأبحاث في هذا المجال. يتمحور مضمون البحث حول وصف الخوارزمية المقترحة، ومراحل عملها الثلاثة. في المرحلة الأولى يرصد كل روبوت (عميل) مواقع الروبوتات المجاورة اعتماداً على قراءات للمسافات فقط. وتم إثبات أن تعقيد حل مسألة رصد الجوار هو NP-Hard. تميّز هذا البحث في كيفية معالجة عدم التعيين في الاتجاهات الناتج عن اقتصار القياسات على المسافات فقط، إذ يقوم كل روبوت في المرحلة الثانية برصد سرعات الروبوتات المجاورة بالنسبة لجملة أحداثيات مصطلحة متوافقة من نتائج رصد الجوار. يستفيد الروبوت من المعلومات التي رصدها ليتحرك لملاحقة التشكيل بناء على بروتوكول يجمع بين التحكم بالانحدار الأعظم واستخدام التحويلات المتجانسة لتحديد اتجاه التحرك لملاحقة التشكيل مع متحكم لاخطي بسيط. يقدم البحث أيضاً نتائج إجراء محاكاة للخوارزمية على برنامج V-REP في حالة نموذجية، وتُشرح أفاق تطوير هذه الخوارزمية.

كلمة شكر

أتوجّه بالشكر الجزيل للسادة المشرفين د. نلى حسن و د. عادل الكفري على تفانيهم وإخلاصهم في إرشادي، وعلى تشجيعهم ودعمهم لي لإتمام هذا البحث. كما أتوجّه بخالص الشكر للدكتور خالد حلاوة والأستاذ فارس أبو صالح على مشورتهم القيمة في تجاوز بعض العقبات الرياضيّة. وأشكر العاملين في المعهد العالي عموماً وإدارة المعهد خصوصاً على جهودهم في دعم البحث العلمي.

المحتويات

2	الملخص
3	كلمة شكر
6	قائمة الأشكال
8	1 قائمة الرموز
10	2 مقدمة
10	1.2 مقَدِّمة
12	2.2 الدراسة المرجعية
16	3.2 موضوع البحث
17	4.2 أهداف البحث وحدوده
18	3 الدراسة النظرية
18	1.3 الوصف العام للخوارزمية المقترحة
18	1.1.3 بيئة عمل الخوارزمية
19	2.1.3 مراحل عمل الخوارزمية على مستوى الروبوت الواحد
21	2.3 مقدمة رياضية
21	1.2.3 البيان الرياضي
27	2.2.3 تمثيل البيان في المستوي
35	3.3 خوارزمية رصد الجوار
36	1.3.3 حالة $N = 2$

37	حالة $N = 3$	2.3.3
39	حالة $N > 3$	3.3.3
42	الحالات الشاذة عندما $N = 2$	4.3
45	رصد السرعة	5.3
47	الطريقة الأولى: باستخدام التوابع المثلثية	1.5.3
54	الطريقة الثانية: باستخدام الطرائق العددية وتوابع الكمون	2.5.3
60	ملاحظة التشكيل	6.3
61	نمذجة الروبوتات	1.6.3
63	الإحداثيات المتجانسة والتحويلات الهندسية المتجانسة	2.6.3
66	تحديد النقطة الملاحقة بالتحويلات الهندسية المتجانسة	3.6.3
68	ملاحظة التشكيل	4.6.3
72		نتائج المحاكاة	4
72	خوارزمية رصد الجوار	1.4
73	خوارزمية رصد السرعة	2.4
74	محاكاة الخوارزمية الكاملة	3.4
78		الخلاصة والآفاق المستقبلية	5
78	الخاتمة	1.5
79	الآفاق المستقبلية	2.5
81		براهين رياضية	ا
81	الاتصال علاقة متعدية	1.ا
82	التوابع المحافظة على المسافات في \mathbb{C}	2.ا
83	مسألة إيجاد الأعداد s_j هي مسألة NP-Hard	3.ا
87	برهان تعريف التابع $\cos(\theta(Z) - \psi(Z))$	4.ا
90		المراجع العلمية	

قائمة الأشكال

11	روبوتات طائرة تتحرك في تشكيل	1.2
13	الأنظمة نسبية التوضع (2015) Oh et al.	2.2
14	الأنظمة محلية التوضع (2015) Oh et al.	3.2
16	محاكاة عمل الخوارزمية التي قدمها (2018) Suttner and Sun	4.2
22	البيان في الحالة العامة	1.3
22	البيان غير الموجّه	2.3
23	بيان بسيط	3.3
24	بيان تام	4.3
24	رحلة منتهية	5.3
25	مسار	6.3
26	طريق	7.3
28	تمثيل للبيان في المستوي	8.3
29	تمثيلين متكافئين بالنسبة لبيان	9.3
35	توليد بيان مكوّن من رباعيات الوجوه وصلب بالمطلق،	10.3
37	رصد الجوار في حالة $N = 2$	11.3
38	رصد الجوار في حالة $N = 3$	12.3
40	رصد الجوار في حالة $N > 3$	13.3
41	حالة $N = 4$ مع ثلاثة قيم مختلفة لـ n ، إلى اليمين $n = 1$ ، وفي الوسط $n = 0$ ، وإلى اليسار $n = -1$	14.3
41	حالة $n = 2$	15.3
43	في الأعلى حالتين لاصطفاف الروبوتات r_0 و r_1 و r_3 على استقامة واحدة. وفي الأسفل حالتين لاصطفاف الروبوتات r_0 و r_2 و r_3 على استقامة واحدة.	16.3

44	17.3	حالتين لاصطفاف الروبوتات r_0 و r_1 و r_2 على استقامة واحدة
45	18.3	حالة اصطفاف الروبوتات الأربعة على استقامة واحدة
53	19.3	ϕ و $-\phi$ بدلالة Z في حالة $\Delta > 0$
53	20.3	θ و ψ بدلالة Z
54	21.3	تمثيل مجموعة الحلول في الفراغ.
61	22.3	حالات الاستقرار غير المرغوبة في متحكم الانحدار الأعظم بحسب (Summers et al. (2009)
62	23.3	نموذج الروبوت اللاجانبي
67	24.3	مثال لنقطة ملاحقة بتحويل متجانس بدون تقييس
68	25.3	مثال لنقطة ملاحقة بتحويل متجانس مع تقييس
70	26.3	الزوايا θ, γ, δ
73	1.4	نتائج محاكاة خوارزمية رصد الجوار
76	3.4	شكل يوضّح توزّع الروبوتات خلال لحظات زمنية متساوية البعد أثناء المحاكاة.

قائمة الرموز

الرمز	المعنى
G	بيان رياضي
K_n	البيان الرياضي التام بـ n عقدة
V	مجموعة عقد البيان
E	مجموعة حواف البيان
$(v_i)_{i=1..n}$	مجموعة عقد البيان المرتبة
$(e_i)_{i=1..n}$	مجموعة حواف البيان المرتبة
$p = (p_1, \dots, p_n)$	تمثيل للبيان في المستوي يعبر عن مواضع العقد
$d = (d_1, \dots, d_m)$	شعاع المسافات الموافق لتمثيل معين للبيان في المستوي
$f_G(p)$	تابع المسافات الموافق للبيان G
H	مجموعة بيانات Henneberg
RM	مجموعة البيانات الصلبة أصغرياً
R_G	الجملة الإحداثيات المطلقة
R_0	جملة الإحداثيات المصطلحة
r_j	الروبوت ذو الترتيب j حيث r_0 هو الروبوت المطبق للخوارزمية (الروبوت المدروس)
$p_j = x_j + iy_j$	موضع الروبوت ذو الترتيب j كعدد عقدي
$f_\phi(z)$	تحويل هندسي دوراني بزواية ϕ
$g_\psi(z)$	تحويل هندسي انعكاسي حول مستقيم يصنع الزاوية ψ مع المحور x
$d_{i,j}$	المسافة بين الروبوتين i و j
$d_j = d_{0,j}$	المسافة بين الروبوت المدروس والروبوت

الرمز	المعنى
θ_j	زاوية موضع الروبوت r_j
δ_j	الزاوية بين موضع الروبوت r_j والروبوت r_{j-1}
s_j	الأعداد التي تحقق معادلة رصد المواضع
0v_j	سرعة الروبوت r_j بالنسبة لجملة الإحداثيات R_0
Gv_j	سرعة الروبوت r_j بالنسبة لجملة الإحداثيات R_G
$\Omega = \Omega_{C/G}$	سرعة دوران محاور الجملة R_0 بالنسبة للجملة R_G
V_j	سرعة الروبوت r_j كمقدار سلمي
U, L	الحد الأعلى والحد الأدنى للمسافة بين مركزي دائرتين لضمان التقاطع
Z_-, Z_+	الحد الأعلى والحد الأدنى للمتحول Z لضمان تقاطع دائرتين
θ	الزاوية بين نقطة تقاطع دائرتين المحور x
ψ	الزاوية بين مركز دائرة والمحور x
ϕ	الزاوية بين مركز دائرة ونقطة التقاطع مع دائرة ثانية
U_j	تابع الكمون المتعلق بالدائرة j
∇	مؤثر نبلاء، التدرج
H_U	هسيان تابع الكمون
W_-, W_+	نصفي المستويين الناتجين عن تقسيم المستوي بمستقيم
X_S, Y_S, Z_S	حلول مسألة رصد السرعة العددية
\tilde{U}	القيمة الأدنى لتابع الكمون من أجل قيمة محدّدة لـ Z
ξ	عتبة الخطأ لقبول الحل العددي
u	إشارة التحكم بحسب تدرج تابع الكمون للمسافات
$\mathbf{u}_{Rx}, \mathbf{u}_{Ry}$	أشعة الواحدة على المحورين x و y للجملة R_R
$\mathbf{v}_{C/G}$	سرعة النقطة C بالنسبة للجملة R_G
ω_R, ω_L	سرعة دوران العجلتين اليمنى واليسرى
r	نصف قطر العجلة
δ	المسافة بين مركز الروبوت والعجلة
ϕ	الزاوية بين محور الروبوت الأمامي والمحور x في الجملة المطلقة R_G

مقدمة

1.2 مقدمة

يعد الحاسب الآلي Computer أحد أهم الاختراعات في تاريخ البشرية. فمع انطلق عصر ثورة المعلومات مثلما انطلق عصر الثورة الصناعية مع اختراع المحرك البخاري، وعصر ثورة الاتصالات مع اختراع الراديو. ولكن ما يميز الحاسب الآلي عن المحرك البخاري والراديو هو القدرة على ربط عدة حواسب معاً، إذ يقدم ربط الحواسب مزايا فريدة. أفضى التقدم التكنولوجي والعلمي في مجال تقانة المعلومات إلى تطوّر العتاد الصلب للحواسب وتطوّر الخوارزميات لتصبح أكثر فاعلية، فأصبح الحاسب الواحد قادراً على أداء مهام حسابية معقدة مثل التحكم بخطوط الإنتاج بطريقة "ذكية". نقصد بالقول "ذكية" بأنها مهام معقدة وتعتمد على تحليل كم كبير من المعطيات لاستخلاص معلومات تساهم في اتخاذ قرارات عن آلية العمل وكيفية تطويرها، وبالتالي مراعاة "خبرة" عن كيفية أداء المهمة بشكل أمثل مع مراعاة المتغيرات أثناء العمل. يبقى العنصر البشري أساسياً في بعض المهام المعقدة التي تتطلب مهارة عالية ناتجة عن الخبرة أو القدرة العالية على التأقلم مع الظروف المحيطة واتخاذ قرارات حاسمة في اللحظات الحرجة. وعلى الرغم من قدرة الحواسب على إجراء أعداد فلكية من العمليات الحسابية فهي لا تزال قاصرة عن مجارة العنصر البشري في التعلم والمحاكاة.

إن تطوّر الذكاء الصّنعِي Artificial Intelligence سمح بتعريف مفهوم العميل Agent وتعريفه (بشكل عام) بأنه نظام يتمتع بدرجة عالية من الاستقلالية. ومثلها يمكن أن نعرّف الروبوت على أنه عميل مخصص لأداء مهمة معينة. نذكر بعض الأمثلة على الروبوتات، فمنها الروبوتات المستكشفة للكواكب مثل روبوت Opportunity الذي استكشف كوكب المريخ لعقد من الزمن. وعلى الرغم من التواصل المستمر مع هذا الروبوت لتحصيل المعلومات إلا أن المسافة الشاسعة بين كوكب الأرض والمريخ أدت إلى أزمنة ترأسل تصل حتى 45 دقيقة. وفي بعض الأحيان قد ينقطع التراسل لفترة تصل إلى شهر أو أكثر. إن هذه القيود أجبرت العلماء على تصميم الروبوت بحيث يتمتع بقدر عالٍ من الاستقلالية، فيجب على الروبوت أن يكون قادر على رصد وتقادي العقبات أثناء التحرك والهروب من العوامل الجوية المزيخية إلى جانب الاستكشاف وإجراء الاختبارات. من أمثلة الروبوتات أيضاً محرّكات البحث فهي قادرة على استكشاف المواقع بشكل فاعل وتلقائي واستخلاص المعلومات المفيدة لتسجيلها في فهارس البحث.

اختبرت إمكانية ربط عدّة روبوتات متخصصة باختصاصات مختلفة لأداء مهام تتطلب طيف واسع من الأدوات والتجهيزات.



الشكل 1.2: روبوتات طائرة تتحرك في تشكيل

وهذا الربط هو المكافئ لربط الحواسيب الذي أدى إلى ثورة المعلومات، ومن المتوقع أن يفضي التطور في هذا المجال إلى ثورة عصر الروبوتات. يمكن أن نعرّف مفهوم سرب الروبوتات Robots Swarm على أنه مجموعة من الروبوتات المترابطة لأداء مهمة معيّنة. يمكن لهذه الروبوتات تبادل المعلومات بسهولة باستخدام تكنولوجيا التراسل، وبالتالي يمكنها بسهولة تبادل الخبرات وتخزينها واستعمالها. أما المحاكمة أو صنع القرار فهي عملية أعقد، فعلى الرغم من قدرة كل روبوت على اتخاذ القرارات بشكل مستقل، إلا أن عمل السرب يتطلب اتخاذ قرار واحد على مستوى السرب لتنفيذ المهمة بحيث تتعاون الروبوتات لتنفيذ القرار. تسمى هذه المسألة بمسألة الاتفاق بالرأي Consensus، وهي مسألة اختيار قرار واحد في سرب من العملاء (أو الروبوتات) مع العلم أن كل روبوت يتصرف بشكل مستقل، وهذه المسألة موضع بحث مكثّف. يمكن أن نقسم عملية صنع القرار على مستوى السرب إلى مستويين، المستوى الأعلى وهو اتخاذ القرار على مستوى السرب بغية تحقيق مهمة السرب المرجوة، والمستوى الأدنى وهو اتخاذ القرار بالإجراءات المطلوبة على مستوى الروبوت بغية تنفيذ القرار الأعلى على مستوى السرب. إن اتخاذ القرار على المستوى الأعلى يتمحور حول المهمة والخطوات المطلوبة لإنجازها، أما اتخاذ القرار على المستوى الأدنى فيتطلب الأخذ بعين الاعتبار حالة الروبوتات الفردية. لتوضيح الفرق بين هذين المستويين نأخذ مثلاً مبسطاً لمسألة صنع قرار في سرب من الروبوتات، وهي مسألة التحرك في البيئة ضمن تشكيل (أو توضع نسبي للروبوتات) معين، واحدة من أكثر المسائل المدروسة في الأدبيات.

لنفترض أن سرباً من الروبوتات مكلف بمهمة استكشاف مساحة جغرافية خطيرة بحثاً عن ناجين بعد وقوع كارثة. إن أداء هذه المهمة بسرعة يقتضي استعمال أكبر عدد من الروبوتات بحيث يمكن تغطية كامل المساحة الجغرافية المستهدفة بأسرع وقت وإنقاذ أكبر عدد من الناجين. ولكن لضمان الفعالية في أداء هذه المهمة فلا بد من التحرك بشكل منظم لضمان استكشاف كل النقاط دون ترك ثغرات، ولضمان التباعد بين الروبوتات المستكشفة بحيث لا يهدر أكثر من روبوت جهده لاستكشاف نفس المنطقة. يمكن تنفيذ هذه المهمة بتحريك الروبوتات ضمن تشكيل خطي مع تباعد مناسب بين الروبوتات، وفي هذه الحالة يمكن برمجة السرب لاتباع مسار مسح بدءاً بالمناطق الأكثر كثافة سكانية وانتهاءً بالمناطق الغير مأهولة. إن مسار التحرك هذا هو مهمة السرب ككل، أما مهام الروبوتات الفردية فهي استخدام مجموعة من التجهيزات المتخصصة في رصد الناجين أثناء التحرك. عندما يعثر أحد الروبوتات على ناج يمكن أن يتوقف الروبوت عن التحرك والبحث بغية تحري حالة الناجي الصحية. في هذه الحالة فيجب على السرب التأقلم مع خسارة روبوت باحث ويجب على الروبوتات الفردية المتبقية التأقلم مع هذه الحالة الجديدة وإعادة التوزع في التشكيل. بعد أن يصل الفريق البشري يمكن أن يعود الروبوت للبحث مع باقي الروبوتات، وعندها يجب أن يعود السرب للتأقلم مجدداً.

إن مسألة صنع القرار على مستوى الروبوت الواحد أكثر تعقيداً من مسألة تحريك التشكيل لمسح المنطقة. يمكن حل هذه المسألة بطرق متعددة، إذ توجد عدة مقاربات للحل تختلف باختلاف المعلومات المتاحة للروبوتات أو شروط المسألة أو كيفية ارتباط

الروبوتات ببعضها. نناقش فيما يلي دراسة مرجعية لهذه المسألة نصنف فيها الطرائق المختلفة التي سبق دراستها للحل.

2.2 الدراسة المرجعية

بدأت الأبحاث في مسألة التحكم بأسراب الروبوتات في منتصف التسعينات، حيث ظهرت بعض الدراسات الخاصة بالتحكم بتشكيل من المركبات الطائرة أو المركبات الفضائية. طُرح في (1994) [P.K.C.Wang and Hadaegh](#) أول توصيف مكتمل لمسألة التحكم بمجموعة من الروبوتات لتحقيق وملاحقة تشكيل. ظهرت بعدها عدة أبحاث تستكشف سبلاً جديدة للحل. في (2004) [Scharf et al.](#) ، يصنف المؤلف الحلول المقترحة لحل مسألة التحكم بالتشكيل ضمن 5 فئات:

1. فئة التحكم بنموذج النظم متعددة المتغيرات:

تناولت أولى الدراسات أساليب التحكم الكلاسيكية، حيث طرحت هذه الدراسات قوانين تحكم بنظام مكون من مجموع جميع الروبوتات. وسريعاً ظهرت أبحاث تدرس الاستقرار وفق الطرائق الكلاسيكية ، ففي (2000) [Hadaegh et al.](#) عُرّف معيار تكلفة وصمّم متحكم LQG يتحكم بسررب من الروبوتات ممثلاً بنموذج فضاء الحالة أصغري. تلتها دراسات تزيد من القيود على المسألة، ففي (2000) [Sparks](#) فُرضت قيود على القياسات الممكنة وأضيفت إمكانية تبادل المعلومات بين الروبوتات.

2. فئة خوارزميات القائد-تابع:

سُميت هذه الفئة بهذا الاسم لأن قوانين التحكم فيها تدفع الروبوت باتجاه ملاحقة روبوت آخر ندعوه القائد. قد تتضمن الخوارزميات التي صنفها المؤلف تحت هذه الفئة أساليب تحكم كلاسيكية، ولكن علاقة التبعية الجديدة أفسحت المجال لدراسة أسراب ذات قائد واحد أو عدة قادة. بشكل عام تتمحور دراسة خوارزميات قائد-تابع حول دراسة قانون التحكم الخاص بملاحقة الروبوت القائد، حيث تناولت العديد من الدراسات مختلف طرائق التحكم الكلاسيكية كالتحكم الخطي أو التحكم الصلد والتحكم التكيّفي.

3. فئة التحكم بالبنية الافتراضية:

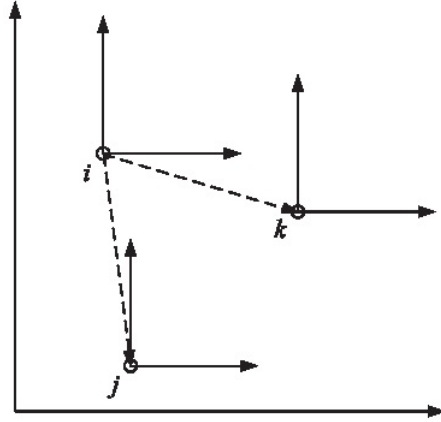
تناولت الأبحاث في هذه الفئة المسألة من وجهة نظر مختلفة، فنُظر إلى التشكيل على أنه جسم صلب في الفراغ. حيث يمثل التشكيل الإشارة المرجعية التي يجب على الروبوتات ملاحقتها. تمحورت هذه الدراسات حول التشكيل وكيفية ترابط الروبوتات، وبعضها عرف خصائص ديناميكية على هذا التشكيل مثل تخامد الاضطرابات عبر التشكيل أو سرعة التحرك والدوران.

4. فئة الأسراب الحلقية:

تناولت الأبحاث في هذه الفئة الحالة الخاصة من فئة قائد-تابع التي يوجد فيها حلقة من التبعية، إذ قد تتضخم تأثيرات الاضطرابات على التشكيل بسبب حلقة التبعية في السرب. تناولت معظم الأبحاث الحالة الخاصة لسرب من ثلاثة روبوتات بسبب الخصائص الهندسية للمثلثات.

5. فئة الخوارزميات السلوكية:

إن المرجع الأول في هذا المجال هو (1998) [Arkin](#) ، حيث يكون سلوك كل روبوت هو ناتج تراكب عدة متحكمات بحيث يحرص كل متحكم على تحقيق سلوك محدد. يسمح هذا الأسلوب بفصل المهام بشكل سهل، فمثلاً يمكن تطبيق قانون تحكم يحرص على تفادي التصادم بين العملاء إضافة إلى قانون تحكم يضمن السلوك المرغوب، وبناءً على تنقل معين يمكن جمع إشارتي التحكم بحسب القانونين السابقين لضمان تحقيق المهمتين. تدرس الأدبيات تعريف "السلوك" والعمليات عليه وكيفية تنقل إشارات التحكم وحالات التضارب بينها.



الشكل 2.2: الأنظمة نسبيّة التوضع (Oh et al. (2015)

إن التقسيم السابق ليس تقسيماً حاسماً، إذ توجد دراسات تندرج تحت أكثر من فئة من الفئات السابقة. طُرح في Oh et al. (2015) تصنيفاً مختلفاً لحلّ مسألة التحكم بالتشكيل. يأخذ هذا التصنيف الجديد بعين الاعتبار التطورات في المجال وميّر بين الدراسات بحسب المعلومات المتوفرة لكل روبوت.

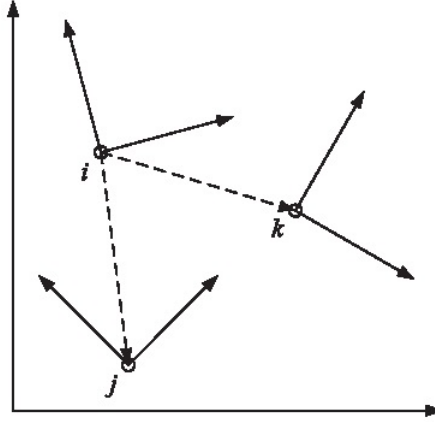
بشكل عام تتلخّص مسألة التحكم في نظام متعدد الوكلاء في كيفية دفع كل العملاء باتجاه حالة معينة كل بناء على المعلومات المتاحة له. بالطبع عندما تكون كل المعلومات متاحة يمكن تصميم متحكمات تحقق المطلوب بالطرق التقليدية، بحيث ينجز المتحكم عملياً ويفرق فيزيائياً بأحد العملاء نسميه القائد. ولكن تظهر مشكلة انهيار النظام بأكمله عند حدوث خلل في العميل القائد، إضافة إلى الصعوبة العملية لتحصيل كل المعلومات الممكنة. لذلك اتجهت الدراسات إلى اللامركزية في التحكم، تقتضي اللامركزية أن تكون إشارة التحكم في كل عميل تابعة لحالته وبعض المعلومات القادر على قياسها. عملياً فإن تبادل المعلومات سهل التطبيق ويتيح معلومات جديدة لكل عميل ليلحق التشكيل.

نطرح التساؤل التالي: ماهي المعلومات الكافية لكل عميل ليبنى عليها قراره بحيث يحقق النظام كاملاً السلوك المطلوب؟. لا شك أن أول الأبحاث في هذا المجال بدأ بدراسة المسألة في حالة توافر كافة المعلومات، وسعت الدراسات بعدها نحو اقتراح خوارزميات بحاجة لمعلومات أقل، سعياً إلى تبسيط التصميم الفيزيائي للعملاء. تركزت الدراسات على حد مصادر المعلومات لكل عميل بعدد معين من العملاء الآخرين ندعوهم الجيران، بحيث يتبادل كل عميل المعلومات مع جيرانه فقط. تشكل علاقات التجاور معاً ما يسمى بطبولوجيا التجاور. يمكن تصنيف المتحكمات والخوارزميات من حيث المعلومات المتاحة إلى:

- أنظمة بتوضع مطلق: يقيس كل عميل موضعه (إحداثياته وتوجهه) بالنسبة لجملة مرجعية مطلقة. ويتبادل المعلومات مع جيرانه لتحقيق سلوك مرغوب للنظام كاملاً. إن تبادل المعلومات مع الجيران ليس ضرورياً لأداء المهمة ولكن يسمح بتحسين الأداء.

- أنظمة بتوضع نسبي: يقيس كل عميل إحداثيات كل من جيرانه بالنسبة لجملة مرجعية مرتبطة بالروبوت. ويتبادل المعلومات مع جيرانه لتحقيق سلوك مرغوب للنظام كاملاً. إن تبادل المعلومات ضروري لتحقيق المهمة المطلوبة. يوضح 2.2 توضع أشعة محاور الجمل المرتبطة بالروبوتات بالنسبة للجملة المطلقة في الأنظمة نسبيّة التوضع.

- أنظمة بتوضع محلي: يقيس كل عميل موضع كل من جيرانه بالنسبة لجملة إحداثيات محلية مرتبطة به ارتباطاً تاماً. ويتبادل المعلومات مع جيرانه لتحقيق سلوك مرغوب للنظام كاملاً. إن تبادل المعلومات ضروري لتحقيق المهمة المطلوبة. يوضح 3.2 توضع أشعة محاور الجمل المرتبطة بالروبوتات بالنسبة للجملة المطلقة في الأنظمة محلية التوضع.



الشكل 3.2: الأنظمة محلية التوضع (Oh et al. (2015)

أجريت دراسات تناولت تحرك العملاء ضمن تشكيل يمثل جسماً صلباً (المسافات بين أي نقطتين منه ثابتة)، أي تكون المواضع النسبية للعملاء ثابتة بمرور الزمن ويتحرك التشكيل كاملاً لملاحقة الحالة المرغوبة. قدم (Ren and Atkins (2007) متحكماً للنظم مطلقة التوضع وبرهنا بمحاكاة جدوى هذا المتحكم في دفع العملاء باتجاه النقاط النهائية المطلوبة مع المحافظة على تشكيل ثابت وذلك ضمن شروط على طوبولوجيا تبادل المعلومات بين العملاء. وقدم (Dong and Farrell (2008) متحكماً للنظم مطلقة التوضع بعملاء غير عرضيين معتمدين على طريقة مشابهة لطريقة (Ren and Atkins (2007) مع إضافة شروط أخرى على طوبولوجيا تبادل المعلومات. وبني هذان البحثان على بحثين سابقين أجراهما (Fax and Murray (2002) على أنظمة منمنجة بأنظمة خطية بفضاء الحالة، وأثبتنا الاستقرار التقاربي لهذه الأنظمة في ملاحقة تشكيل مرغوب، وذلك ضمن شروط على طوبولوجيا تبادل المعلومات. كما قدما معياراً للاستقرار مشتقاً من معيار Nyquist. تناول (Lin and Morse (2003) Morse النظام ذاته ولكن في الزمن المتقطع. في (Moreau (2005) قدم برهان على التقارب الآسي لتحكم الزمن المتقطع تبعه برهان مشابه على متحكمات الزمن المستمر قدمه (Cao and Ren (2010). كما أجريت دراسات في حالة الأنظمة نسبية التوضع لملاحقة تشكيل مرجعي، إذ قدم (Olfati-Saber and Murray (2004) متحكماً مبنياً على الاتفاق بين العملاء ضمن تراتبية وأثبتنا استقراره التقاربي ضمن شروط على طوبولوجيا تبادل المعلومات. في حين قدم (Ren et al. (2005) متحكماً مشابهاً ولكن دون توافر التراتبية. في حالة الأنظمة محلية التوضع تصحح الدراسة أعقد بسبب عدم قدرة العملاء على الرجوع إلى جملة مرجعية. وفي هذه الحالة يعتمد كل عميل على جيرانه اعتماداً كاملاً لتحقيق الهدف، وبذلك تبرز شروط إضافية على طوبولوجيا تبادل المعلومات، يقابلها تنازل في السلوك المرغوب فمثلاً بدون جملة مرجعية يصبح مستحيلاً الانتقال إلى نقطة مرغوبة ولكن يمكن الحفاظ على تشكيل معين. وضمن هذه الشروط والأهداف صمّم (Dorfler and Francis (2009) متحكماً يدفع بالمسافات بين العملاء إلى القيم المرغوبة عندما يقيس العميل إحداثيات جيرانه، يعتمد التحكم المقترح على الانحدار الأعظم لتابع كمون وأثبت التقارب باستعمال مبدأ Lyapunov وذلك ضمن شروط قاسية. وأثبت (Krick et al. (2009) وآخرون وجود نقاط توازن غير مستقرة في هذا المتحكم عند وجود 4 عملاء يتبادلون التأثير. قام (Oh and Ahn (2014) بإسقاط بعض الشروط مع الحفاظ على الاستقرار. ودرس كل من (Belabbas et al. (2012) المتحكمات السابقة مع وجود ضجيج في القراءات وظهرت اهتزازات في سلوك النظام. اتبعت بعض الدراسات مسارات مستقلة عن المسارات السابقة، ففي بحث أجراه (Basiri et al. (2010) حالات قياس الزوايا ما بين العملاء بمعرفة مرجع قياس زوايا مطلق وبرهنوا الاستقرار التقاربي للمتحكمات التي اقترحوها.

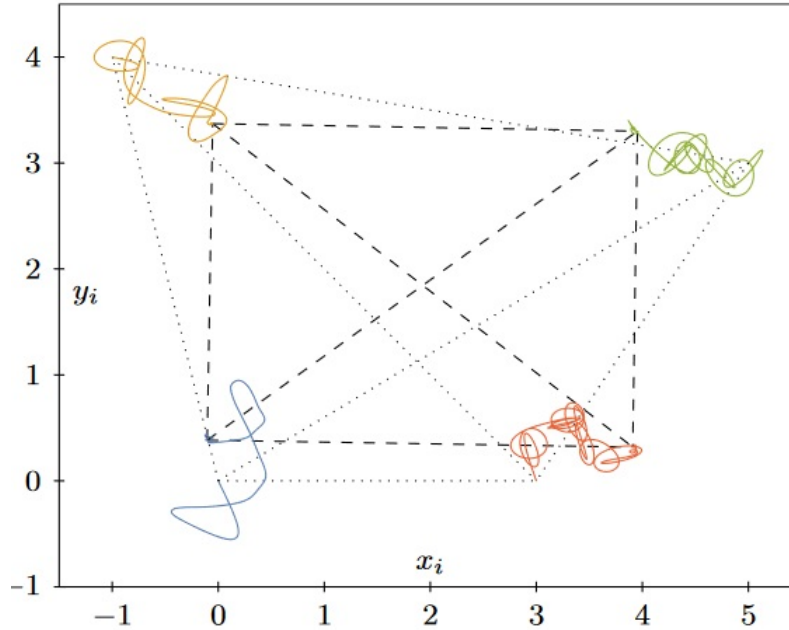
تناولت 4 دراسات حالة قدرة العملاء على قياس المسافات فقط إلى الجيران، أولها (Anderson and Yu (2011) التي تطلبت قدرة كل عميل على قياس المسافة إلى جيرانه من الدرجة الأولى والثانية، ومن ثم تحصيل كم أكبر من المعلومات عن طريق التراسل بين العملاء. وبعد معرفة كافة المسافات إلى الجيران من الدرجة الأولى والثانية والمسافات بينهم يمكن الحصول على المواضع بتطبيق تفريق Cholesky على مصفوفة أبعادها كبيرة نسبياً. تناول هذا البحث الجوانب النظرية المتعلقة بمحدودية

القياسات بالمسافات فقط مناقشاً عدم التعيين في التوجه بسبب ذلك. ولم يتضمن البحث مثلاً عملياً للخوارزمية المقترحة. تشترط الخوارزمية المقترحة في هذا البحث توسيع طوبولوجيا تبادل المعلومات المحددة للتشكيل، وذلك بغية إتاحة قياسات لمسافات إضافية ضرورية لعمل الخوارزمية.

في بحث آخر، قدم [Cao et al. \(2011\)](#) خوارزمية تحكم تعتمد على تقدير تواضع الجيران بالنسبة لكل عميل عن طريق أخذ عدة قراءات للمسافات إلى الجيران أثناء تحرك العميل وثبات الجيران. ولتحقيق ذلك وضع الباحثون خوارزمية يتبادل فيها العملاء الأدوار في الحركة والثبات بحيث يتمكن كل عميل من تقدير موضع الجيران والتحرك لتحقيق السلوك المرغوب. بالتحديد، فإن تبادل الأدوار في الحركة والسكون يكون في 4 أدوار، بحيث يتم تقسيم الروبوتات المشاركة في التشكيل إلى 4 مجموعات، وتتحرك إحدى هذه المجموعات في حين تبقى المجموعات المتبقية في سكون. أثناء تحرك المجموعة، فإن كل روبوت يتحرك حركة بسيطة موضعياً ويرصد تغير المسافات. وبناء على تغيرات المسافات مع الحركة يمكن لكل روبوت تحديد مواضع الجيران (مع عدم تعيين في التوجه). تعتمد هذه الخوارزمية على تقسيم المجموعات بحيث لا يتجاوز أي روبوتين ضمن مجموعة الحركة الواحدة، وذلك لضمان ثبات الجيران الذين يقيس إليهم الروبوت المسافات. تحتاج الروبوتات لتطبيق هذه الخوارزمية إلى ساعات متوافقة لضمان التناوب في أدوار الحركة والسكون بشكل صحيح.

حديثاً فقد نشر [Jiang et al. \(2017\)](#) بحثاً يتضمن رصد لمواضع الجيران وسرعاتهم بشكل مستمر بالنسبة للزمن (دون أدوار توقف وحركة). تعتمد الخوارزمية المقترحة في ذلك البحث على تحرك الروبوتات لحركات صغيرة مهمة بالنسبة لحركة التشكيل ككل. وكما في [Cao et al. \(2011\)](#)، فإن كل روبوت يحلل تغيرات المسافات إلى جيرانه لاستنتاج مواضعهم وسرعاتهم. حيث يتم تطبيق تحويل فورييه على مربع المسافة بين الروبوت المدروس وكل من جيرانه. وعلى الرغم من النتائج المقبولة، إلا أن تحرك الروبوتات بحركات صغيرة لرصد المواضع والسرعات غير عملي. وأخيراً، تناول [Suttner and Sun \(2018\)](#) المسألة من ناحية مختلفة. إذ عمد إلى استخدام متحكم الانحدار الأعظم لتحقيق التشكيل، ولكن مع طرح خوارزمية تسمح بتقليل كمون كل روبوت دون معرفة صريحة بمواضع الروبوتات المجاورة. اعتمد هذا البحث على تقريب Lie Brackets لتحقيق الاستقرار التقاربي لكل روبوت. ولكن مسارات الروبوتات نحو وضعية الاستقرار هي مسارات متعرجة غير أمثلية، ويظهر الشكل 4.2 مسارات الروبوتات لتحقيق تشكيل مربعي الشكل. تبدأ الروبوتات من التوزع الموضح بالخط المنقط، وتتقارب من التوزع الموضح بالخط المتقطع.

بذلك يتضح أن التحكم في حركة الأنظمة متعددة العملاء ضمن تشكيل بالاعتماد على المسافات فقط لا يزال مجالاً غير مكتمل، إذ نسعى في بحثنا هذا إلى تقديم خوارزمية صريحة وقابلة للتطبيق العملي لملاحقة التشكيل بالاعتماد على المسافات فقط، وبسير عمل مستمر نحو التشكيل المرغوب دون تعرج في المسارات.



الشكل 4.2: محاكاة عمل الخوارزمية التي قدمها (Suttner and Sun (2018))

3.2 موضوع البحث

نهدف من هذا البحث إلى حل المشكلات الناجمة عن التحكم في نظام متعدد العملاء (أو الروبوتات) بمعرفة المسافات فقط إلى الجيران. وتصميم خوارزمية تحكم في تشكيل من الروبوتات يتحرك في المستوى بقياس المسافات بين كل روبوت وجيرانه فقط وتبادل أقل كم من المعلومات، بغية ملاحقة تشكيل معرف بالمسافات بين الجيران وإجراء محاكاة للخوارزمية المقترحة على نظام متعدد العملاء غير العرضيين. الهدف من دراسة النظم متعددة العملاء هو إتاحة المجال لاستبدال البشر بروبوتات في المهام الشاقة والبيئات الخطرة حيث يمكن أن يكون تحديد مواضع الجيران بشكل تام متعذراً في بعض الأحيان. كما استعرضنا سابقاً، فإن المتحكم الذي قدمه (Anderson and Yu (2011)) يتطلب قياس المسافة إلى الجيران من الدرجة الثانية (جيران الجيران) وهو ما يتطلب زيادة في قدرات الحساسات على التحسس لمسافات أبعد، وقد يكون ذلك مستحيلًا في بعض الحالات. في حين أن توقف العملاء وتحركهم في أدوار كما في المتحكم الذي اقترحه (Cao et al. (2011)) غير مجدي. أما في بحث (Jiang et al. (2017)) فيجب على الروبوتات التحرك بحركات صغيرة بالمقارنة مع حركة التشكيل لكي تتمكن من رصد المواضع النسبية وملاحقة التشكيل. أما في (Suttner and Sun (2018)) فإن الروبوتات تسلك مسارات متعرجة بشكل غير مقبول. لذلك نهدف في هذا البحث إلى إيجاد خوارزمية لتقدير موضع الروبوتات بالاعتماد على المسافات فقط وتبادل المعلومات مع الجيران فقط دون انقطاع في استمرارية العمل لكل روبوت بحيث يتحرك الروبوت لملاحقة التشكيل. نركز في بحثنا على مسألة رصد مواضع الروبوتات المجاورة ومسألة التحرك لملاحقة التشكيل، ونتطرق سريعاً لنمذجة الروبوتات اللاعرضية ومسألة ملاحقة الروبوت اللاعرضي لنقطة. نفرض نموذجاً بسيطاً للروبوتات لنقادي التعقيد، مثلما ركزت معظم الدراسات على الفكرة الرئيسية للبحث مع مرور سريع على النمذجة.

4.2 أهداف البحث وحدوده

يجب تحديد حدود البحث وأهدافه لضمان شمولية المسألة وعدم الضياع في التفاصيل. كما ذكرنا سابقاً، لا نهتم بالتفاصيل العملية للمسألة مثل اختيار الروبوتات والمحركات والتحكم بسرعتها. بل نفترض وجود روبوتات منمذجة بشكل جيد وقادرة على الاستجابة للأوامر وتبادل المعلومات بسهولة. عندها يمكن التحدث بتفصيل عن خوارزمية شاملة دون الضياع في مسائل أقل أهمية. لا شك أن الهدف الرئيسي من البحث هو تقديم طريقة منظمة وممنهجة تعتمد على المسافات فقط في رصد المعلومات اللازمة وملاحقة التشكيل. وبالتالي بني هذا البحث حول الخوارزمية الرئيسية المقترحة لملاحقة التشكيل بناء على المسافات فقط. إن الجزء الأكبر من هذا التقرير مكرس لوصف الخوارزمية المقترحة والمسائل المتعلقة بها. إن الهدف الرئيسي للبحث يتحقق عندما يصبح القارئ ملماً تماماً بالخوارزمية، ولاشك أن هذه المهمة تتطلب معارف مسبقة ببعض العلوم. فيما يتعلق بمسألة التحكم بأسراب الروبوتات، فإن نظرية البيان الرياضي **Graph Theory** أداة رئيسية في الدراسة. نقدم في هذا البحث مقدمة رياضية تمهد لمفاهيم هامة في نظرية البيان الرياضي، وتم اختصار العديد من المفاهيم غير ذات الصلة بالموضوع بحيث يمكن الاستفاضة في شرح المفاهيم المهمة مثل مفهوم صلابة البيان وأنواعها. كما استخدمت الإحداثيات المتجانسة بشكل موسع في علم الروبوتيك لتمثيل جمل الإحداثيات والتحويلات بينها، وهي مشروحة بشكل مبسط في الجزء الخاص بملاحقة التشكيل. إن صلب موضوع البحث هو الاعتماد على قياس المسافات فقط لتحقيق التحكم بالتشكيل. إذ تبدأ الخوارزمية بتحصيل المعلومات، ثم معالجتها، ثم ملاحقة التشكيل. نسردها في هذا البحث مراحل عمل الخوارزمية بالترتيب، ولا نتطرق إلى دراسة أمثلة المسألة لأن جوهر البحث هو التغلب على محدودية القياسات.

الدراسة النظرية

1.3 الوصف العام للخوارزمية المقترحة

مقدمة

نتناول في هذا القسم شرحاً عاماً لبيئة وآلية عمل الخوارزمية المقترحة. نوضح مجال عمل الخوارزمية وبعض شروط تطبيقها، ثم نصف الخطوات الرئيسية لعمل هذه الخوارزمية على مستوى الروبوت الواحد، والخطوات الرئيسية لإعداد البيئة المناسبة لعمل هذه الخوارزمية. نهتم في هذا القسم بذكر النقاط الأهم في هذا البحث مع توضيح موقعها ضمن سير عمل الخوارزمية.

1.1.3 بيئة عمل الخوارزمية

تعمل الخوارزمية على مجموعة من الروبوتات التي تتحرك في المستوي ثنائي البعد. وهذه الروبوتات قادرة على التخابط فيما بينها. يتم التخابط بين أزواج محددة من الروبوتات تشكل معاً ما يسمى بـ **طبولوجيا تبادل المعلومات أو طبولوجيا التجاور**. وهذا يعني أن الروبوت ليس قادراً على التخابط مع أي روبوت آخر وإنما فقط مع روبوتات محددة. يمكن أن تتجاور الروبوتات في الموقع الفيزيائي دون أن تتخابط فيما بينها، أو أن تتخابط دون أن تكون متجاورة في الموقع الفيزيائي. باختصار يمكن القول أن التجاور في طبولوجيا التجاور لا ينعكس بالضرورة على التجاور الفيزيائي. ولكن حرصاً على تبسيط الدراسة سوف نراعي تحقيق التجاور الفيزيائي والتجاور في طبولوجيا التجاور معاً. فيما يلي نسمي الروبوتات المجاورة لروبوت محدد حسب طبولوجيا التجاور بـ **جيران الروبوت**.

إضافة إلى التخابط، فإن كل روبوت قادر على قياس المسافات إلى جيرانه. يستطيع كل روبوت أن يقيس المسافة إلى كل روبوت بذاته، أي أنه قادر على تمييز الروبوت الذي تُقاس المسافة إليه. ولا يستطيع أي روبوت إجراء أي قياس يتعلق بالزوايا والاتجاهات. ويعني ذلك أن كافة القياسات التي يحصلها الروبوت هي مسافات حصراً. تقوم الخوارزمية على معالجة المعطيات التي يحصلها الروبوت لرصد مواضع الجيران بالنسبة لجملة إحداثيات نصلحها بما يناسب المسألة، ثم رصد اتجاه حركة الروبوت بالنسبة لجيرانه. وأخيراً اتخاذ الإجراءات لتحقيق التشكيل وملاحقته. تتمثل المعطيات التي يحصلها أي روبوت

بالمسافات التي يقيسها الروبوت بنفسه، إضافة إلى القياسات التي أجراها الجيران وحصل عليها الروبوت عن طريق تبادل المعلومات.

2.1.3 مراحل عمل الخوارزمية على مستوى الروبوت الواحد

إن الخوارزمية المقترحة تتضمن ثلاثة مراحل رئيسية، الأولى هي رصد مواضع جيران الروبوت وتحديد كيفية التحرك إليها، والثانية هي تحديد اتجاه حركة الروبوت لكي يكون قادراً على الالتفاف لملاحقة التشكيل، والثالثة هي تطبيق إشارات التحكم بشكل مناسب لدفع الروبوت باتجاه تحقيق التشكيل. تتمحور الفكرة العامة للخوارزمية المقترحة على أن يقوم كل روبوت بالتحرك بما يحقق التشكيل مع جيرانه الملاحقين، وإذا قام كل روبوت بدوره على أكمل وجه فإن التشكيل بأكمله سيتحقق وستتم الملاحقة بشكل صحيح. إن هذه الفكرة العامة ليست بديهية، وبالفعل، توجد شروط على بيئة العمل يجب تحقيقها لضمان تحقيق التشكيل وملاحقته بالاعتماد على ملاحقة كل روبوت لجيرانه فقط. نناقش هذه الفكرة بشكل مفصل أكثر في المقدمة الرياضية المخصصة لنظرية البيانات Graph Theory. إن رصد حالة الروبوت هي عملية غير بسيطة بسبب اقتصار القياسات على المسافات، إذ أن قياس المسافات لا يكفي لمعرفة بيئة الروبوت ثنائية البعد بشكل كامل. وبالتالي لا يمكن اتخاذ إجراء لملاحقة التشكيل دون امتلاك حس بتوجه الروبوت بالنسبة لجيرانه. لذلك لا بد من معالجة القياسات لرصد جوار الروبوت واتجاه حركة الروبوت فيه. أما فيما يتعلق باتخاذ الإجراءات، فيجب على الروبوت أن يتخذ إجراءات تضمن ملاحقة التشكيل. إن اتخاذ الإجراءات هو عملياً قانون التحكم الذي يضمن تحقيق التشكيل. ومع أن قانون التحكم بالانحدار الأعظم يعطي نتائج جيدة، إلا أنه يعاني من بعض المشاكل المتعلقة بنقاط الاستقرار. نستعرض هذه المشاكل وكيفية التغلب عليها في 6.3. بشكل عام يمكن أن نقسم خطوات عمل الروبوت أثناء تنفيذ الخوارزمية إلى مجموعة من الخطوات عالية المستوى هي:

1. قياس المسافات إلى الجيران وتخزين النتائج بغية معالجتها وإرسالها إلى أي روبوت آخر قد يطلبها.
2. التخاطب مع الروبوتات الأخرى لتحصيل القياسات التي سبق وأجزوها وتخزينها لاستخدامها في المعالجة ورصد الجوار.
3. معالجة المعلومات المحصلة وتكوين تصوّر عن جوار الروبوت، أي تكوين تصوّر عن مواقع الجيران. حيث لا يشترط تكوين تصوّر عن مواقع كافة الجيران، وإنما يُكتفى بمجموعة محدّدة من الجيران ندعوهم بـ **الجيران الملاحقين**.
4. تحديد النقطة التي يجب على الروبوت التحرك إليها بالنسبة للجيران بغية ملاحقة التشكيل. ندعو هذه النقطة بـ **النقطة المستهدفة**.
5. الاستفادة من كافة المعطيات السابقة لتحديد شعاع سرعة الروبوت بالنسبة للجيران.
6. تحديد الإجراءات الواجب اتخاذها لتحقيق التشكيل، أي تحديد اتجاه الحركة بحيث يقترب الروبوت من النقطة المستهدفة.
7. اتخاذ الإجراءات.
8. بدء خطوة جديدة وتكرار العمليات السابقة.

لا شك أن هذه الخوارزمية تعمل ضمن الشروط قاسية. تتمثل هذه الشروط القاسية باقتصار التخاطب على الجيران، واقتصار عمليات القياس على قياس المسافات إلى الجيران. إن هذه الشروط القاسية تفرض على الخوارزمية مجموعة من الشروط الإضافية حتى تعمل بشكل صحيح. تتلخّص هذه الشروط الإضافية تحت العناوين التالية:

1. شرط التشكيل المحدّد:

بما أن الروبوتات تتحرك بهدف تحقيق تشكّل محدّد، فيجب أن يحدّد هذا التشكيل مسبقاً، وسنرى لاحقاً أن التشكيل يؤثر على طوبولوجيا التجاور.

2. شرط المعرف المميز لكل روبوت:
بما أن كل روبوت قادر على تمييز الجار الذي يقيس المسافة إليه، فيجب أن يتمتع كل روبوت بمعرف مميز .
 3. شرط طبولوجيا تبادل المعلومات:
بما أن كل روبوت قادر على التعامل مع مجموعة محدّدة من الروبوتات فقط، فيجب تحديد هذه المجموعة من أجل كل روبوت. أي يجب تحديد طبولوجيا التجاور مسبقاً.
 4. شرط محدودية القياس بالمسافات فقط دون الزوايا:
إن هذا الشرط هو الأقسى، إذ أن مضمون هذا البحث يتمحور حول تقديم خوارزمية تعتمد على القياسات فقط دون الزوايا لتحقيق التشكيل وملاحقته. وهذا الشرط يلعب أكبر دور في تحديد الفكرة العامة للخوارزمية وتفصيلها. يصعب في هذه المرحلة توضيح انعكاسات هذا الشرط على الخوارزمية وإنما سيبيّن أثر هذا الشرط أثناء وصف الخوارزمية وكيفية عملها.
- إن هذه الشروط السابقة تتطلب مجموعة من عمليات الإعداد تمهيداً لعمل الخوارزمية. يمكن تحقيق هذه الشروط بوساطة مجموعة من خطوات الإعداد هي:
1. تحديد الروبوتات المساهمة في التشكيل:
إن الخوارزمية المقترحة ضمن هذا البحث لا تسمح بإضافة روبوتات جديدة للتشكيل، كما أنها لا تسمح بإزالة روبوت من التشكيل. وبالتالي يجب تحديد الروبوتات المساهمة في التشكيل.
 2. إسناد معرف مميز لكل روبوت:
يمكن إسناد عدد طبيعي لكل روبوت يمثل معرفاً له، بالطبع يجب أن يكون معرف أي روبوت فريداً. يمكن إسناد معرف من غير مجموعة الأعداد الطبيعية (مثلاً السلاسل المحرفية)، ولكن كما سيبيّن في المناقشة في 3.3 فيشترط أن تكون المعرفات قابلة للمقارنة تماماً بحيث يمكن تحديد عنصر أصغري تماماً من أجل أي مجموعة منتهية من المعرفات. بمعنى آخر، فإن كل روبوت قادر على تمييز جاره الأول .
 3. تحديد التشكيل المرغوب:
يقصد هنا تحديد توزيع هندسي للروبوتات في المستوي بحيث يشغل كل روبوت نقطة، ولا يشترك أي روبوتين بنقطة.
 4. تحديد طبولوجيا التجاور:
مع العلم أن التجاور الفيزيائي ليس مشروطاً بالتجاور في طبولوجيا تبادل المعلومات، ولكن اختيار طبولوجيا تجاور منسجمة مع التشكيل المستهدف يبسط العمل ويسمح بتجنّب بعض المشاكل. فمثلاً، من الأفضل أن يقوم الروبوت بإجراء قياسات إلى روبوتات مجاورة له فيزيائياً لكي تبقى ضمن مدى أجهزة القياس، ولكي تقل فرصة وجود عوائق قد تشوّش عملية القياس. كما أن تبادل المعلومات مع الروبوتات المجاورة أفضل لضمان شدة إشارة جيدة وبالتالي ترسل موثوق. يتضح في المناقشة في 3.3 أن طبولوجيا التجاور يجب أن تحقق شروطاً معينة.
 5. تحديد جيران كل روبوت:
بعد تحديد طبولوجيا التجاور، يمكن أن نعرف جيران كل روبوت.
 6. تحديد الجيران الملاحقين لكل روبوت:
يجب على كل روبوت التحرك بناء على مواضع مجموعة محددة من جيرانه لتحقيق التشكيل. إن الشرط الذي تفرضه الخوارزمية المقترحة على طبولوجيا التجاور هو في الحقيقة شرط على الجيران الملاحقين، وبالتالي ينعكس هذا الشرط

على طوبولوجيا التجاور. إذ يجب أن يتجاور على الأقل ثلاثة من الجيران الملاحقين فيما بينهم مثني مثني. نناقش في 3.3 سبب فرض هذا الشرط على طوبولوجيا تبادل المعلومات.

نبدأ في هذا البحث بمقدمة رياضية تتناول مفهوم البيان الرياضي والبنية النظرية المتعلقة به Graph Theory الضروريان لفهم طوبولوجيا التجاور والشرط عليها. ثم نشرح آلية عمل الخوارزمية على مستوى الروبوت الواحد، ونوضح انعكاسات عمل الخوارزمية على التشكيل بشكل عام.

ملخص الوصف العام للخوارزمية المقترحة

إن الخوارزمية المقترحة هي خوارزمية تعمل على مستوى الروبوت الواحد. وتقسّم إلى ثلاثة مراحل رئيسية، مرحلة جمع المعلومات وتكوين تصور عن الجوار (أي رصد مواضع الجيران الملاحقين)، ومرحلة رصد اتجاه حركة الروبوت بالنسبة للجيران، ومرحلة اتخاذ الإجراءات اللازمة لتحقيق وملاحقة التشكيل. بسبب الشروط القاسية على عمل الخوارزمية، والمتمثلة بمحدودية القياسات إلى قياس المسافات دون قياس الزوايا، فإن بيئة عمل الخوارزمية تتطلب شروطاً محددة تم ذكرها، مع مناقشة أثر كل شرط على البيئة وكيفية تحضير هذه البيئة لعمل الخوارزمية عبر مجموعة محددة من الخطوات.

2.3 مقدمة رياضية

مقدمة

إن دراسة أسراب الروبوتات والتشكيلات تعتمد بشكل أساسي على البيان الرياضي Graph والنظرية الرياضية الموافقة له Graph Theory. إذ تُمثّل طوبولوجيا تبادل المعلومات باستخدام البيان الرياضي. في هذا القسم نستعرض تعريفاً سريعاً للمفاهيم الرياضية المتعلقة بالبيان الرياضي ثم نعرّف مفهوم البيان الصلب الضروري لتحقيق التشكيل بناء على المسافات فقط. 6.3 .

1.2.3 البيان الرياضي

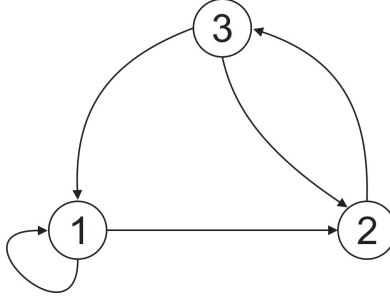
يوجد أكثر من تعريف للبيان الرياضي، وكل تعريف يتيح استخدام تقنيات مختلفة. لذلك سنسرد في هذه المقدمة الرياضية مفهوم البيان الرياضي وبعض المفاهيم والمبرهنات المتعلقة به بما يلائم موضوع الرسالة. بعض هذه المفاهيم ليس جزءاً من نظرية البيان الرياضية وإنما هي مفاهيم مقترحة في الأدبيات المتعلقة بالتحكم بسررب من الروبوتات.

تعريف(1): البيان الرياضي (أو البيان اختصاراً)

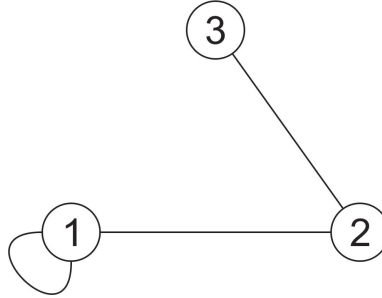
ليكن V مجموعة غير خالية ولتكن $E \subset V \times V$ ، نعرف البيان بالثنائية $G = (V, E)$ ونسمي V مجموعة عقد البيان و E مجموعة حواف البيان.

مثال(1):

مجموعة العقد $V = \{1, 2, 3\}$ ومجموعة الحواف $E = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$ تشكلان بياناً $G = (V, E)$ موضّح في الشكل 1.3 .



الشكل 1.3: البيان في الحالة العامة



الشكل 2.3: البيان غير الموجّه

استخدم البيان بشكل واسع في العديد من المجالات الرياضية. يعبر البيان ضمن هذا البحث عن مجموعة علاقات التجاور بين الروبوتات، أو طبولوجيا التجاور. تمثل الروبوتات بالعقد في حين تمثل العلاقات بالحواف بين هذه العقد.

تعريف(2): العقدتين المتجاورتين

ليكن $G = (V, E)$ بياناً، نقول عن العقدتين $v_1, v_2 \in V$ أنهما متجاورتين إذا وفقط إذا $(v_1, v_2) \in E$.

بمعنى آخر فإن العقدتين المتجاورتين هما أي عقدتين تصل بينهما حافة.

تعريف(3): البيان غير الموجّه

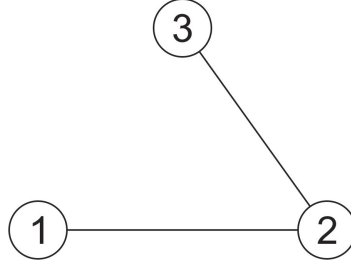
نقول عن البيان $G = (V, E)$ أنه غير موجه إذا تحقق $(a, b) \in E \Leftrightarrow (b, a) \in E$.

يتضح من التعريف أنه في البيان الموجه، أي علاقة بين عقدتين هي علاقة متناظرة، إذ توجد حافتين تصلان بين أي عقدتين متجاورتين بحيث يكون الاتصال بالاتجاهين. من المفيد تعريف المساواة بين حافتين في حالة البيان غير الموجه بالشكل $(a, b) = (b, a)$ ، وذلك يبسط التعاريف والمبرهات التالية بشكل كبير.

مثال(2):

مجموعة العقد $V = \{1, 2, 3\}$ ومجموعة الحواف $E = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ تشكلان بياناً غير موجه $G = (V, E)$ الموضّح في الشكل 2.3. أما البيان في المثال السابق فهو بيان موجه.

تصنف خوارزميات التحكم بأسراب الروبوتات ضمن تصنيفين أساسين حسب العلاقة بين الروبوتات، فإذا كانت العلاقة بين أي روبوتين متناظرة أمكن القول عن خوارزمية التحكم أنها خوارزمية موزعة. إذ لا يوجد ما يميز بين أي روبوتين مرتبطين بعلاقة.



الشكل 3.3: بيان بسيط

أما إذا كانت العلاقة غير متناظرة، أي أن العلاقة بين أي روبوتين مرتبطين هي باتجاه واحد، فتسمى الخوارزمية في هذه الحالة بخوارزمية ذات قائد أو خوارزمية قائد-تابع. سبب هذه التسمية هي أن معظم الأدبيات تقترح خوارزميات غير متناظرة يقوم فيها الروبوت باتخاذ إجراءات لملاحقة روبوت آخر يتصرف باستقلال عن الروبوت الأول، وهو ما يحاكي تبعية الروبوت الأول للثاني، أي أن الثاني هو قائد للأول. بشكل عام فإن وجود قائد واحد للسرب (أي وجود روبوت لا يتبع أي روبوت آخر) ليس ضرورياً، وعندها تكون الخوارزمية غير متناظرة وبدون قائد. لهذا السبب فإن تسمية "خوارزمية ذات قائد" ليست تسمية دقيقة، ونعتمد تسمية خوارزمية قائد-تابع بدلاً عنها. ضمن موضوع هذا البحث فإن الخوارزمية المقترحة هي خوارزمية متناظرة، أي خوارزمية موزعة. وعليه فإننا نقصد بالبيان البين غير الموجه إلا إذا ذكر غير ذلك.

تعريف(4): البيان البسيط

نقول عن البيان $G = (V, E)$ أنه بسيط إذا وفقط إذا تحقق $\forall v \in V : (v, v) \notin E$.

يقصد بالبيان البسيط أي بيان لا يحوي حافة تصل عقدة بنفسها. لا شك أن الروبوتات في السرب لسيت بحاجة لتبادل المعلومات مع ذاتها، وبالتالي فإن دراستنا ستقتصر على البيانات الرياضية البسيطة.

مثال(3):

مجموعة العقد $V = \{1, 2, 3\}$ ومجموعة الحواف $E = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ تشكلان بياناً بسيطاً $G = (V, E)$ الموضح في الشكل 3.3. نلاحظ البيان في الشكل 1.3 و 2.3 غير بسيط.

في هذا البحث سنتعامل مع البيانات الرياضية البسيطة غير الموجهة، وبالتالي نقصد بالبيان بياناً بسيطاً غير موجه إلا إذا ذكر غير ذلك.

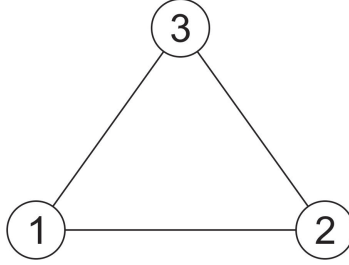
تعريف(5): البيان التام

نقول عن البيان $G = (V, E)$ أنه تام إذا وفقط إذا $\forall a, b \in V : a \neq b \Leftrightarrow (a, b) \in E$.

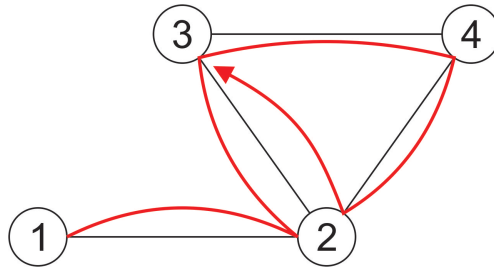
البيان التام هو البيان الذي تتجاور فيه أي عقدتين. وهو مفهوم مهم في هذه الدراسة الرياضية.

مثال(4):

مجموعة العقد $V = \{1, 2, 3\}$ ومجموعة الحواف $E = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 3), (3, 1)\}$ تشكلان بياناً تاماً $G = (V, E)$ الموضح في الشكل 4.3. نلاحظ أن G هو أيضاً بيان بسيط وغير موجه.



الشكل 4.3: بيان تام



الشكل 5.3: رحلة منتهية

يعرف البيان التام في بعض الأدبيات الرياضية على أنه البيان $G = (V, E)$ الذي يحقق $E = V \times V$. ولكن حسب هذا التعريف فإن أي بيان بسيط هو غير تام بالضرورة، ولذلك اخترنا تعريفاً متوافقاً مع تعريف البيان البسيط. وجب توضيح هذه النقطة على الرغم من أن جميع البيانات في لب هذا البحث هي بيانات بسيطة. فيما يلي نقدم بعض التعريف التي تمهد لمفهوم البيان المتصل.

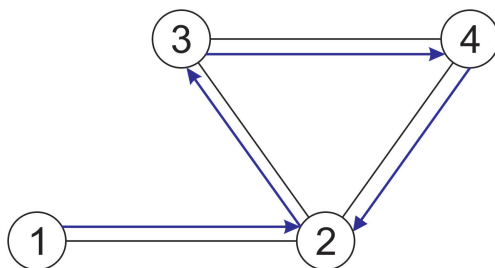
تعريف (6): الرحلة المنتهية

ليكن $G = (V, E)$ بياناً، وليكن $N \in \mathbb{N}$ بحيث $N \geq 1$ ، ولتكن $(e_i)_{i=1..N} : e_i \in E$ جماعة من الحواف و $((e_i), (v_j)) : v_j \in V$ جماعة من العقد تحققان $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ ، $i = 1..N$ ، نسمي الثنائية $((e_i), (v_j))$ رحلة بدايتها v_0 ونهايتها v_N . ونسمي N طول الرحلة. ندعو $(e_i)_{i=1..N}$ خطوات الرحلة.

مثال (5):

ليكن البيان $G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (2, 4), (4, 2)\})$ الموضَّح في الشكل 5.3. ولتكن جماعة الحواف $e_1 = (1, 2), e_2 = (2, 3), e_3 = (3, 4), e_4 = (4, 2), e_5 = (2, 3)$ ، ولتكن جماعة الحواف $v_0 = 1, v_1 = 2, v_2 = 3, v_3 = 4, v_4 = 2, v_5 = 3$ فتكون $((e_i), (v_j))$ رحلة منتهية.

يمكن تعريف رحلات غير منتهية باستخدام متتاليات من الحواف والعقد. ولكن هذا خارج موضوع البحث.



الشكل 6.3: مسار

تعريف (7): المسار

لتكن $w = ((e_i), (v_j))$ رحلة بدايتها v_0 ونهايتها v_N ، نقول عن الرحلة w أنها مسار إذا فقط إذا كانت الجماعة (e_i) مختلفة متتالية متتالية.

مثال (6):

ليكن البيان $G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (2, 4), (4, 2)\})$ الموضح في الشكل 6.3 وتكون جماعة الحواف $e_1 = (1, 2), e_2 = (2, 3), e_3 = (3, 4), e_4 = (4, 2)$ وتكون جماعة الحواف $v_0 = 1, v_1 = 2, v_2 = 3, v_3 = 4, v_4 = 2$ يكون عندئذ $((e_i), (v_j))$ مساراً. نلاحظ أن الرحلة في المسار السابق ليست مساراً لأن $e_2 = e_5$.

يعبر المسار عن رحلة لا تتضمن خطوات زائدة، إذ يضمن شرط الاختلاف متتالية متتالية عدم اتخاذ أي خطوة أكثر من مرة. وبالتالي يمكن تحديد خطوة تالية لأي حافة من البيان وفق مسار معين.

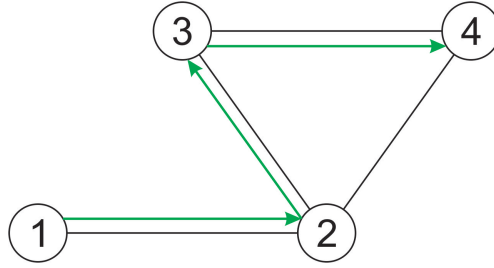
تعريف (8): الطريق

ليكن $t = ((e_i), (v_j))$ مساراً بدايته v_0 ونهايته v_N ، نقول عن المسار t أنه طريق إذا فقط إذا كانت الجماعة (v_j) مختلفة متتالية متتالية.

مثال (7):

ليكن البيان $G = (\{1, 2, 3, 4\}, \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (2, 4), (4, 2)\})$ الموضح في الشكل 7.3 وتكون جماعة الحواف $e_1 = (1, 2), e_2 = (2, 3), e_3 = (3, 4)$ وتكون جماعة العقد $v_0 = 1, v_1 = 2, v_2 = 3, v_3 = 4$ يكون عندئذ $((e_i), (v_j))$ طريقاً. نلاحظ أن المسار في المثال السابق ليس طريقاً لأن $v_1 = v_4$.

يحمل مفهوم الطريق معنى مختلفاً عن مفهوم الرحلة والمسار. يشترط المسار على عدم تكرار خطوات الرحلة ولكنه لا يمنع زيارة العقدة أكثر من مرة. أما الطريق فيشترط عدم زيارة أي عقدة أكثر من مرة. إن مفهوم الطريق يسمح بتعريف المسافة بين عقدتين في بيان ما على أنها أقصر طريق بينهما.



الشكل 7.3: طريق

تعريف (9): المسار المغلق

ليكن $t = ((e_i), (v_j))$ مساراً بدايته v_0 ونهايته v_N ، نقول عن المسار t أنه مغلق إذا وفقط إذا $v_0 = v_N$.

بشكل مماثل يمكن تعريف الرحلة المغلقة.

نتيجة (1): الطريق متناظر

ليكن G بياناً وليكن $p = ((e_i), (v_j))$ طريقاً في هذا البيان بدايته v_0 ونهايته v_N ، عندئذ يوجد طريق p' في البيان G بدايته v_N ونهايته v_0 .

البرهان:

نلاحظ أن الطريق $p' = ((e'_i), (v'_j))$ المعرف بـ $e'_i = (v_{N+1-i}, v_{N-i})$ و $v'_j = v_{N-j}$ يحقق المطلوب.

بناء على هذه النتيجة يمكن تعريف علاقة الاتصال بين العقد.

تعريف (10): العقدتين المتصلتين

ليكن $G = (V, E)$ بياناً، ولتكن $v_1, v_2 \in V$ عقدتين منه. نقول عن العقدتين v_1, v_2 أنهما متصلتين إذا وفقط إذا وجد طريق p بدايته v_1 ونهايته v_2 أو كان $v_1 = v_2$.

يجب الأخذ بعين الاعتبار الحالة التي تكون فيها العقدة معزولة، أي أنها غير مجاورة لأي عقدة أخرى، وذلك لأنه من المستحيل تعريف طريق مكون من عقدة واحدة. ويظهر ذلك في اعتبارنا أن أي عقدة هي متصلة بنفسها.

نتيجة(2): الاتصال علاقة متعدية

ليكن $G = (V, E)$ بياناً، ولتكن $v_1, v_2, v_3 \in V$ عقداً منه. إذا كانت العقدتين v_1 و v_2 متصلتين وكانت العقدتين v_2 و v_3 متصلتين، عندئذ تكون العقدتين v_1 و v_3 متصلتين.

البرهان:

بحسب تعريف الاتصال، يوجد طريق من v_1 إلى v_2 وطريق من v_2 إلى v_3 . يمكن البرهان في بناء طريق مكون من الطريقين السابقين بدايته في v_1 ونهايته في v_3 . إن هذا البرهان تقني وهو موجود في الملحق 1.1.

تعريف(11): المركبات المتصلة

إن علاقة الاتصال هي علاقة انعكاسية (لأن كل عقدة متصلة بذاتها) ومتناظرة (لأن أي طريق في البيان غير الموجه يكون متناظراً) ومتعدية بحسب النتيجة السابقة. يسمح تعريف اتصال العقد بتعريف علاقة تكافؤ تقسم البيان إلى صفوف تكافؤ. نعرف المركبات المتصلة في بيان على أنها صفوف التكافؤ وفق علاقة الاتصال.

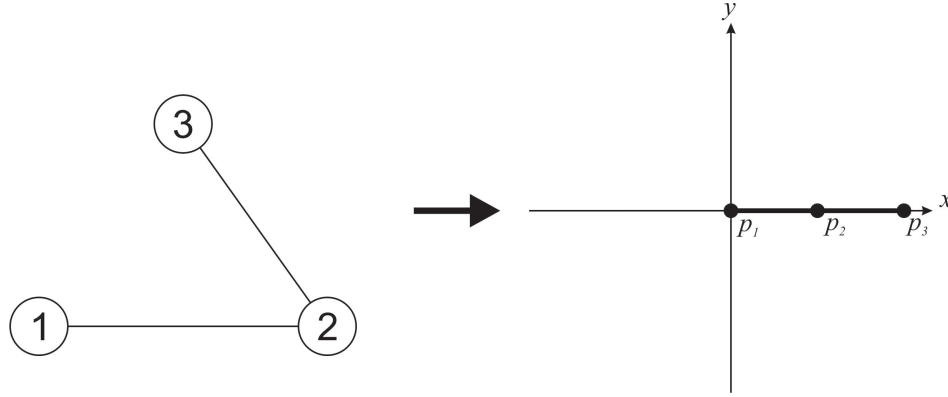
تعريف(12): البيان المتصل

نقول عن البيان G أنه متصل إذا وفقط إذا وجد طريق بين أي عقدتين منه.

أو بشكل مكافئ، إذا احتوى مركبة متصلة واحدة فقط. إن استعمال البيان الرياضي في دراسة أسراب الروبوتات يكون بشكل أساسي لتمثيل العلاقات بين الروبوتات وتمثيل التشكيل. يقصد بالطبولوجيا تعريف الروبوتات المجاورة لكل روبوت بهدف تبادل المعلومات والتعاون لملاحقة التشكيل. يعني ذلك أن تقارب الروبوتات في الموقع الفيزيائي ليس مقترناً بالتجاور ضمن طبولوجيا تبادل المعلومات، إذ يمكن أن يتجاور روبوتين في الموقع الفيزيائي دون أن يتبادلا المعلومات أو التأثير. إن اقتران التجاور في الطبولوجيا مع التجاور الفيزيائي يبسط الدراسة والعمل دون شك، ولكن يفرض قيوداً تحد من حرية عمل الخوارزمية. ضمن موضوع البحث يمكن الإلتفاف حول هذه القيود بفضل الخوارزمية المقترحة، ولكن يجب عملياً أن تبقى الروبوتات المتجاورة حسب طبولوجيا تبادل المعلومات متقاربة لكي تبقى ضمن مجال أجهزة التراسل.

2.2.3 تمثيل البيان في المستوي

الاستعمال الآخر للبيان الرياضي هو لتعريف التشكيل المراد ملاحظته. إذ يجب تمثيله رياضياً بصياغة يمكن التعامل معها حسابياً. سنستفيد من المسافات بين الروبوتات لتمثيل التشكيل كونها المقادير القابلة للقياس، وسيقوم كل روبوت بالتحرك بما يدفع المسافات بينه وبين الروبوتات المجاورة له وفق طبولوجيا التجاور إلى مسافات مرجعية يحددها التشكيل المختار وطبولوجيا التجاور المختارة. يمكن النظر إلى التشكيل المراد ملاحظته على أنه جسم صلب، وبحسب تعريف الجسم الصلب فإن المسافة بين أي نقطتين منه ثابتة. توضح التعاريف والمبرهنات التالية كيفية وصف التشكيل المراد ملاحظته بالاستفادة من البيان الرياضي. فيما يلي نرتب مجموعة عقد وحواف البيان، أي نستعيض عن مجموعة العقد بالجماعة $(v_i)_{i=1..n}$ ، و نستعيض عن مجموعة الحواف بالجماعة $(e_j)_{j=1..m}$.



الشكل 8.3: تمثيل للبيان في المستوي

تعريف (13): تمثيل البيان في المستوي

ليكن $G = ((v_i)_{i=1..n}, (e_j)_{j=1..m})$ بياناً، نسمي $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{C}^n$ حيث $p_i \neq p_j \Leftrightarrow i \neq j$ ، تمثيلاً للبيان G في المستوي.

يعبر p_i عن موضع العقدة v_i ضمن هذا التمثيل في المستوي. يمكن هنا تعريف تابع مساعد $p : V \rightarrow \mathbb{C} : v_i \rightarrow p_i$ هو تابع موضع العقدة. إن شرط عدم تساوي مركبتين من مركبات الشعاع p يضمن عدم تمثيل عقدتين بنقطة واحدة. يجب الانتباه إلى أننا نعامل مجموعة الأعداد العقدية على أنها فضاء شعاعي $\mathbb{C}[\mathbb{R}]$ بعده 2.

مثال (8):

ليكن $G = ((1, 2, 3), ((1, 2), (2, 3)))$ بياناً، عندئذ يكون $p = (0, 1, 2)$ تمثيلاً لـ G في المستوي.

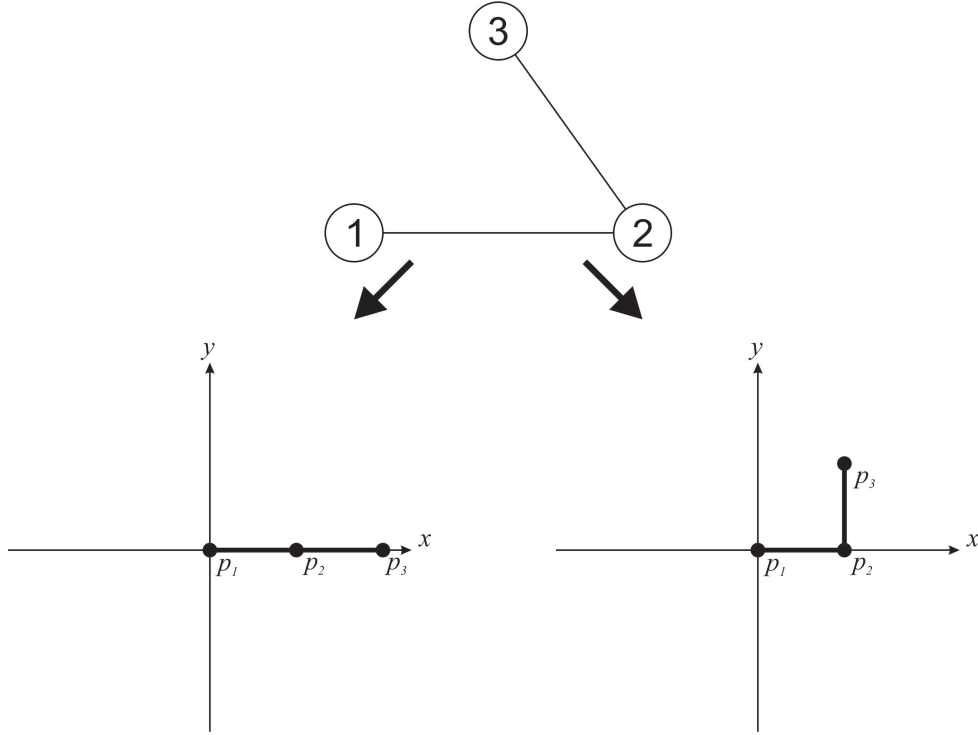
تعريف (14): المسافات الموافقة لتمثيل

ليكن $G = ((v_i)_{i=1..n}, (e_j)_{j=1..m})$ بياناً، وليكن p تمثيلاً لهذا البيان في المستوي، نعرف طول الحافة $e_i = d_i = d(e_i) = d(a, b) = |p(a) - p(b)|$ بالعدد (a, b) ونعرف شعاع المسافات الموافقة للتمثيل p بالشعاع $d = (d_1, \dots, d_m)$.

تعريف (15): تابع مسافات الحواف

ليكن $G = ((v_i)_{i=1..n}, (e_j)_{j=1..m})$ بياناً، نعرف تابع حواف البيان G على أنه التابع $f_G : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ الذي يربط كل شعاع تمثيل في المستوي p بشعاع المسافات d الموافقة لهذا التمثيل.

إن شرط عدم تمثيل عقدتين بنقطة واحدة يضمن أن تكون أطوال الحواف غير معدومة. إن موضوع البحث يتمحور حول الاعتماد على المسافات فقط في إدراك البيئة المحيطة وملاحقة التشكيل المرغوب. لذلك من الضروري دراسة العلاقة بين التمثيل في المستوي وأطوال الحواف لأن أطوال الحواف تمثل المعلومات المتاحة في حين يمثل التمثيل في المستوي المعلومات الواجب استنتاجها.



الشكل 9.3: تمثيلين متكافئين بالنسبة لبيان

تعريف (16): التمثيلين المتكافئين

ليكن $G = ((v_i)_{i=1..n}, (e_j)_{j=1..m})$ بياناً، وليكن f_G تابع الحواف الموافق لهذا البيان، وليكن p_1 و p_2 تمثيلين للبيان في المستوي. نقول عن التمثيلين p_1 و p_2 أنهما متكافئين بالنسبة للبيان G إذا وفقط إذا كان $f_G(p_1) = f_G(p_2)$.

مثال (9):

ليكن البيان $G = (\{1, 2, 3\}, \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\})$ ، وليكن $p = (0, 1, 2), p' = (0, 1, 1 + i)$ ، وعندئذ يكون هذان التمثيلان متكافئين.

تكافؤ تمثيلين بالنسبة لبيان مفهوم مهم، إذ لا يمكن لأي خوارزمية تعتمد على المسافات فقط أن تحدد بشكل قاطع أي منهما هو التمثيل الفعلي الموافق للمعلومات المتاحة. لأن المعلومات المتاحة لكل منهما متطابقة. لدراسة مسألة استنتاج التمثيل الفعلي انطلاقاً من معلومات المسافات نبدأ بدراسة الحالة الأبسط، وهي حالة توافر كل المعلومات الممكنة (أي توافر كافة المسافات الممكنة قياسها) لتجنب عدم التعيين في التمثيل الناتج عن نقص المعلومات. يكافئ ذلك دراسة الحالة التي يكون فيها البيان تاماً. لتوضيح ذلك يجب الاطلاع على خواص التتابع المحافظة على المسافات في \mathbb{C} .

تعريف(17): التحويل الهندسي والتحويل الهندسي الانعكاسي

نسمي تحويلاً هندسياً في \mathbb{C} أي تابع f معرف على \mathbb{C} من الشكل $f(z) = ze^{i\theta} + w$ ، ونسمي تحويلاً هندسياً انعكاسياً أي تابع f معرف على \mathbb{C} من الشكل $f(z) = \bar{z}e^{i\theta} + w$ ، حيث $\theta \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C}$.

تعريف(18): التابع المحافظ على المسافات

ليكن $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ تابعاً، نقول عن f أنه محافظ على المسافات إذا وفقط إذا تحقق $|f(z) - f(w)| = |z - w|$ $\forall z, w \in \mathbb{C}$.

مبرهنة(1):

ليكن $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ تابعاً، عندئذ يكون f محافظاً على المسافات إذا وفقط إذا كان تحويلاً هندسياً أو تحويلاً هندسياً انعكاسياً.

البرهان:

البرهان موجود في 2.1 .

تبين المبرهنة السابقة أن التحويلات الهندسية المتمثلة بالانسحابات والدورانات والانعكاسات هي التحويلات الوحيدة التي تحافظ على المسافات من أجل كافة نقاط المستوي.

مبرهنة(2):

ليكن K بياناً تاماً و f_K تابع الحواف الموافق له، وليكن $p, q \in \mathbb{C}^n$ تمثيلين للبيان K في المستوي. عندئذ يكون $f_K(p) = f_K(q)$ إذا وفقط إذا وجد تحويل هندسي أو تحويل هندسي انعكاسي f بحيث $f(p_i) = q_i$ من أجل $i = 1..n$.

البرهان:

البرهان موجود في Roth and Asimov (1978) .

تدل هذه المبرهنة على أنه حتى في حال توافر كافة المعلومات الممكنة عن أطوال الحواف، فإن مجموعة التمثيلات المكافئة لأي تمثيل p هي مجموعة غير منتهية. ومجموعة التمثيلات المكافئة هي التي تنتج عن التمثيل p بتحويل هندسي أو تحويل هندسي انعكاسي. بناء عليه يمكن تعريف البيان الصلب.

تعريف(19): البيان الصلب

ليكن $G = ((v_i)_{i=1..n}, (e_j)_{j=1..m})$ بياناً متصلاً، وليكن f_G تابع الحواف الموافق لهذا البيان، وليكن $K = ((v_i)_{i=1..n}, (k_i)_{i=1..n(n-1)/2})$ بياناً تاماً عقده مطابقة لعقد البيان G . نقول عن البيان G أنه صلب إذا وفقط إذا تحقق :

$$\forall p \in \mathbb{C}^n, \exists \varepsilon > 0 : f_G^{-1}(f_G(p)) \cap B(p, \varepsilon) = f_K^{-1}(f_K(p)) \cap B(p, \varepsilon) \quad (1.3)$$

حيث $B(p, \varepsilon)$ هي الكرة المفتوحة التي مركزها p ونصف قطرها ε .

ينص هذا التعريف على أنه من أجل كل تمثيل p للبيان الصلب، يوجد جوار لـ p متمثل بالكرة $B(p, \varepsilon)$ تكون التمثيلات المكافئة لـ p ضمنه هي فقط التمثيلات الناتجة عن تحويل هندسي لـ p . نلاحظ أن أي بيان مكون من أكثر من مركبة متصلة

هو غير صلب بالضرورة، إذا يمكن الحصول على تمثيل مكافئ لأي تمثيل في المستوى بإجراء تحويل هندسي غير تافه لأحد المركبات المتصلة.
خواص البيان الصلب: فيما يلي مجموعة من المبرهنات التي تعطي شروطاً على البيان لكي يكون صلباً.

تعريف(20): البيان الصلب أصغرياً

ليكن البيان $G = (V, E)$ بياناً صلباً، نقول عن البيان G أنه صلب أصغرياً إذا وفقط إذا كان البيان $G' = (V, E \setminus \{e\})$ غير صلب مهما تكن $e \in E$.

بصياغة أخرى، البيان الصلب أصغرياً هو البيان الذي يستفيد من كافة حوافه ليحقق صلابته، أي لا يمكن إزالة أي حافة دون خسارة الصلابة. تقدم المبرهنة التالية معياراً يسمح بالحكم على صلابة أي بيان.

مبرهنة(3):

ليكن $G = (V, E)$ بياناً، يكون البيان G صلباً إذا وفقط إذا وجدت $E' \subseteq E$ بحيث يكون البيان $G' = (V, E')$ صلباً أصغرياً.

البرهان:

البرهان بديهى إذ يكفي الأخذ بمساهمة البيان الصلب أصغرياً لتحقيق الصلابة. في الواقع فإن هذه المبرهنة نتيجة لمبرهنة Laman الموجودة في Laman (1970) .

. فيما يلي نقدم نص مبرهنة Laman، ولكن يجب أولاً أن نعرف مفهوم البيان المولد من عقد بيان آخر .

تعريف(21): البيان المولد من عقد بيان آخر

ليكن البيان $G = (V, E)$ نقول عن البيان $G' = (V', E')$ أنه بيان مولد من عقد G إذا وفقط إذا كان $V' \subseteq V$ و $E' = \{(a, b) \in E : a, b \in V'\}$.

باختصار، يتم توليد بيان من عقد بيان آخر باختيار مجموعة جزئية من العقد مع كافة الحواف التي أطرافها من ضمن هذه المجموعة الجزئية.

مبرهنة (4): مبرهنة Laman

ليكن البيان $G = ((v_i)_{i=1..n}, (e_j)_{j=1..m})$ حيث $m = 2n - 3$. يكون البيان G صلباً أصغرياً إذا وفقط إذا حقق أي بيان $G' = ((v'_i)_{i=1..n'}, (e'_j)_{j=1..m'})$ مولد من عقد G الشرط $m' \leq 2n' - 3$.

يمكن تفسير مبرهنة Laman عن طريق دراسة درجات الحرية للتمثيل في المستوي، فمن أجل أي بيان ذو n عقدة يجب اختيار n نقطة في المستوي. وبما أن كل نقطة في المستوي تتمتع بدرجة حرية، واحدة للمحور x وواحدة للمحور y ، وجب تعيين $2n$ متحولاً من أجل تعيين التمثيل. ولكن نعلم أنه يمكن تطبيق تحويل هندسي على أي تمثيل للحصول على تمثيل مكافئ، وبالتالي لا يمكن تعيين كافة أحداثيات النقاط المقابلة للعقد، إذ لا بد أن تبقى درجات حرية لا يمكن تعيينها تسمح بتطبيق التحويل الهندسي للحصول على تمثيل مكافئ. بالنظر إلى معادلة التحويل الهندسي يتضح وجود ثلاثة متحويلات تعرف التحويل، هي زاوية الدوران θ المقابلة لدرجة حرية واحدة، والانسحاب w المقابل لدرجات حرية. وبالتالي فإن التحويل الهندسي يقتضي وجود ثلاثة درجات حرية غير معينة في التمثيل. بناء على هذه المناقشة تنبأ Laman أن عدد الحواف الكافي لتشكيل بيان صلب هي $2n - 3$ على الأقل، واستنتج الشرط اللازم والكافي لكي تعطي هذه الحواف جملة من المعادلات المستقلة مجموعة حلولها تنتج عن تحويلات هندسية (أو تحويلات هندسية انعكاسية) بالنسبة لتمثيل فريد. يتمثل هذا الشرط بأن يكون أي بيان مولد من عقد البيان المدروس يحوي عدداً كافياً من الحواف. من الجدير بالذكر أنه لا يوجد مكافئ لمبرهنة Laman من أجل البيانات الممثلة في فضاءات ذات بعد أكبر من 2، علماً نقوم في هذا البحث بالتمثيل في الفضاء \mathbb{C} المعرف على الحقل \mathbb{R} . إن المبرهنة السابقة تعطي معياراً مباشراً يمكن استخدامه لاختبار فيما إذا كان أي بيان صلباً. تكمن المشكلة في الحاجة إلى اختبار كافة البيانات المولدة من عقد البيان المقصود، وذلك قد يكون صعباً في حال كان عدد عقد البيان كبيراً. قدم Henneberg خوارزمية تسمح ببناء مجموعة من البيانات الصلبة أصغرياً.

تعريف (22): بيانات Henneberg

لتكن H مجموعة كل بيانات Henneberg، عندئذ $K_1, K_2, K_3 \in H$ حيث K_1, K_2, K_3 هي البيانات التامة ذات العقدة والعقدتين والثلاث عقد. ليكن $G = (V, E) \in H \setminus \{K_1, K_2\}$ ، عندئذ يمكن إنشاء $G' \in H$ انطلاقاً من G بتطبيق واحدة من العمليتين التاليتين:

• لتكن $v_1, v_2 \in V$ بحيث $v_1 \neq v_2$ ، نخلق العقدة الجديدة $v' \notin V$ ونربطها بكل من v_1 و v_2 . عندئذ يكون $G' = (V \cup \{v'\}, E \cup \{(v', v_1), (v', v_2)\}) \in H$.

• لتكن $(a, b) \in E$ حافة ولتكن $v \in V$ عقدة بحيث $v \neq a, v \neq b$ ، نقم العقدة الجديدة $v' \notin V$ وسط الحافة (a, b) ونربطها بالعقدة v . عندئذ يكون $G' = (V \cup \{v'\}, (E \cup \{(v', a), (v', b), (v', v)\}) \setminus \{(a, b)\}) \in H$.

بحسب هذا التعريف يمكن توليد بيان Henneberg من أجل أي عدد من العقد بتطبيق عمليات مسموحة عدداً مناسباً من المرات. تعطي مبرهنة Henneberg التالية نتيجة مفيدة للغاية.

مبرهنة(5):

لتكن RM مجموعة كل البيانات الصلبة أصغرياً، عندئذ $RM = H$.

البرهان:

موجود في المرجع [al. et Haas \(2003\)](#).

تعني المبرهنة السابقة أن مجموعة البيانات الصلبة أصغرياً هي فقط مجموعة البيانات التي يمكن توليدها باستخدام خوارزمية Henneberg. وبالتالي يمكن الحكم على بيان أنه صلب أصغرياً إذا أمكن توليده باستخدام خوارزمية Henneberg. تقوم الخوارزمية المقترحة في هذا البحث بضمان تحقيق التشكيل عن طريق قيام كل روبوت بتحقيق المسافات المطلوبة إلى جيرانه. ولكن كما يتضح فإن تحقيق المسافات كافة في البيان الصلب لا يضمن تحقيق تشكيل محدد، وإنما يجب تعريف مفهوم البيان الصلب بالمطلق وهو ما يضمن تحقيق التشكيل بعد تحقيق المسافات بين الروبوتات.

تعريف(23): البيان الصلب بالمطلق

نقول عن البيان $G = ((v_i)_{i=1..n}, (e_j)_{j=1..m})$ أنه بيان صلب بالمطلق إذا وفقط إذا وُجد تحويل هندسي أو تحويل هندسي انعكاسي f من أجل أي تمثيلين متكافئين $p = (p_1, \dots, p_n)$ و $q = (q_1, \dots, q_n)$ بحيث $i = 1..n : f(p_i) = q_i$

باختصار يمكن القول بأن التمثيلات المتكافئة للبيان الصلب بالمطلق ترتبط ببعضها بتحويل هندسي أو تحويل هندسي انعكاسي. من البديهي أن أي بيان صلب بالمطلق هو بيان صلب. تقدم المبرهنة التالية شروطاً تسمح بالتعرف على البيان الصلب بالمطلق.

مبرهنة(6):

ليكن البيان $G = ((v_i)_{i=1..n}, (e_j)_{j=1..m})$ عندئذ يكون G صلباً بالمطلق إذا وفقط إذا كان G بياناً تاماً بأربع عقد أو أقل، أو تحقق الشرطين التاليين:

1. مهما تكن العقدة v توجد على الأقل ثلاثة عقد مختلفة مجاورة لـ v .
2. مهما تكن العقدة v فإن البيان المولد من G بمجموعة العقد $V \setminus \{v\}$ هو بيان صلب.

البرهان:

موجود في [Jordan and Jackson \(2005\)](#).

نقدم في هذا البحث خوارزمية تسمح بتعيين موضع أي روبوت بالنسبة لثلاثة من جيرانه. تقوم هذه الخوارزمية على قياس المسافات إلى الجيران، إضافة للتخاطب معهم للحصول على المسافات فيما بينهم. ثم تقوم الخوارزمية بتعيين تمثيل في المستوي للروبوت وجيرانه الثلاثة يحقق المسافات المرصودة فيما بينهم. إن الشرط اللازم لكي تكون الخوارزمية المقترحة قابلة للتطبيق يكمن في طوبولوجيا تبادل المعلومات الممثلة ببيان. يقتضي الشرط أن يتجاوز أي اثنين من الجيران الثلاثة، وهو المكافئ لأن يكون البيان المولد بالروبوت وجيرانه الثلاثة بياناً تاماً. فيما يلي نقدم خوارزمية بسيطة تسمح بتوليد بيان يحقق هذا الشرط من أجل كل عقده. للتبسيط، نسمي البيان التام بأربع عقد بياناً رباعي الأوجه. ونعرف فيما يلي البيان المكوّن من رباعيات أوجه، وهو البيان الذي يسمح بتطبيق الخوارزمية المقترحة من أجل أي روبوت.

تعريف(24): البيان المكوّن من رباعيات الوجوه

ليكن البيان $G = (V, E)$ ، نقول عن البيان G أنه بيان مكوّن من رباعيات أوجه إذا فقط إذا كان من أجل أي عقدة $v \in V$ ، توجد ثلاث عقد $v_1, v_2, v_3 \in V$ بحيث يكون البيان المولد بالعقد $\{v, v_1, v_2, v_3\}$ من البيان G بياناً تاماً بأربع عقد.

لكي تكون طوبولوجيا التجاور صالحة لعمل الخوارزمية، يجب أن تكون بياناً صلباً بالمطلق مكوّناً من رباعيات الأوجه. نقدّم خوارزمية لتوليد بيانات صلبة بالمطلق مكوّنة من رباعيات الأوجه في المبرهنة التالية.

مبرهنة(7): خوارزمية توليد بيانات رباعية الأوجه وصلبة بالمطلق

لتكن T مجموعة البيانات المكوّنة من رباعيات الأوجه والصلبة بالمطلق. عندئذ $K_4 \in T$ حيث K_4 هو البيان رباعي الأوجه (أو البيان التام بأربع عقد). ليكن $G = (V, E) \in T$ بياناً مكوّناً من رباعيات الأوجه، عندئذ يمكن إنشاء $G' = (V', E') \in T$ انطلاقاً من G باختيار ثلاثة عقد متجاورة فيما بينها v_1, v_2, v_3 بحيث $(v_i, v_j) \in E' : \forall i, j \in \{1, 2, 3\}$ ، وإضافة العقدة v وربطها بالعقد المختارة. عندئذ يكون $G' = (V \cup \{v\}, E \cup \{(v, v_1), (v, v_2), (v, v_3)\})$ بياناً مكوّناً من رباعيات الأوجه.

البرهان:

من الواضح حسب تعريف البيان المكوّن من رباعيات الأوجه أنه مهما تكن $u \in V$ فإنه توجد ثلاثة عقد $u_1, u_2, u_3 \in V$ بحيث يكون البيان المولد من العقد u, u_1, u_2, u_3 بياناً تاماً.

يكفي عندها برهان وجود ثلاثة عقد تولد مع العقدة الجديدة v بياناً تاماً، وهذه العقد هي العقد المختارة v_1, v_2, v_3 . أي يكفي أن يكون $(v, v_1), (v, v_2), (v, v_3), (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3) \in E'$ ، وهذا واضح من الفرض على اختيار العقد الثلاثة ومن تعريف E' ، وبالتالي البيان المولد هو بيان مكوّن من رباعيات الأوجه.

لبرهان أن البيان G' صلب بالمطلق، نبرهن أنه توجد ثلاثة عقد على الأقل مجاورة لأي عقدة فيه وأن إزالة أي عقدة منه تولّد بياناً صلباً.

لتكن العقدة $u \in V' = V \cup \{v\}$ عندئذ إما $u \in V$ وبالتالي توجد ثلاثة عقد مجاورة لها وذلك بحسب تعريف G ، أو $u = v$ وعندها تكون العقد v_1, v_2, v_3 مجاورة لها، وبذلك يتحقق أول شرط. لتكن مجدداً العقدة $u \in V' = V \cup \{v\}$ ولنبرهن أن البيان G'' المولد من البيان G' بمجموعة العقد $V' \setminus \{u\}$ هو بيان صلب. توجد ثلاثة حالات:

$$1. u = v$$

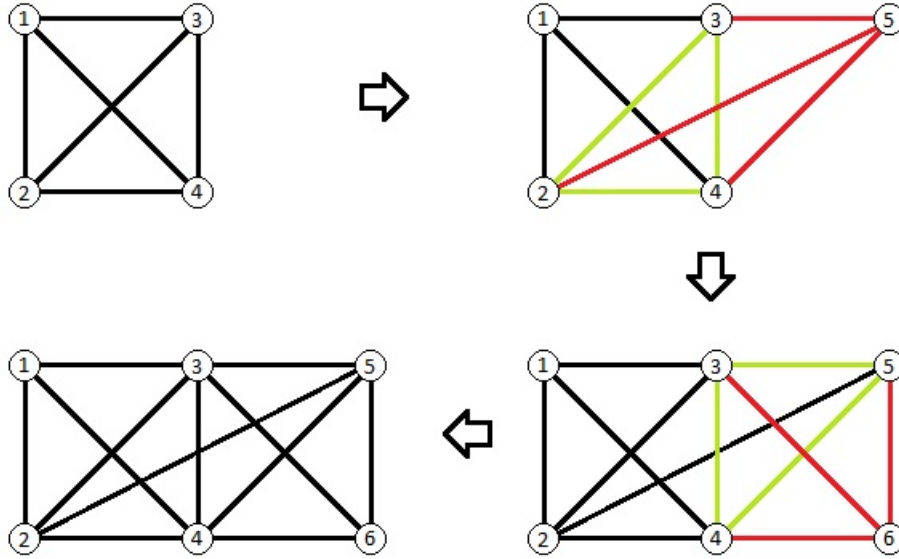
عندئذ: يكون البيان G'' المولد من G' بمجموعة العقد $V' \setminus \{u\} = V$ هو ذاته البيان G ، وهو بيان صلب.

$$2. u \in \{v_1, v_2, v_3\}$$

لنفترض دون خسارة في العمومية أن $u = v_1$ ، عندئذ يكون البيان $(\hat{V}, \hat{E}) = \hat{G}$ المولد من البيان G بمجموعة العقد $\hat{V} = V \setminus \{v_1\}$ بيان صلب لأن G صلب بالمطلق. نطبق إحدى العمليات المسموحة في توليد بيانات Henneberg، إذ نقوم بإضافة العقدة v وربطها بالعقدتين v_2, v_3 عندئذ يكون البيان $G'' = (\hat{V} \cup \{v\}, \hat{E} \cup \{(v, v_2), (v, v_3)\})$ بياناً صلباً.

بالمثل، يمكن برهان أن البيان G'' هو بيان صلب عندما $u = v_2$ و $u = v_3$.

$$3. u \in V \setminus \{v, v_1, v_2, v_3\}$$



الشكل 10.3: توليد بيان مكون من رباعيات الوجوه وصلب بالمطلق،

عندئذ يكون البيان $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ المولد من البيان G بمجموعة العقد $V \setminus \{u\}$ بياناً صلباً لأن G صلب بالمطلق. نقوم بتطبيق إحدى عمليات بناء بيانات Henberg، وهي عملية إضافة العقدة v وربطها بالعقدتين v_1, v_2 . عندئذ يكون البيان $(\hat{V} \cup \{v\}, \hat{E} \cup \{(v, v_1), (v, v_2)\})$ صلباً. وبدوره يكون البيان $(\hat{V} \cup \{v\}, \hat{E} \cup \{(v, v_1), (v, v_2), (v, v_3)\})$ صلباً. وبذلك نكون قد برهننا أن G' صلب بالمطلق ومكون من رباعيات وجوه.

في 10.3 مثال على توليد بيان مكون من رباعيات أوجه بـ 6 عقد. حيث تمثل الحواف الحمراء حوافاً جديدة، وترتبط الحواف الخضراء بين العقد الثلاثة المختارة في كل خطوة.

3.3 خوارزمية رصد الجوار

ليكن لدينا $N + 1$ روبوت مرقمة من 0 إلى N وموزعة في المستوي توزيعاً ملائماً يمثلها بالمجموعة $R = \{r_k, k \in \mathbb{N}_N\}$. نسمي الروبوت المركزي r_0 . سنقوم بتكوين جوار هذا الروبوت بناء على قياسات المسافات فقط بين الروبوتات. ولأجل ذلك نفترض أن الروبوتات $r_k : k \neq 0$ جيران للروبوت المركزي وبالتالي يمكنه قياس المسافات إلي أي منها. نأخذ جملة إحداثيات مطلقة ذات محاور ثابتة ولتكن R_G ، ونأخذ جملة مرجعية R_0 مرتبطة بالروبوت المركزي ونرفق بها جملة إحداثيات متعامدة نظامية مركزها موقع الروبوت المركزي. نعبر عن موقع الروبوت r_j بالنقطة P_j ونعبر عن موقعها بالنسبة لجملة المقارنة R_0 بالشعاع $\mathbf{P}_j = (x_j, y_j)^T$. ويمكن التعبير عن موقعها بالعدد العقدي $p_j = |p_j| e^{i\theta}$. إن هذا التمثيل بالأعداد العقدية يبسط الحسابات المتعلقة بالدوران والانعكاس والمسافات، ويمكن ببساطة صياغة التمثيل الشعاعي المكافئ باستخدام مصفوفات الدوران والانعكاس المناسبة. بما أن الخوارزمية تعطي درجة حرية إضافية للدوران فيمكن دون خسارة في العمومية اختيار جملة المحاور بحيث يمر الجزء الموجب من المحور x من P_1 أي أن $x_1 \in \mathbb{R}_+^*$. ويمكن أيضاً اختيار

اتجاه المحور y بحيث يكون P_2 في نصف المستوي $U = \{(x, y) : y > 0\}$ أي $y_2 \in \mathbb{R}_+^*$ ، وذلك بفرض أن التوزيع في المستوي ملائم، أي أن الروبوتات r_0 ، r_1 و r_2 لا تقع على استقامة واحدة. يمكن حساب مواقع الروبوتات بعد تطبيق دوران بزواوية قدرها $\phi \in \mathbb{R}$ باستخدام التابع:

$$f_\phi(z) = ze^{i\phi}$$

وعليه يكون موقع الروبوت r_j بعد الدوران:

$$p'_j = f_\phi(p_j) = p_j e^{i\phi}$$

ويمكن حساب مواقع الروبوتات بعد تطبيق انعكاس حول محور مار من المبدأ ويصنع زاوية قدرها $\psi \in [0, \pi]$ مع المحور x بالتابع:

$$g_\psi(z) = \bar{z}e^{i2\psi}$$

ومنه موقع الروبوت r_j بعد الانعكاس:

$$p''_j = g_\psi(p_j) = \bar{p}_j e^{i2\psi}$$

نعرف $d_{j,k} = |p_j - p_k|$ المسافة بين موقعي الروبوتين r_j و r_k ، نجد بسهولة أن الدوران والانعكاس يحافظ على المسافات لأن:

$$\begin{aligned} d'_{j,k} &= |p'_j - p'_k| = |p_j e^{i\phi} - p_k e^{i\phi}| = |p_j - p_k| |e^{i\phi}| = |p_j - p_k| = d_{j,k} \\ d''_{j,k} &= |p''_j - p''_k| = |\bar{p}_j e^{i2\psi} - \bar{p}_k e^{i2\psi}| = |\overline{p_j - p_k}| |e^{i2\psi}| = |p_j - p_k| = d_{j,k} \end{aligned}$$

نستفيد من الخواص الهندسية للمثلثات لبناء جوار الروبوت المركزي. نبدأ بدراسة الحالات البسيطة من أجل $N = 2, 3$ ثم نستنتج شروطاً للتعميم من أجل قيم أكبر لـ N .

1.3.3 حالة $N = 2$

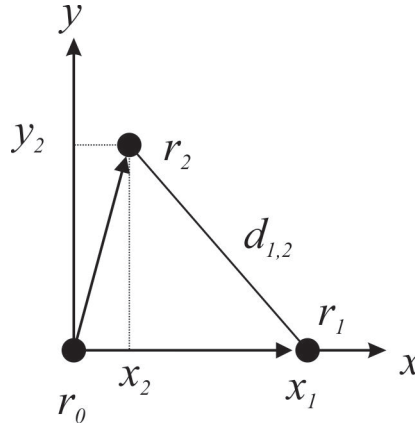
أي أنه توجد ثلاثة روبوتات، الروبوت المركزي واثنين من جيرانه هما r_1 و r_2 . بما أن التوزيع ملائم فإن الروبوتات ليست على استقامة واحدة. وبالتالي هي تشكل مثلثاً في المستوي. نعرف $d_j = |p_0 - p_j|$ المسافة عن الروبوت المركزي وبما أن الروبوتات r_1 و r_2 جيران للروبوت المركزي فيمكن قياس d_1 و d_2 . لكي يتمكن الروبوت المركزي من رصد الجوار يجب أن يحصل على المسافة $d_{1,2}$ وذلك يقتضي تجاور r_1 و r_2 . يقوم كل من الجارين بقياس المسافة إلى جيرانه ويمكن أن يقدم هذه المعلومات للروبوت المركزي بالتخاطب معه، وعندها يحصل الروبوت المركزي على المسافة $d_{1,2}$ من أحد الجارين أو يمكن أخذ متوسط حسابي للقراءتين في حال حصل عليها من الجارين معاً.

يمكن الآن معرفة كل ما يتعلق بالمثلث المكوّن من الروبوتات الثلاثة بعد معرفة أطوال أضلعه، ويمكن باستخدام اصطلاح اختيار المحاور تحديد مواضع الروبوتات الثلاثة

$$p_0 = 0$$

$$p_1 = x_1 = |x_1| = |x_1 - 0| = |p_1 - p_0| = d_1$$

لحساب p_2 نقوم بحل المعادلتين التاليتين:

الشكل 11.3: رصد الجوار في حالة $N = 2$

$$d_2^2 = |x_2 + iy_2|^2 = x_2^2 + y_2^2$$

$$d_{2,1}^2 = |x_2 - x_1 + iy_2|^2 = (x_2 - x_1)^2 + y_2^2 = x_2^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + y_2^2$$

عن طريق:

$$d_2^2 - d_{2,1}^2 = x_2^2 + y_2^2 - x_2^2 - x_1^2 + 2x_1x_2 - y_2^2 = 2x_1x_2 - x_1^2$$

$$x_2 = \frac{d_2^2 - d_{2,1}^2 + x_1^2}{2x_1}$$

$$y_2 = \sqrt{|x_2^2 - d_2^2|}$$

وذلك باستخدام الشرط $y_2 > 0$.

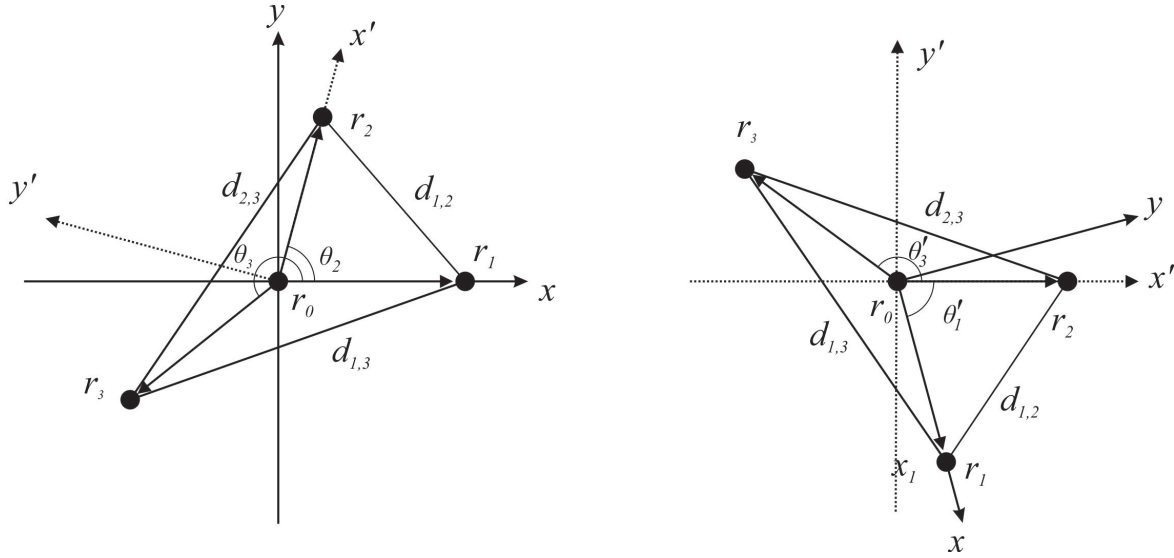
2.3.3 حالة $N = 3$

ولنبني الجوار بإضافة روبوت رابع r_3 إلى المجموعة في الحالة السابقة، يمكن تحديد موضعي الروبوتين r_1 و r_2 بالطريقة ذاتها في الحالة السابقة وذلك بفرض r_1 و r_2 متجاوران. في هذه الحالة يمكن للروبوت المركزي قياس المسافة d_3 وبالتالي نحصل على المعادلة:

$$d_3^2 = x_3^2 + y_3^2$$

لإيجاد موضع الروبوت الثالث نحتاج لمعادلة ثانية نحصل عليها بافتراض تجاور r_2 و r_3 . ويمكن للروبوت المركزي الحصول على المسافة $d_{2,3}$ بالتخاطب مع الجيران.

$$d_{2,3}^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2$$

الشكل 12.3: رصد الجوار في حالة $N = 3$ ،

حل هتين المعادلتين بصيغتهما الحالية معقد ويتطلب مناقشة عدة حالات، ولكن من الأسهل تطبيق دوران على التوزيع ثم حل المسألة $N = 2$ مع الروبوتين r_2 و r_3 ثم تطبيق دوران معاكس. ليكن $p_2 = d_2 e^{i\theta_2}$ موقع الروبوت r_2 حيث $\theta_2 = \arctan 2(x_2, y_2) \in [0, 2\pi[$ نحصل على مواقع الروبوتات بعد الدوران باستخدام التابع $f_{-\theta_2}$:

$$\begin{aligned} p'_0 &= 0 \\ p'_1 &= d_1 e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = d_1 e^{i\theta'_1} \\ p'_2 &= d_2 \end{aligned}$$

ثم نقوم بحل المسألة من أجل $N = 2$ مع الروبوتين r_2 و r_3 فنحصل على:

$$\begin{aligned} x'_3 &= \frac{d_3^2 - d_{3,2}^2 + d_2^2}{2d_2} \\ y'_3 &= \pm \sqrt{|x'_3|^2 - d_3^2} \end{aligned}$$

ومنه

$$p'_3 = d_3 e^{\pm i\theta'_3}$$

أو

$$p_3 = d_3 e^{i(\theta_2 \pm \theta'_3)}$$

نلاحظ وجود عدم تعيين في حساب موقع الروبوت الرابع، لذلك ينبغي الحصول على معلومة إضافية تسمح بالحل. ضمن هذه الحالة المبسطة المعلومة الوحيدة التي يمكن الحصول عليها هي المسافة $d_{3,1}$ ، وبذلك يكون الروبوت المركزي قد حصل على كل المعلومات المتاحة. وجود هذه المسافة يقتضي تجاور r_1 و r_3 ، لذلك يجب أن نفترض تجاورهما. يمكن الآن حل عدم التعيين بالتجريب بحساب المقدار:

$$\widehat{d_{3,1}} = \left| d_3 e^{i(\theta_2 + \theta'_3)} - d_1 \right|$$

وبالمقارنة مع القيمة المقاسة لـ $d_{3,1}$ يمكن الحكم على موقع الروبوت الرابع. إن هذه الحالة مميزة إذ تشكل الروبوتات بياناً تاماً (أي روبوتين منه متجاوران)، أي أنها الحالة التي تكون فيها كافة المعلومات المتاحة لازمة وكافية لرصد الجوار. في الحالات الأعد قد تتاح معلومات للروبوت المركزي غير ذات فائدة في رصد الجوار، وهو ما يعقد عملية الرصد أو يجعلها غير ممكنة أساساً.

3.3.3 حالة $N > 3$

في هذه الحالة نأخذ بجميع الافتراضات السابقة المتعلقة بالروبوتين r_1 و r_2 . أما باقي الروبوتات $k > 2$: فيكفي افتراض تجاور كل روبوتين r_k, r_{k-1} من أجل $k > 2$. إن المعلومات المتاحة تسمح بحساب موقع r_3 مع عدم تعيين في الزاوية كما وجدنا في الحالة السابقة. وهكذا نحصل على مواقع جميع الروبوتات مع عدم تعيين في الزاوية بالشكل التالي:

$$p_k = d_k e^{i\theta_k} : k > 2$$

$$\theta_k = \sum_{j=2}^k s_j \delta_j : s_j \in \{-1, 1\}$$

$$\delta_j = \arctan 2(x'_j, y'_j) : j > 2$$

$$x'_j = \frac{d_j^2 - d_{j,j-1}^2 + d_{j-1}^2}{2d_{j-1}}$$

$$y'_j = \sqrt{|x_j'^2 - d_j^2|}$$

نلاحظ أن $\delta_j \in [0, \pi]$ ، بصياغة المعادلات بهذا الشكل ننقل عدم التعيين من إشارة y_j إلى عدم تعيين في θ_k . لحل عدم التعيين نعمل إلى إضافة شرط تجاور جديد كما في الحالات السابقة وهو شرط تجاور r_N مع r_1 . وهو ما يسمح بحساب θ_1 بإجراء دوران بزاوية $-\theta_N$ ثم حساب الموضع ثم إجراء دوران عكسي:

$$\theta_1 = \sum_{j=2}^N s_j \delta_j + s_1 \delta_1$$

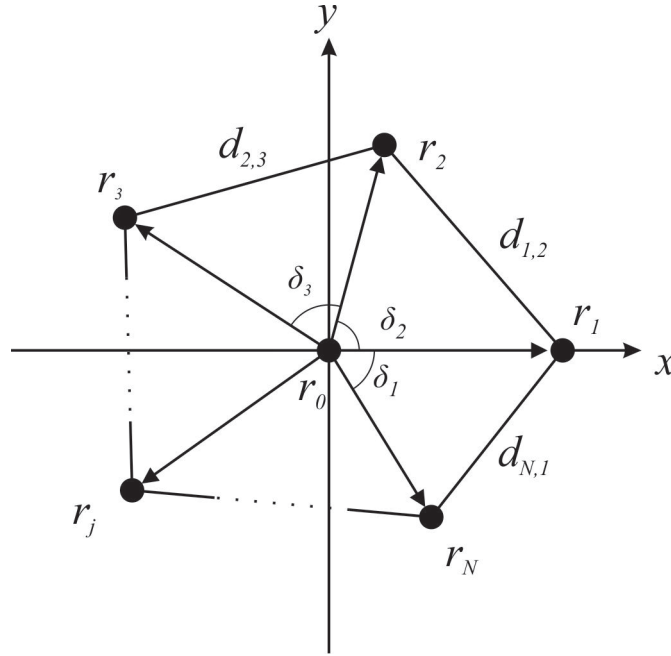
$$\delta_1 = \arctan 2(x'_1, y'_1)$$

$$x'_1 = \frac{d_1^2 - d_{1,N}^2 + d_N^2}{2d_N}$$

$$y'_1 = \sqrt{|x_1'^2 - d_1^2|}$$

ونكتب موضع r_1 بالشكل $p_1 = d_1 e^{i\theta_1}$. ولكن نعلم أن $p_1 = x_1 = d_1$ بحسب اختيارنا لجملة المحاور ومنه:

$$\sum_{j=1}^N s_j \delta_j = 2\pi n : n \in \mathbb{Z}$$

الشكل 13.3: رصد الجوار في حالة $N > 3$

تؤول المسألة إلى إيجاد $s_j \in \{-1, 1\} : j = 1..N$ بحيث يوجد $n \in \mathbb{Z}$ تحقق العلاقة السابقة. طبعاً في حال وجدت الأعداد s_j يمكن الحصول على مجموعة أعداد أخرى $s'_j = -s_j$ تحقق العلاقة السابقة أيضاً. نختار من هذين الحلين الحل الموافق لـ $s_2 = 1$ وهو المكافئ للشرط $y_2 > 0$. إن مسألة إيجاد الأعداد $s_j : j = 1..N$ هي مسألة NP-Hard. ومعنى ذلك أنها مسألة صعبة و أن حلها حسابياً ذو تعقيد أسّي على الأقل بالنسبة لـ N والإثبات موجود في الملحق 3.1. يمكن الاستغناء عن المجهول n بإجراء الحسابات في الزمرة \oplus المعرفة على المجموعة $[0, 2\pi[$ بالشكل التالي:

$$a, b \in [0, 2\pi[$$

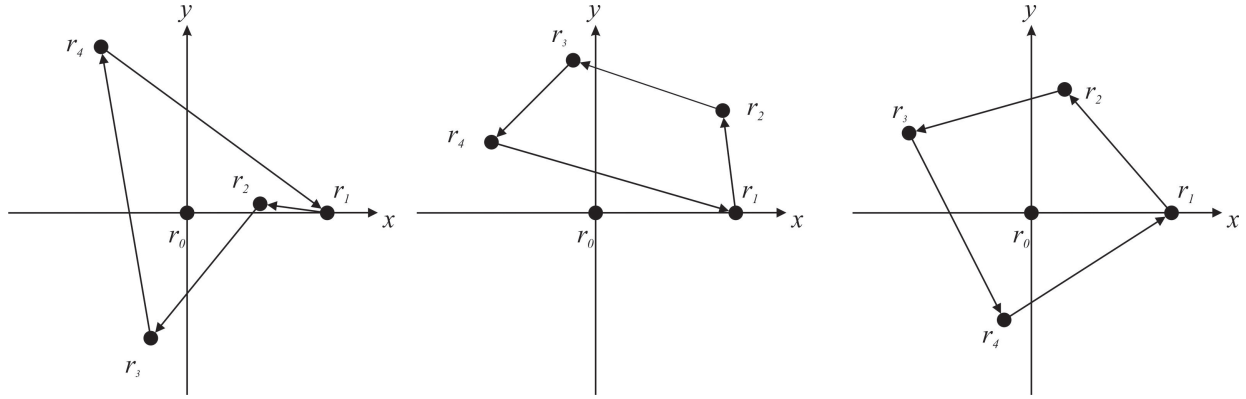
$$a \oplus b = a + b \bmod 2\pi$$

أو بصياغة أخرى:

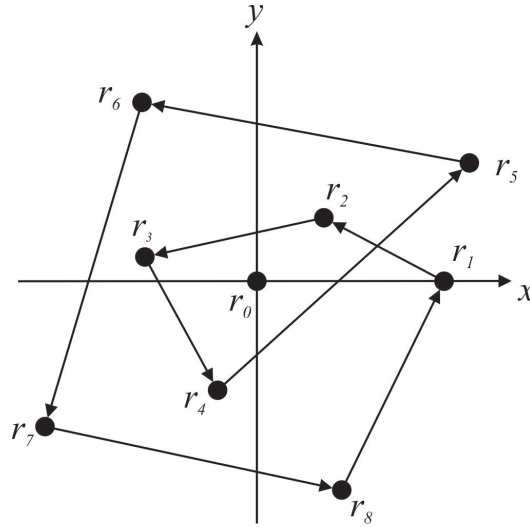
$$a, b \in [0, 2\pi[$$

$$a \oplus b = a + b - 2\pi \cdot \left\lfloor \frac{a + b}{2\pi} \right\rfloor$$

حيث يعبر الرمز $\lfloor \cdot \rfloor$ عن تابع الجزء الصحيح.



الشكل 14.3: حالة $N = 4$ مع ثلاثة قيم مختلفة لـ n ، إلى اليمين $n = 1$ ، وفي الوسط $n = 0$ ، وإلى اليسار $n = -1$.



الشكل 15.3: حالة $n = 2$

إن العدد n يحمل معنىً فيزيائياً. في حال قمنا برسم طبولوجيا التجاور على المستوي ثنائي البعد ومثلناها ببيان عقده هي الروبوتات وحوافه هي علاقات التجاور وتأمّلنا علاقات التجاور بين الروبوتات المجاورة للروبوت المركزي فسندج أنها تشكل حلقة تنطلق من الروبوت r_1 وتمر بالترتيب من r_2 إلى الروبوت r_N ثم تعود إلى الروبوت r_1 . إن العدد n يعبر عن عدد مرات دوران الحلقة حول الروبوت المركزي مع الأخذ بعين الاعتبار اتجاه الدوران. إن القيم المقبولة لـ n هي 0 ، 1 و -1 . حيث يعبر $n = 0$ عن الحالة التي يكون فيها الروبوت المركزي خارج الحلقة المكونة من جيرانه، وهذه الحالة هي الحالة المطلوبة في الروبوتات الواقعة على أطراف التشكيل. تعبر حالة $n = 1$ عن وجود الروبوت المركزي داخل الحلقة وهي الحالة المرغوبة في بعض الروبوتات داخل التشكيل. أما حالة $n = -1$ فهي حالة مرغوبة في بعض الروبوتات داخل التشكيل وتنتج عن توزيعات معينة. تعبر القيم الأخرى عن توزيع غير مناسب للروبوتات المجاورة للروبوت المركزي حوله. وذلك لأنها تقتضي بالضرورة وجود تقاطع في الحلقة إضافة إلى أنها تزيد من احتمال إيجاد أكثر من حل للأعداد s_j ، وهو ما يتطلب مناقشة حالات أكثر للتوصل إلى الحل الصحيح وقد يتعذر في بعض الحالات استنتاج الحل الصحيح أصلاً.

ينبغي تفادي الحالات غير القياسية باختيار طبولوجيا تجاور ملائمة بحيث يوجد لكل روبوت حلقة تمر من بعض من جيرانه

طولها 3 وذلك لأن:

$$-2\pi \leq s_1\delta_1 + \delta_2 + s_3\delta_3 \leq 3\pi$$

وهذا كاف لتكوين جوار كل روبوت بالنسبة للروبوتات المشكلة للحلقة ويضمن $n \in \{-1, 0, 1\}$. اعتباراً من هذه النقطة سنفترض أن الحالة القياسية هي وجود حلقة طولها 3 وسنعتبر الحالات التي من أجلها $N > 3$ حالات غير قياسية نناقشها بشكل منفصل.

4.3 الحالات الشاذة عندما $N = 2$

بما أن مسألة إيجاد الأعداد s_j هي مسألة NP-Hard فأبسط طريقة لإيجاد الحل في الحالة القياسية يمكن في توليد جميع الحلول الممكنة وتجريبها، وهو ما يسمى بالحل بالتجريب. إن الحل بالتجريب مقبول عملياً خصوصاً وأن عدد الحلول الممكنة في الحالة القياسية $2^2 = 4$ وهو عدد صغير. أثناء الحل بالتجريب تنتج واحدة من الحالات الثلاثة التالية:

- نتج عن الحل بالتجريب وجود حل وحيد يحقق $s_2 = 1$. في هذه الحالة نعتمد الحل على أنه حل صحيح ويمكن عندها تكوين جوار الروبوت المركزي دون مشاكل.
- نتج عن الحل بالتجريب وجود أكثر من حل يحقق $s_2 = 1$.
- لم ينتج عن الحل بالتجريب وجود أي حل.

في حالة عدم وجود الحل نستطيع أن نجزم بأن السبب هو خطأ في القياس، وذلك لأن المعطيات تعبر بالضرورة عن حالة فيزيائية محققة. في هذه الحالة يمكن تحديد مصدر المشكلة بمعاينة القراءات في الخطوة الحالية ومقارنتها مع المعطيات في الخطوة السابقة ثم إجراء تحليل إحصائي لها. نقصد بالتحليل الإحصائي حساب التغيرات المطلقة والنسبية الطارئة على كل من القراءات ثم حساب المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذه التغيرات. يمكن بعد ذلك حساب الأرجحية لكل من هذه التغيرات ورفض القراءات ذات الأرجحية الأقل والاستعاضة عنها بقراءة مقدره وفق تابع تقدير معين. من المرجح أن يكون خطأ بالتصدي للحالة العابرة التي تسببت بالخطأ ريثما تزول ومتابعة عمل الخوارزمية بشكل قياسي. في حال وجد أكثر من حل نناقش الحالات التالية:

1. يوجد حلين مختلفين s_j, s'_j ، يوجد عندها $n, m \in \{-1, 0, 1\}$ بحيث:

$$\delta_2 + s_3\delta_3 + s_1\delta_1 = 2\pi n$$

$$\delta_2 + s'_3\delta_3 + s'_1\delta_1 = 2\pi m$$

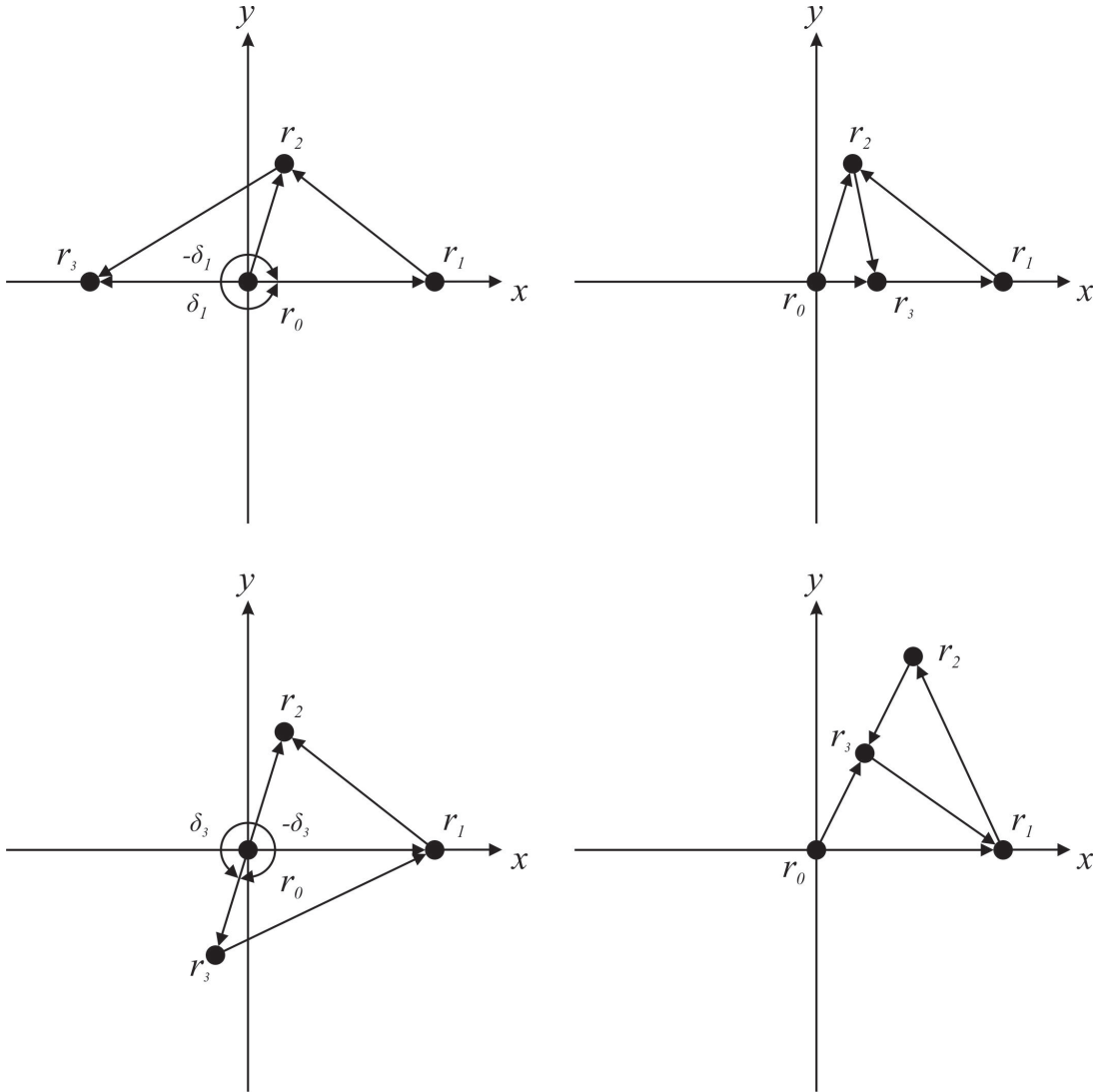
وفي هذه الحالة توجد حالتان:

(I) الحالة الأولى:

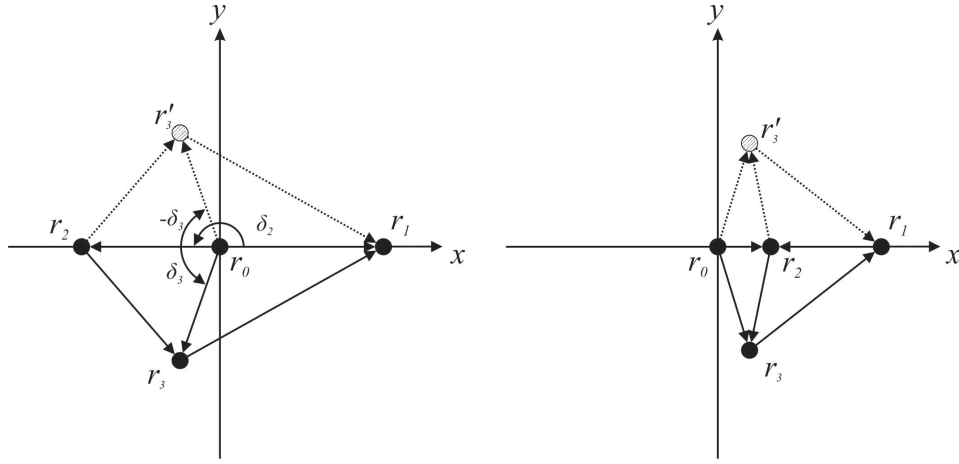
$$\exists! q \in \{1, 3\} : \forall j \in \{1, 3\} j = q \Leftrightarrow s_j \neq s'_j$$

أي يختلف الحلان في s_q ويتطابقان في باقي الحدود. وفي هذه الحالة بطرح المعادلتين نجد أن:

$$s_q\delta_q = \pi(n - m)$$



الشكل 16.3: في الأعلى حالتين لاصطفاف الروبوتات r_0 و r_1 و r_3 على استقامة واحدة. وفي الأسفل حالتين لاصطفاف الروبوتات r_0 و r_2 و r_3 على استقامة واحدة.

الشكل 17.3: حالتين لاصطفاف الروبوتات r_0 و r_1 و r_2 على استقامة واحدة

ومنه :

$$\delta_q \in \{0, \pi\}$$

وهي تعبر عن اصطفاف الروبوتات r_0 ، r_1 و r_3 على استقامة واحدة وذلك في حالة $q = 1$ ، أما في حالة $q = 3$ فهي تعبر عن اصطفاف الروبوتات r_0 ، r_2 و r_3 على استقامة واحدة. حسابياً نجد أن قيم θ_j هي ذاتها في الحليْن لأن $e^{i(\theta+\pi)} = e^{i(\theta-\pi)}$. $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

(ب) الحالة الثانية:

$$\forall j \in \{1, 3\} : s_j \neq s'_j$$

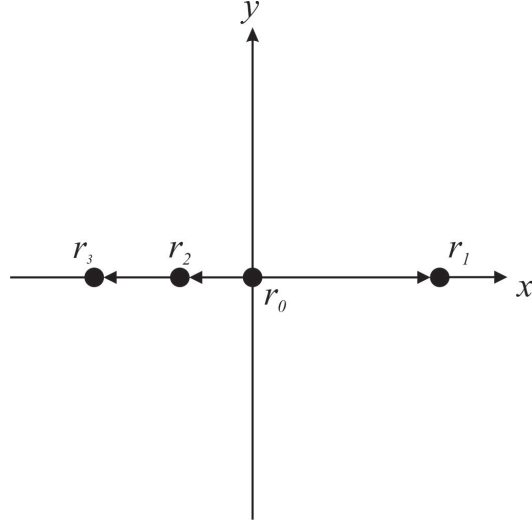
أي أن الحلّان ينطبقان في s_2 ويختلفان في باقي الحدود. وفي هذه الحالة بجمع المعادلتين السابقتين نجد:

$$\delta_2 \in \{0, \pi\}$$

وهي تعبر عن اصطفاف الروبوتات r_0 ، r_1 و r_2 على استقامة واحدة. في هذه الحالة يكون: $p_1 = d_1$ و $p_2 = d_2 e^{i\delta_2}$ و $p_3 = d_3 e^{i(\delta_2 + s_3 \delta_3)}$. بملاحظة أن $e^{i\delta_2} \in \mathbb{R}$ فإن s_3 هي من يحدد إشارة الجزء التخيلي لـ p_3 ويمكن استنتاجها من الخطوة السابقة لأن التغيرات مستمرة.

2. يوجد ثلاثة حلول مختلفة، في هذه الحالة فإن الحلول تكون مختلفة مثلي مثلي، ويوجد حتماً حلّان يحققان الحالة a وحلّان يحققان الحالة b من المناقشة السابقة. نستنتج أن $\delta_2, \delta_q \in \{0, \pi\}$ ومنه $\delta_j \in \{0, \pi\}$ وهي حالة اصطفاف جميع الروبوتات على استقامة واحدة. ويمكن عندها استنتاج مواضع الروبوتات بسهولة إذ يكون $p_j = \pm d_j$.
3. يوجد أربعة حلول مختلفة، وكما في حالة وجود ثلاثة حلول مختلفة نستنتج أن الروبوتات على استقامة واحدة.

في الواقع فإن وجود ثلاثة حلول يقتضي وجود أربعة حلول، إذ أن وجود ثلاثة حلول يقتضي $\delta_j \in \{0, \pi\}$ وعندها إما $\delta_j = 0$ وتوجد أربعة حلول أو $\exists! q \in \{1, 2, 3\} : \delta_q = 0, \delta_{j \neq q} = \pi$ وتوجد أربعة حلول أيضاً.



الشكل 18.3: حالة اصطفاغ الروبوتات الأربعة على استقامة واحدة

5.3 رصد السرعة

يتضح من المناقشة السابقة أن أي روبوت قادر على رصد ثلاثة من جيرانه في حال وجد ضمن طبولوجيا التجاور حلقة تمر من الجيران الثلاثة. يمكن للروبوت المركزي قياس المسافات إلى أي من جيرانه لأغراض أخرى كتبادل المعلومات لمساعدة الروبوتات الأخرى في رصد جوارهم. ولكن يهتم الروبوت بثلاثة فقط من جيرانه ويلاحظهم، ندعو هؤلاء الجيران الثلاثة بالجيران الملاحقين. لا شك أن عدم القدرة على قياس التوجه هي العائق الأكبر أمام ملاحقة التشكيل، إذ أن الروبوت لا يعرف في أي اتجاه يسير بالنسبة لجيرانه الملاحقين، لذلك يجب ابتكار خوارزمية تسمح بتقدير اتجاه الحركة بالنسبة للجوار. لاستنتاج هذه الخوارزمية نبدأ بقياس سرعة الروبوتات الملاحقة كما يرصدها الروبوت المركزي والتي سنسميها السرعة الظاهرية.

$$\begin{aligned} {}^0v_0 &= 0 \\ {}^0v_1 &= \frac{\Delta p_1}{\Delta t} \\ {}^0v_2 &= \frac{\Delta p_2}{\Delta t} \\ {}^0v_3 &= \frac{\Delta p_3}{\Delta t} \end{aligned}$$

حيث يعبر Δp_j عن تغير موضع الروبوت r_j بين خطوتين ويعبر Δt عن الفارق الزمني بين الخطوتين. يعبر 0v_j عن السرعة الظاهرية للروبوت r_j بالنسبة للجملة المرجعية R_0 مكتوباً بأشعة الجملة R_0 . بفرض Ω هي سرعة دوران محاور الجملة R_0 بالنسبة للجملة المطلقة R_g ، عندها تكون أشعة سرعة الروبوتات المطلقة مكتوبة بالجملة R_0 هي:

$$\begin{aligned} {}^Gv_1 &= {}^Gv_0 + {}^0v_1 + i\Omega p_1 \\ {}^Gv_2 &= {}^Gv_0 + {}^0v_2 + i\Omega p_2 \\ {}^Gv_3 &= {}^Gv_0 + {}^0v_3 + i\Omega p_3 \end{aligned}$$

حيث ${}^G v_0$ هي سرعة الروبوت المركزي بالنسبة للجملة المطلقة وهي ذاتها سرعة مركز الجملة R_0 بالنسبة للجملة المطلقة، و ${}^0 v_0 = 0, p_0 = 0$. المجاهيل هنا هي ${}^G v_0$ و Ω . عندها نكتب:

$$\begin{aligned} |{}^G v_0|^2 &= ({}^G v_{0x})^2 + ({}^G v_{0y})^2 = V_0^2 \\ |{}^G v_1|^2 &= ({}^G v_{0x} + {}^0 v_{1x})^2 + ({}^G v_{0y} + \Omega x_1)^2 = V_1^2 \\ |{}^G v_2|^2 &= ({}^G v_{0x} + {}^0 v_{2x} - \Omega y_2)^2 + ({}^G v_{0y} + {}^0 v_{2y} + \Omega x_2)^2 = V_2^2 \\ |{}^G v_3|^2 &= ({}^G v_{0x} + {}^0 v_{3x} - \Omega y_3)^2 + ({}^G v_{0y} + {}^0 v_{3y} + \Omega x_3)^2 = V_3^2 \end{aligned}$$

حيث $V_j = |{}^G v_j|$ ، إن جملة المعادلات السابقة هي جملة أربعة معادلات بثلاثة مجاهيل، وهي في الحالة العامة قد لا تقبل حلاً. ولكن بما أن المعطيات تعبر عن حالة فيزيائية محققة فهي تقبل حلاً على الأقل. نعتد في كافة المناقشات التالية أن الحل موجود. لتبسيط الرموز نجري تغيير المتحولات التالي:

$$X = {}^G v_{0x}, \quad Y = {}^G v_{0y}, \quad Z = \Omega$$

$$\begin{aligned} X_1 &= -{}^0 v_{1x} \\ X_2 &= -{}^0 v_{2x}, \quad Y_2 = -{}^0 v_{2y} \\ X_3 &= -{}^0 v_{3x}, \quad Y_3 = -{}^0 v_{3y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= -x_1 \\ A_3 &= -x_3, \quad B_3 = -y_3 \\ A_2 &= -x_2, \quad B_2 = -y_2 \end{aligned}$$

فتؤول جملة المعادلات إلى الشكل:

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= V_0^2 \\ (X - X_1)^2 + (Y - A_1 Z)^2 &= V_1^2 \\ (X - X_2 + B_2 Z)^2 + (Y - Y_2 - A_2 Z)^2 &= V_2^2 \\ (X - X_3 + B_3 Z)^2 + (Y - Y_3 - A_3 Z)^2 &= V_3^2 \end{aligned}$$

تعبر جملة المعادلات هذه عن تقاطع أربع دوائر مراكزها توابع خطية لـ Z معرّفة بالمعادلات التالية:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0 &= [\quad 0 \quad , \quad 0 \quad]^T & \mathbf{C}_1 &= [\quad X_1 \quad , \quad A_1 Z \quad]^T \\ \mathbf{C}_2 &= [\quad X_2 - B_2 Z \quad , \quad Y_2 + A_2 Z \quad]^T & \mathbf{C}_3 &= [\quad X_3 - B_3 Z \quad , \quad Y_3 + A_3 Z \quad]^T \end{aligned}$$

حيث نعتد الترميز $\mathbf{C}_j(Z) = [X_{cj}(Z) \quad , \quad Y_{cj}(Z)]$ ، نعرف:

$$D_j^2(Z) = (X_j - B_j Z)^2 + (Y_j + A_j Z)^2 = \|\mathbf{C}_j(Z)\|^2$$

المسافة بين مركز الدائرة j ومركز الدائرة C_0 (المنطبق على المبدأ). نستنتج العلاقات التالية المفيدة في تبسيط العلاقات:

$$\begin{aligned} A_3^2 + B_3^2 &= |p_3^2| \\ X_j^2 + Y_j^2 &= |v_j^0| \end{aligned}$$

لدراسة هذه المسألة جيداً نقوم بحل جملة هذه المعادلات بعدة طرق، وكل طريقة سوف تعطي نتائج تتيح فهماً أعمق للمسألة وحالاتها الحدية.

1.5.3 الطريقة الأولى: باستخدام التوابع المثلثية

نتأمل بداية المعادلتين الأولى والرابعة:

$$X^2 + Y^2 = V_0^2 \quad (2.3)$$

$$(X - X_3 + B_3Z)^2 + (Y - Y_3 - A_3Z)^2 = V_3^2 \quad (3.3)$$

نبدأ بهتتين المعادلتين لأن المعادلة الأولى هي الأبسط ولأن المعادلة الثانية هي حالة خاصة من المعادلة الرابعة حيث $Y_1 = 0, B_1 = 0$ ، أما المعادلة الثالثة فلها شكل مماثل للمعادلة الرابعة. تعبر المعادلة الأولى عن دائرة مركزها المبدأ وتعبر المعادلة الرابعة عن دائرة مركزها يتحرك على خط مستقيم معطى بالمعادلة الوسيطة :

$$X_{c3}(Z) = X_3 - B_3Z$$

$$Y_{c3}(Z) = Y_3 + A_3Z$$

بديهياً نستنتج أن الحل موجود عندما تتقاطع الدائرتين أي عندما تحقق المسافة بين مركزيهما:

$$L^2 = |V_0 - V_3|^2 \leq D_3^2(Z) \leq (V_0 + V_3)^2 = U^2 \quad (4.3)$$

يمكن الآن البحث عن الحل ضمن مجال قيم Z التي تحقق الشرط نبدأ بالطرف الأيمن من المتراجحة:

$$\begin{aligned} D_3^2(Z) - U^2 &\leq 0 \\ (X_3 - B_3Z)^2 + (Y_3 + A_3Z)^2 - U^2 &\leq 0 \\ B_3^2Z^2 + X_3^2 - 2B_3X_3Z + A_3^2Z^2 + Y_3^2 + 2A_3Y_3Z - U^2 &\leq 0 \\ (A_3^2 + B_3^2)Z^2 + (2A_3Y_3 - 2B_3X_3)Z + X_3^2 + Y_3^2 - U^2 &\leq 0 \\ Z^2 + 2\frac{A_3Y_3 - B_3X_3}{A_3^2 + B_3^2}Z + \frac{X_3^2 + Y_3^2 - U^2}{A_3^2 + B_3^2} &\leq 0 \end{aligned}$$

يمثل الطرف الأيسر في المعادلة كثير حدود من الدرجة الثانية أمثال الحد المسيطر فيه موجبة، عندئذ يتحقق الشرط عندما تقع Z بين جذري كثير الحدود. نحسب المميز:

$$\begin{aligned}\Delta &= 4 \frac{(A_3 Y_3 - B_3 X_3)^2}{(A_3^2 + B_3^2)^2} - 4 \frac{X_3^2 + Y_3^2 - U^2}{A_3^2 + B_3^2} = 4 \frac{(A_3 Y_3 - B_3 X_3)^2 - (A_3^2 + B_3^2)(X_3^2 + Y_3^2 - U^2)}{(A_3^2 + B_3^2)^2} \\ \Delta &= 4 \frac{A_3^2 Y_3^2 + B_3^2 X_3^2 - 2A_3 B_3 X_3 Y_3 - A_3^2 X_3^2 - A_3^2 Y_3^2 + A_3^2 U^2 - B_3^2 X_3^2 - B_3^2 Y_3^2 + B_3^2 U^2}{(A_3^2 + B_3^2)^2} \\ \Delta &= 4 \frac{A_3^2 U^2 + B_3^2 U^2 - 2A_3 B_3 X_3 Y_3 - A_3^2 X_3^2 - B_3^2 Y_3^2}{(A_3^2 + B_3^2)^2} \\ \Delta &= 4 \frac{U^2 (A_3^2 + B_3^2) - (A_3 X_3 + B_3 Y_3)^2}{(A_3^2 + B_3^2)^2}\end{aligned}$$

ومنه يوجد حل إذا وفقط إذا:

$$(A_3 X_3 + B_3 Y_3)^2 - U^2 (A_3^2 + B_3^2) \leq 0 \quad (5.3)$$

وذلك يكافئ:

$$(A_3 X_3 + B_3 Y_3)^2 \leq U^2 |p_3^2|$$

أو بصياغة أخرى:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}^2(\bar{p}_3 v_3) &\leq U^2 \operatorname{Re}(\bar{p}_3 p_3) \\ \frac{\operatorname{Re}^2(\bar{p}_3 v_3)}{\operatorname{Re}(\bar{p}_3 p_3)} &\leq U^2 \\ \frac{|p_3|^2 |v_3|^2 \cos^2(\widehat{p_3, v_3})}{|p_3|^2} &\leq U^2 \\ |v_3|^2 \cos^2(\widehat{p_3, v_3}) &\leq U^2\end{aligned}$$

حيث $U = \sqrt{U^2}$, أي أن طولية مسقط شعاع السرعة على حامل شعاع الموضع أصغر من مجموع سرعتي الروبوتين، وذلك مكافئ للمناقشة التي قدمناها في مقدمة هذا القسم إذ يستحيل أن يرصد الروبوت المركزي أي من جيرانه يتحرك قطبياً بأكثر من مجموع سرعتين. نبحث عن الحل ضمن المجال $[Z_-, Z_+]$ المعروف بـ:

$$\begin{aligned}Z_- &= \frac{B_3 X_3 - A_3 Y_3 - \sqrt{U^2 (B_3^2 + A_3^2) - (B_3 Y_3 + A_3 X_3)^2}}{A_3^2 + B_3^2} \\ Z_+ &= \frac{B_3 X_3 - A_3 Y_3 + \sqrt{U^2 (B_3^2 + A_3^2) - (B_3 Y_3 + A_3 X_3)^2}}{A_3^2 + B_3^2} \\ Z_0 &= \frac{Z_- + Z_+}{2} = \frac{B_3 X_3 - A_3 Y_3}{A_3^2 + B_3^2}\end{aligned}$$

حيث:

$$Z \in [Z_-, Z_+] \Rightarrow D_3^2(Z) = (A_3^2 + B_3^2) (Z - Z_-) (Z - Z_+) + U^2 \leq U^2 \quad (6.3)$$

وبسهولة نستنتج أن:

$$\min_{Z \in [Z_-, Z_+]} (D_3^2(Z)) = D_3^2(Z_0) = (A_3^2 + B_3^2) (Z_0 - Z_-) (Z_0 - Z_+) + U^2$$

لمناقشة الطرف الأيسر من المتراجحة نستعيد من الخطوات في مناقشة الطرف الأيمن ونكتب:

$$\begin{aligned} D_3^2(Z) - L^2 &\geq 0 \\ Z^2 + 2 \frac{A_3 Y_3 - B_3 X_3}{A_3^2 + B_3^2} Z + \frac{X_3^2 + Y_3^2 - L^2}{A_3^2 + B_3^2} &\geq 0 \\ \bar{\Delta} = 4 \frac{L^2 (A_3^2 + B_3^2) - (A_3 X_3 + B_3 Y_3)^2}{(A_3^2 + B_3^2)^2} \end{aligned}$$

إما أن يكون المميز سالباً وبالتالي تحقق كل قيم Z المتراجحة، أو أن يكون المميز موجباً وبالتالي تكون مجموعة قيم Z التي تحقق الشرط هي $[\bar{Z}_+, \infty[\cup]-\infty, \bar{Z}_-]$ حيث:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_- &= \frac{B_3 X_3 - A_3 Y_3 - \sqrt{L^2 (B_3^2 + A_3^2) - (B_3 Y_3 + A_3 X_3)^2}}{A_3^2 + B_3^2} \\ \bar{Z}_+ &= \frac{B_3 X_3 - A_3 Y_3 + \sqrt{L^2 (B_3^2 + A_3^2) - (B_3 Y_3 + A_3 X_3)^2}}{A_3^2 + B_3^2} \end{aligned}$$

وكذلك:

$$Z \in]-\infty, \bar{Z}_-] \cup [\bar{Z}_+, \infty[\Rightarrow D_3^2(Z) = (A_3^2 + B_3^2) (Z - \bar{Z}_-) (Z - \bar{Z}_+) + L^2 \geq L^2 \quad (7.3)$$

بملاحظة أن $U > L$ نستنتج أن:

$$Z_- \leq \bar{Z}_- \leq Z_0 \leq \bar{Z}_+ \leq Z_+$$

وتكون مجموعة قيم Z التي تضمن تقاطع الدائرتين هي:

$$S = [Z_-, \bar{Z}_-] \cup [\bar{Z}_+, Z_+]$$

مع اصطلاح $\bar{Z}_- = \bar{Z}_+ = Z_0$ في حالة $\bar{\Delta} < 0$ ، ويتحقق:

$$\forall Z \in S, L < D_3(Z) < U$$

من المعادلة 2.3 نستنتج:

$$\exists \theta(Z) \in \mathbb{R} : X = V_0 \cos \theta(Z), Y = V_0 \sin \theta(Z)$$

وبالتعويض في 3.3 نجد:

$$\begin{aligned} (V_0 \cos \theta(Z) - X_{c3}(Z))^2 + (V_0 \sin \theta(Z) - Y_{c3}(Z))^2 &= V_3^2 \\ V_0^2 \cos^2 \theta(Z) + X_{c3}^2(Z) - 2V_0 X_{c3}(Z) \cos \theta(Z) + V_0^2 \sin^2 \theta(Z) + Y_{c3}^2(Z) - 2V_0 Y_{c3}(Z) \sin \theta(Z) &= V_3^2 \\ X_{c3}(Z) \cos \theta(Z) + Y_{c3}(Z) \sin \theta(Z) &= \frac{D_3^2(Z) + V_0^2 - V_3^2}{2V_0} \\ \frac{X_{c3}(Z)}{D_3(Z)} \cos \theta(Z) + \frac{Y_{c3}(Z)}{D_3(Z)} \sin \theta(Z) &= \frac{D_3^2(Z) + V_0^2 - V_3^2}{2V_0 D_3(Z)} \end{aligned}$$

الطرف الأيمن من المعادلة السابقة يحقق:

$$\forall Z \in S, \left| \frac{D_3^2(Z) + V_0^2 - V_3^2}{2V_0 D_3(Z)} \right| \leq 1$$

والبرهان على ذلك موجود في الملحق 4.1. نعرف $\psi(Z)$ على أنها الزاوية التي يصنعها الشعاع $\overrightarrow{C_0 C_3}$ مع المحور X وهي تحقق:

$$\cos \psi(Z) = \frac{X_{c3}(Z)}{D_3(Z)} \quad \sin \psi(Z) = \frac{Y_{c3}(Z)}{D_3(Z)}$$

ونعرف $\psi_0 = \psi(Z_0)$ ومنه:

$$\begin{aligned}
\cos(\psi(Z) - \psi_0) &= \frac{X_{c3}(Z) X_{c3}(Z_0)}{D_3(Z) D_3(Z_0)} + \frac{Y_{c3}(Z) Y_{c3}(Z_0)}{D_3(Z) D_3(Z_0)} \\
&= \frac{(X_3 - B_3 Z)(X_3 - B_3 Z_0)}{D_3(Z) D_3(Z_0)} + \frac{(Y_3 + A_3 Z)(Y_3 + A_3 Z_0)}{D_3(Z) D_3(Z_0)} \\
&= \frac{X_3^2 - X_3 B_3 Z_0 - X_3 B_3 Z + B_3^2 Z_0 Z + Y_3^2 + Y_3 A_3 Z_0 + Y_3 A_3 Z + A_3^2 Z_0 Z}{D_3(Z) D_3(Z_0)} \\
&= \frac{X_3^2 + Y_3^2 - (X_3 B_3 - Y_3 A_3)(Z + Z_0) + (A_3^2 + B_3^2) Z_0 Z}{D_3(Z) D_3(Z_0)} \\
&= \frac{X_3^2 + Y_3^2 - (X_3 B_3 - Y_3 A_3)(Z + Z_0) + (X_3 B_3 - Y_3 A_3) Z}{D_3(Z) D_3(Z_0)} \\
&= \frac{X_3^2 + Y_3^2 - (X_3 B_3 - Y_3 A_3) Z_0}{D_3(Z) D_3(Z_0)} \\
&= \frac{(X_3^2 + Y_3^2)(A_3^2 + B_3^2) - (X_3 B_3 - Y_3 A_3)^2}{(A_3^2 + B_3^2) D_3(Z) D_3(Z_0)} \\
&= \frac{A_3^2 X_3^2 + A_3^2 Y_3^2 + B_3^2 X_3^2 + B_3^2 Y_3^2 - B_3^2 X_3^2 - A_3^2 Y_3^2 + 2A_3 B_3 X_3 Y_3}{(A_3^2 + B_3^2) D_3(Z) D_3(Z_0)} \\
&= \frac{A_3^2 X_3^2 + B_3^2 Y_3^2 + 2A_3 B_3 X_3 Y_3}{(A_3^2 + B_3^2) D_3(Z) D_3(Z_0)} \\
\cos(\psi(Z) - \psi_0) &= \frac{(A_3 X_3 + B_3 Y_3)^2}{(A_3^2 + B_3^2) D_3(Z) D_3(Z_0)}
\end{aligned}$$

ومنه $\cos(\psi(Z) - \psi_0) > 0$. هذا يسمح بتعريف التابع:

$$\begin{aligned}
\tan(\psi(Z) - \psi_0) &= \frac{\sin(\psi(Z) - \psi_0)}{\cos(\psi(Z) - \psi_0)} \\
&= \frac{Y_{c3}(Z) X_{c3}(Z_0) - X_{c3}(Z) Y_{c3}(Z_0)}{X_{c3}(Z) X_{c3}(Z_0) + Y_{c3}(Z) Y_{c3}(Z_0)} \\
&= \frac{(Y_3 + A_3 Z)(X_3 - B_3 Z_0) - (X_3 - B_3 Z)(Y_3 + A_3 Z_0)}{(X_3 - B_3 Z)(X_3 - B_3 Z_0) + (Y_3 + A_3 Z)(Y_3 + A_3 Z_0)} \\
&= \frac{X_3 Y_3 - B_3 Y_3 Z_0 + A_3 X_3 Z - A_3 B_3 Z_0 Z - X_3 Y_3 - A_3 X_3 Z_0 + B_3 Y_3 Z + A_3 B_3 Z_0 Z}{X_3^2 - B_3 X_3 Z_0 - X_3 B_3 Z + B_3^2 Z_0 Z + Y_3^2 + A_3 Y_3 Z_0 + A_3 Y_3 Z + A_3^2 Z_0 Z} \\
&= \frac{(A_3 X_3 + B_3 Y_3)(Z - Z_0)}{(A_3 X_3 + B_3 Y_3)(Z - Z_0) + (A_3 Y_3 - B_3 X_3)(Z + Z_0)}
\end{aligned}$$

وبحسب تعريف Z_0 يكون:

$$Z_0 = \frac{B_3 X_3 - A_3 Y_3}{A_3^2 + B_3^2} \Rightarrow (A_3^2 + B_3^2) Z_0 = -(A_3 Y_3 - B_3 X_3)$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
\tan(\psi(Z) - \psi_0) &= \frac{(A_3X_3 - B_3Y_3)(Z - Z_0)}{X_3^2 + Y_3^2 - (A_3Y_3 - B_3X_3)Z + (A_3Y_3 - B_3X_3)(Z + Z_0)} \\
&= \frac{(A_3X_3 - B_3Y_3)(Z - Z_0)}{X_3^2 + Y_3^2 - \frac{(A_3Y_3 - B_3X_3)^2}{A_3^2 + B_3^2}} \\
&= \frac{(A_3^2 + B_3^2)(A_3X_3 + B_3Y_3)(Z - Z_0)}{(A_3^2 + B_3^2)(X_3^2 + Y_3^2) - (B_3X_3 - A_3Y_3)^2} \\
&= \frac{(A_3^2 + B_3^2)(A_3X_3 + B_3Y_3)(Z - Z_0)}{A_3^2X_3^2 + A_3^2Y_3^2 + B_3^2X_3^2 + B_3^2Y_3^2 - B_3^2X_3^2 - A_3^2Y_3^2 + A_3Y_3B_3X_3} \\
&= \frac{(A_3^2 + B_3^2)(A_3X_3 + B_3Y_3)(Z - Z_0)}{A_3^2X_3^2 + B_3^2Y_3^2 + A_3X_3B_3Y_3} \\
\tan(\psi(Z) - \psi_0) &= \frac{A_3^2 + B_3^2}{A_3X_3 + B_3Y_3}(Z - Z_0)
\end{aligned}$$

ومنه:

$$\psi(Z) = \psi_0 + \arctan\left(\frac{A_3^2 + B_3^2}{A_3X_3 + B_3Y_3}(Z - Z_0)\right)$$

بالعودة إلى المعادلة السابقة نجد:

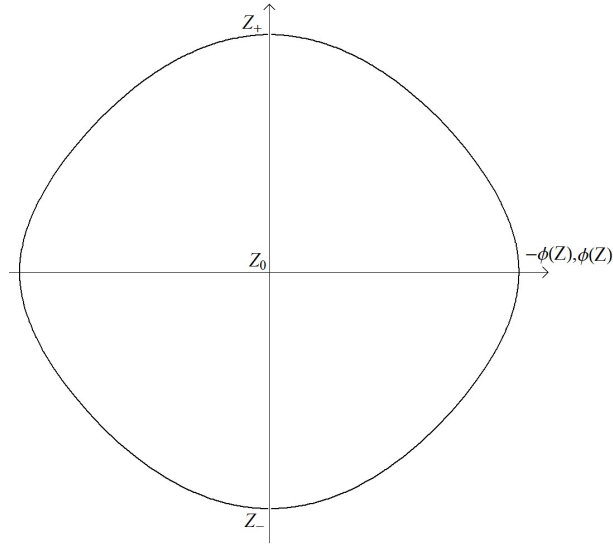
$$\begin{aligned}
\cos(\theta(Z) - \psi(Z)) &= \frac{D_3^2(Z) + V_0^2 - V_3^2}{2V_0D_3(Z)} \\
\theta(Z) - \psi(Z) &= \pm \arccos\left(\frac{D_3^2(Z) + V_0^2 - V_3^2}{2V_0D_3(Z)}\right) \\
\theta(Z) &= \psi(Z) \pm \phi(Z)
\end{aligned}$$

لمراعاة دقة التعابير الرياضيّة نعرّف:

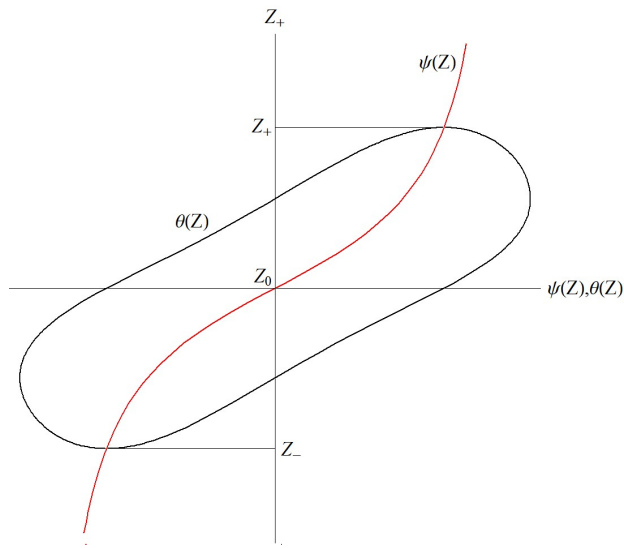
$$\begin{aligned}
\theta_-(Z) &= \psi(Z) - \phi(Z) \\
\theta_+(Z) &= \psi(Z) + \phi(Z)
\end{aligned}$$

قمنا برسم تغيرات $\phi(Z)$ و $-\phi(Z)$ في الشكل 19.3 ، كما قمنا برسم تغيرات $\theta(Z)$ و $\psi(Z)$ في الشكل 20.3 لتوضيح كيف تساهم هذه التوابع في تحديد النقاط التي تحقق جملة المعادلتين، حيث يمثل المنحني الملون بالأحمر التابع $\psi(Z)$ ويمثل المنحني الملون بالأسود جميع النقاط التي تحقق جملة المعادلتين 2.3 و 3.3 .

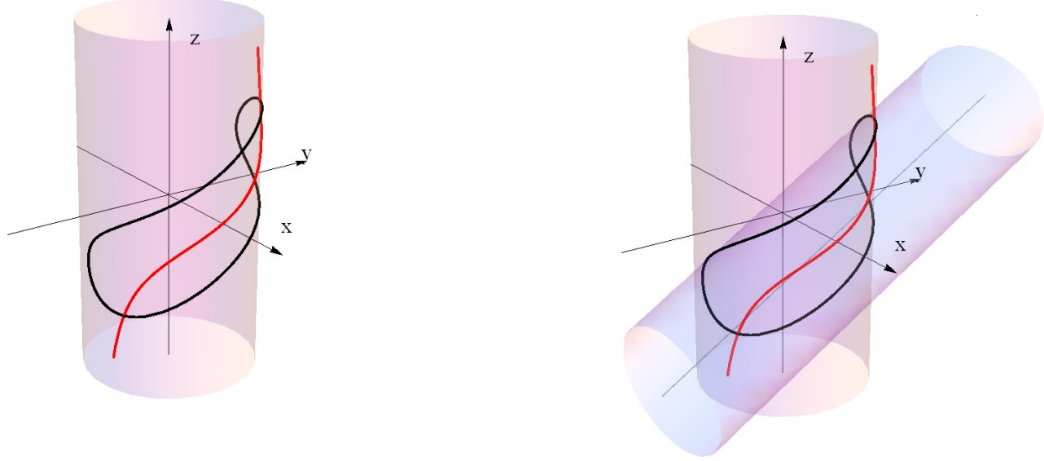
وأخيراً، قمنا برسم حلول المعادلتين في الفضاء ثلاثي الأبعاد، فإذا عرفنا $L_3 = \left\{ (\theta, Z) \in \mathbb{R}^2 : \cos(\theta - \psi(Z)) = \frac{D_3^2(Z) + V_0^2 - V_3^2}{2V_0D_3(Z)} \right\}$ مجموع النقاط التي تحقق المعادلة السابقة.



الشكل 19.3: $-\phi$ و ϕ بدلالة Z في حالة $\bar{\Delta} > 0$



الشكل 20.3: θ و ψ بدلالة Z



(ا) المجموعة L' كتقاطع شبهي أسطوانة في الفراغ. (ب) المجموعة L' مرسومة على سطح الأسطوانة $\{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 : X^2 + Y^2 = 1\}$

الشكل 21.3: تمثيل مجموعة الحلول في الفراغ.

يمكن رسم مجموعة النقاط $L_3 = \{(\cos(\theta(Z)), \sin(\theta(Z)), Z)^T \in \mathbb{R}^3 : (\theta, Z) \in L_3\}$ في الفراغ ثلاثي الأبعاد على سطح أسطوانة محورها المحور Z ونصف قطرها V_0 . بناء على المناقشة السابقة يمكن التنبؤ بأنه إذا وجد حل لمسألة رصد السرعة، فإن احتمال وجود حل مختلف ثاني شبه مستحيل. إذ يمكن بملاحظة أن الحل المشترك للمعادلة الأولى مع المعادلة الثانية هو منحنى مغلق على سطح أسطوانة محورها المحور z ، ندعو هذا المنحنى L'_1 . وبشكل مماثل فإن الحل المشترك للمعادلة الأولى مع المعادلة الثالثة هو أيضاً منحنى مغلق على سطح الاسطوانة ذاتها وليكن L'_2 . في هذه الحالة، فإن الحل المشترك للمعادلات الثلاثة الأولى هو مجموعة نقاط تقاطع هذين المنحنيين. تكون هذه المجموعة منتهية ومكونة من نقاط معزولة، كما يمكن التنبؤ أنه في الحالة العملية حيث القياسات تتم بدقة منتهية، فإن عدد نقاط التقاطع سيكون زوجياً. يمكن التحقق من ذلك بملاحظة أن تقاطع أي منحنين مغلقين غير متماسين هو عدد زوجي من النقاط. لإيجاد حل للمسألة الكامل نأخذ بعين الاعتبار الحل المشترك للمعادلتين الأولى والرابعة، وهو أيضاً منحنى مغلق على سطح الاسطوانة وليكن L'_3 . بديهياً فإن احتمال تقاطع هذا المنحنى الرابع مع مجموعة النقاط التي تمثل حلاً مشتركاً للمعادلات الثلاثة الأولى شبه معدوم، وبالتالي فإذا فرضنا أن الحل موجود، فإن احتمال وجود حل ثاني للمسألة شبه معدوم أيضاً. .

2.5.3 الطريقة الثانية: باستخدام الطرائق العددية وتوابع الكمون

تعتمد طريقة توابع الكمون على إيجاد حل عددي لمسألة تقاطع الدوائر المكافئة لمسألة رصد السرعة، وذلك عن طريق تعريف توابع كمون تأخذ قيمها الصغرى على محيط الدوائر ثم الاستفادة من هذه التوابع لتعريف تابع كمون يأخذ قيمة صغرى شاملة في نقطة تقاطع الدوائر الأربعة. نعرف التابع $U_j : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ تابع الكمون الموافق للدائرة C_j حيث $j = 0..3$. ونعرف U تابع الكمون الإجمالي بأنه مجموع توابع الكمون $U(X, Y, Z) = \sum_{j=0..3} U_j(X, Y, Z)$. نختار توابع الكمون U_j بحيث يأخذ كل منها قيمته الدنيا فقط في $C_j = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(X - X_{cj})^2 + (Y - Y_{cj})^2} = V_j\}$. عندها

يمكن تطبيق طرائق الأمثلة التكرارية لإيجاد حل عددي هو نقطة (X_S, Y_S, Z_S) قريبة من القيم الدنيا لتتابع التدرج، أي نقطة تقاطع الدوائر الممثلة بمعادلات المسألة. تعاني هذه الطريقة من بضعة جوانب سلبية:

1. يمكن أن تعطي هذه الطريقة حلاً هي قيم صغرى محلياً مختلفة عن القيمة الصغرى المطلقة التي تمثل نقطة تقاطع الدوائر الأربعة.
2. تعاني هذه الطريقة من تضخم الأخطاء المرتبط بالتمثيل بالنقطة العائمة floating-point arithmetic.
3. يمكن أن يكون الخطأ في إيجاد الحل العددي كبيراً بسبب التقارب البطيء من الحل، وذلك في بعض الحالات الخاصة. على الرغم من السلبات المذكورة سابقاً فإن هذه الطريقة مفضلة على طريقة الحل تحليلياً باستخدام التتابع المثلثية المشروحة سابقاً للأسباب التالية:
1. الحل التحليلي يتطلب معرفة معاملات المسألة بدقة لانهائية وهذا مستحيل عملياً، في حين إن الحل العددي قادر على إعطاء حلول مقبولة للمسألة مع وجود أخطاء قياس وأخطاء حسابات النقطة العائمة.
2. تعتبر المسألة المطروحة مسألة أمثلة بسيطة نسبياً بعدد قليل من المتحولات، وتوجد العديد من الخوارزميات التي تتقارب من الحل بسرعة والتي يمكن تكييفها بتغيير معاملات بحيث تناسب المسألة المحلولة بشكل أكبر.
3. لا توجد مناقشة لعدة حالات كما في الحل بالتتابع المثلثية، ويمكن كتابة خوارزمية واحدة تصلح لجميع الحالات.
4. بما أن Z_S تعبر عن Ω سرعة دوران الجملة المصطلحة R_0 بالنسبة للجملة المطلقة R_G ، والحل (X_S, Y_S) يعبر عن سرعة الروبوت المدروس بالنسبة للجملة المطلقة مكتوباً بأشعة واحدة الجملة المصطلحة، فإن حلول المسألة مستمرة بالنسبة للزمن وبالتالي يمكن الاستفادة من هذه المعلومة لتضييق مجموعة البحث عن الحل والحكم على الحلول غير المقبولة.
5. يمكن تكييف هذه الطريقة عن طريق استبدال تابع الكمون الكلي بمجموع مثقل لتتابع الكمون.

سنركز في المناقشة في هذا القسم على كيفية التغلب على نقاط الضعف التي تعاني منها طريقة الحل بتتابع الكمون. للبدء في تطبيق هذه الطريقة يجب اختيار تابع كمون مناسب U_j يبلغ قيمته الدنيا في مجموعة النقاط الممثلة بالدائرة C_j . يتبادر إلى الذهن على الفور التابع الذي يربط كل نقطة (X, Y) بمسافتها عن المجموعة:

$$C_j(Z) = \left\{ (X, Y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(X - X_{cj}(Z))^2 + (Y - Y_{cj}(Z))^2} = V_j \right\}$$

. فمثلاً، التابع :

$$U_0(X, Y, Z) = \|\sqrt{X^2 + Y^2} - V_0\|$$

يصلح أن يكون تابع كمون للدائرة $C_0(Z) = \{(X, Y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{X^2 + Y^2} = V_0\}$. ولكن يمكن بسهولة ملاحظة أن تدرج هذا التابع غير معرّف ولا يقبل التمديد باستمرار عند كل نقطة من $C_0(Z)$. لذلك نقترح تابع كمون من الشكل:

$$\forall (X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3, U_j(X, Y, Z) = \left(\sqrt{(X - X_{cj}(Z))^2 + (Y - Y_{cj}(Z))^2} - V_j \right)^2 \quad (8.3)$$

من الواضح أن التابع موجب وينعدم في $C_j(Z)$ ، وهو بالتالي يحقق شرط بلوغ القيمة الدنيا في مجموعة نقاط الدائرة. يتمتع تابع الكمون هذا بميزة أن قيمة تابع الكمون الكلي عند نقطة الحل $U(X_S, Y_S, Z_S) = \sum_{j=0..3} U_j(X_S, Y_S, Z_S)$ تمثل

مجموع مربعات الأخطاء في الحل، وهو ما يسمح بحساب جذر الوسطي التربيعي للأخطاء في الحل وهي قيمة ذات دلالة إحصائية تعبر عن الارتياح في حل المسألة. يمكن استخدام هذه القيمة في خوارزميات أخرى مثل مرشح كالمان Kalman Filter للتغلب على الأخطاء الناتجة عن الحل العددي وضجيج القياس. تتطلب طريقة الحل بالانحدار الأعظم (والطرائق المشابهة) حساب تدرج تابع الكمون بالنسبة للمتحويلات الثلاثة، ولكن التدرج بالنسبة للمتحويلات الثلاثة ذو صياغة رياضية معقدة. من ناحية أخرى، يتحقق من أجل قيمة معينة لـ Z أن تدرج تابع الكمون بالنسبة للمتحولين X, Y يكون:

$$\begin{aligned} \nabla U(X, Y) &= \sum_{j=0..3} \nabla U_j(X, Y) \\ \nabla U_j(X, Y) &= 2 \frac{\sqrt{(X - X_{cj})^2 + (Y - Y_{cj})^2} - V_j}{\sqrt{(X - X_{cj})^2 + (Y - Y_{cj})^2}} \begin{bmatrix} X - X_{cj} \\ Y - Y_{cj} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (9.3)$$

نلاحظ ان التدرج في هذه الحالة ذو صياغة رياضية بسيطة نسبياً، يمكن على سبيل المثال حساب القيمة العددية للجذر التربيعي لمرة واحدة واستخدامها في حساب تابع الكمون والتدرج، وهذا يقلل من أخطاء الحساب بالنقطة العائمة ويسرع العمليات الحسابية. كذلك فإنه بحساب هسيان Hessian تابع الكمون نجد:

$$H_U(X, Y) = 2 \begin{pmatrix} \frac{((X - X_{cj})^2 + (Y - Y_{cj})^2)^{3/2} - (Y - Y_{cj})^2 V_j}{((X - X_{cj})^2 + (Y - Y_{cj})^2)^{3/2}} & \frac{(X - X_{cj})(Y - Y_{cj}) V_j}{((X - X_{cj})^2 + (Y - Y_{cj})^2)^{3/2}} \\ \frac{(X - X_{cj})(Y - Y_{cj}) V_j}{((X - X_{cj})^2 + (Y - Y_{cj})^2)^{3/2}} & \frac{((X - X_{cj})^2 + (Y - Y_{cj})^2)^{3/2} - (X - X_{cj})^2 V_j}{((X - X_{cj})^2 + (Y - Y_{cj})^2)^{3/2}} \end{pmatrix} \quad (10.3)$$

وهو أيضاً ذو صياغة سهلة الحساب عددياً. ومقلوبه سهل الحساب لأن أبعاده 2×2 . لذلك سنفصل المسألة إلى مسألتين أمثلة:

1. المسألة A : مسألة إيجاد النقطة $(X_S(Z), Y_S(Z))$ التي تحقق:

$$Z \in \mathbb{R}, \min_{(X, Y) \in \mathbb{R}^2} U(X, Y, Z) = U(X_S(Z), Y_S(Z), Z)$$

من أجل قيمة معينة لـ Z .

2. مسألة إيجاد القيمة Z_S التي تحقق:

$$\min_{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3} U(X, Y, Z) = U(X_S(Z_S), Y_S(Z_S), Z_S)$$

نبدأ بدراسة حل المسألة الأولى لأن المسألة الثانية مبنية عليها. بمعرفة قيمة Z يمكن حساب مراكز الدوائر الأربعة، وبالتالي يمكن حساب تدرج تابع الكمون بالنسبة للمتحولين X, Y . نلاحظ أن تدرج تابع الكمون U_j غير معرف عند مراكز الدوائر بسبب انعدام المقام. ولكن:

$$\begin{aligned} \|\nabla U_j(X, Y)\| &= 2 \frac{\left| \sqrt{(X - X_{cj})^2 + (Y - Y_{cj})^2} - V_j \right|}{\sqrt{(X - X_{cj})^2 + (Y - Y_{cj})^2}} \sqrt{(X - X_{cj})^2 + (Y - Y_{cj})^2} \\ &= 2 \left| \sqrt{(X - X_{cj})^2 + (Y - Y_{cj})^2} - V_j \right| \end{aligned} \quad (11.3)$$

وبالتالي التدرج منته في جوار مراكز الدوائر. بما أن الحسابات تتم بالنقطة العائمة، فإن إندغام المقام غير مرجح. وبالتالي مشكلة عدم تعريف التدرج عند الأقطاب في زيادة التكرارات للوصول إلى الحل بدقة مناسبة. نستعرض سريعاً خطوات خوارزمية نيوتن، وهي خوارزمية تحسين لخوارزمية الانحدار الأعظم، مطبقة على تابع الكمون U انطلاقاً من النقطة (X_0, Y_0) بخطوة ثابتة قدرها α مع اعتماد معيار توقف التكرار من الشكل $|\alpha U(X_k, Y_k)| < \varepsilon$:

$$(X_0, Y_0) \rightarrow (X_k, Y_k) \quad .1$$

$$(X_k, Y_k) - \alpha H_U^{-1}(X_k, Y_k) \nabla U(X_k, Y_k) \rightarrow (X_{k+1}, Y_{k+1}) \quad .2$$

$$(X_{k+1}, Y_{k+1}) \quad .3 \quad \text{إذا كان } |\alpha H_U^{-1}(X_k, Y_k) \nabla U(X_k, Y_k)| < \varepsilon \text{ عندئذ يكون الحل}$$

وإلا نضع $(X_k, Y_k) \rightarrow (X_{k+1}, Y_{k+1})$ ونعود إلى الخطوة 2.

يتضح من الخطوات السابقة أن تحديد نقطة البداية هي أول خطوة في الخوارزمية. ويجب الانتباه إلى أن اختيار نقطة البداية قد يؤثر على نتيجة الخوارزمية، لأن طريقة نيوتن يمكن أن تتقارب من قيمة صغرى محلياً ولا يمكن للخوارزمية تمييز هذه الحالة. ولكن وكما تبين من المحاكاة العشوائية في طريقة الحل التحليلي بالتتابع المثالية، فإن حالة وجود قيمتين صغريين بالمطلق هي حالة نادرة. يمكن حساب قيمة تابع الكمون التي تعبر عن مجموع مربعات الأبعاد عن دوائر واعتبارها كمعيار للحكم على صحة الحل العددي.

ناقشنا كيف أن طريقة نيوتن قد تتقارب من نقطة مختلفة عن القيمة الصغرى المطلقة. للتقليل من احتمال التقارب من قيمة غير مقبولة، نعتمد في خوارزمتنا إلى اختيار نقطة بدء لخوارزمية نيوتن قريبة من الحل. وكما وضحنا أثناء استعراض نقاط قوة الحل بطريقة توابع الكمون، فإنه يمكن الاستفادة من الحل في خطوة العمل السابقة للروبوت المدروس كنقطة بدء للانحدار الأعظم. نبرر هذا الاختيار بحقيقة أن المتحولين (X, Y) هما في الحقيقة مركبتي شعاع سرعة الروبوت بالنسبة للجمل المطلق R_G مكتوباً بأشعة واحدة الجمل المصطلحة R_0 . وبما أن الروبوت المدروس هو روبوت غير جانبي، فإن تغيرات شعاع السرعة مستمرة بالنسبة للزمن. وبالتالي فإن الفرق في حل المسألة بين خطوتي عمل هو مقدار صغير نسبياً. ولكن يجب الانتباه إلى النقطة التالية: على الرغم من أن الانطلاق في طريقة نيوتن من نقطة الحل السابق يقلل من فرص التقارب من قيمة صغرى محلية مختلفة عن القيمة الصغرى المطلقة، فإن اعتماد حل خاطئ في أحد خطوات العمل سيؤثر على الحل في خطوات العمل التالية. لذلك يجب اتباع معيار للحكم على صحة الحل العددي الناتج عن طريقة نيوتن مستقل عن الحل في خطوات العمل السابقة. نقترح معياراً هو قيمة تابع الكمون عند الحل العددي الناتج عن طريقة نيوتن، ونبرر اقتراحنا بحقيقة أن قيمة تابع الكمون تعبر عن مجموع مربعات المسافات إلى الدوائر C_j . فمثلاً، بفرض أن نقطة الحل بطريقة نيوتن $(X_S(Z), Y_S(Z))$ من أجل قيمة محددة لـ Z تحقق $U(X_S(Z), Y_S(Z)) < \mu^2$ فيمكن التيقن من أن كل بعد عن دائرة من الدوائر C_j هو على الأكثر μ . لذلك، وعند كل تطبيق لخوارزمية نيوتن، يجب اختبار الحل ضد هذا المعيار، وفي حال الفشل يتم رفض الحل على أنه حل غير صالح. يجب أن يتم التوفيق بين قيمة μ المستخدم في معيار صلاحية الحل ومعيار توقف التكرار في خوارزمية نيوتن. إذ أن التقارب البطيء لانحدار الأعظم في جوار الحل قد يؤدي إلى حلول غير صالحة. تبين تجريبياً أن اختيار قيمة ε و μ بحيث: $\varepsilon = 10^{-2} \mu$ وذلك عند اختيار تابع كمون كلي مساوٍ لمجموع توابع الكمون المقترحة دون تثقيل. برزت الحاجة إلى اعتماد معيار للحكم على صلاحية الحلول العددية المنطلقة من الحل في خطوة العمل السابقة عند ملاحظة أنه، وفي بعض الحالات الخاصة، فإن قيمة صغرى محلياً تنشأ في موضع القيمة الصغرى المطلقة. ومع مرور الزمن، فإن هذه القيمة المحلية الصغرى تبقى في مكانها، في حين تتحرك القيمة الصغرى المطلقة. ينتج عن ذلك أن طريقة نيوتن تتقارب من القيمة الصغرى المحلية الجديدة ويعتمدها كحل صالح في خطوة العمل التالية. وبعد عدة خطوات عمل، تصبح القيمة الصغرى المطلقة (الحل الصحيح) بعيدة عن الحل العددي الناتج (القيمة الصغرى المحلية الجديدة). وهذا أدى إلى أخطاء غير مقبولة في رصد السرعة.

بناء على المناقشة السابقة، يمكن اعتبار المسألة A المتعلقة بإيجاد $(X_S(Z), Y_S(Z))$ التي تحقق:

$$U(X_S(Z), Y_S(Z), Z) = \min_{(X, Y) \in \mathbb{R}^2} U(X, Y, Z)$$

محلولة. ويمكن الاستفادة من حلها لحل المسألة B المتعلقة بإيجاد قيمة Z_S التي تحقق:

$$U(X_S(Z), Y_S(Z), Z_S) = \min_{(X,Y,Z) \in \mathbb{R}^3} U(X, Y, Z)$$

نلاحظ أن هذه المسألة هي مسألة أمثلة بمتحول وحيد هو Z . تبسيطاً لعلاقات الرياضياتية نعتمد الترميز $\tilde{U}(Z) = U(X_S(Z), Y_S(Z), Z)$ بشكل مشابه لحل المسألة A نستفيد من أن تغيرات Z_S مستمرة بالنسبة للزمن في معظم الأحيان، وذلك لأن Z_S تعبر عن سرعة دوران الجملة المصطلحة R_0 بالنسبة للجملة المطلقة R_G . وننوه إلى التعبير "مستمرة بالنسبة للزمن في معظم الأحيان"، إذ توجد حالة واحدة تعاني Z_S فيها من انقطاع. هذه الحالة هي لحظة حدوث انعكاس في توضع محاور الجملة R_0 بالنسبة للجملة R_G . إذ تتغير إشارة Z_S بشكل مفاجئ لحظة الانعكاس. نتذكر بأن محاور الجملة R_0 معرفة بموضع الروبوت الجار الأول والروبوت الجار الثاني. إذ يمر المحور x من الجار الأول، ويتوجه المحور y عمودياً على المحور x بحيث يقع الجار الثاني في نصف المستوي $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. لفهم اللحظة التي يحدث فيها الانعكاس، نتأمل خطأ مستقيماً يمر من الروبوت المدرس وجاره الثاني. رياضياً يمكن أن نعبر عن هذا المستقيم بالشكل:

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \right\}$$

حيث (x_0, y_0) موضع الروبوت المدرس بالنسبة للجملة المطلقة R_G و (x_2, y_2) موضع جاره الثاني بالنسبة للجملة المطلقة R_G . بديهياً، فإن الصياغة الرياضية السابقة تعبر عن مجموعة النقاط التي تقع على استقامة واحدة مع موضعي الروبوت المدرس وجاره الثاني. يقسم هذا المستقيم المستوي إلى نصفي مستوي W_+ , W_- معرفان بالعلاقة:

$$W_+ = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} > 0 \right\} \quad W_- = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} < 0 \right\}$$

عندما يعبر الجار الأول للروبوت المدرس من W_+ إلى W_- وبالعكس، فإن انعكاساً يحدث في توضع محاور R_0 بالنسبة لـ R_G . بما أن تغيرات مواضع الروبوتات بالنسبة للزمن هي تغيرات مستمرة، فيمكن الجزم بأن الانعكاس يحدث عندما يكون الروبوت المدرس وجاراه الأول والثاني على استقامة واحدة تقريباً. وعليه يمكن التنبؤ باللحظات التي يحدث فيها حدوث انعكاس في المحاور، وبالتالي يجب في هذه الحالة البحث عن قيمة Z_S دون إغارة أهمية لقيمتها في خطوة العمل السابقة. في غير هذه الحالة، يمكن الاستفادة من استمرار تغيرات Z_S لحصر مجموعة البحث عن الحل في مجال ضيق حول Z_S من خطوة العمل السابقة.

نناقش أولاً حالة عدم توافر قيمة Z_S من خطوة عمل سابقة (أو رفض القيمة بسبب احتمالية حدوث انعكاس في المحاور). نختار مجالاً مجال البحث عن Z_S هو اجتماع المجالات $[Z_-, Z_+]$ الخاصة بكل دائرة من الدوائر الأربعة والتي سبق وعرفناها في الحل بطريقة التتابع المثلثية. ليكن المجال $[Z_{Lower}, Z_{Upper}]$ هو اجتماع هذه المجالات. والسبب في هذا الاختيار هو أن أخطاء القياس وأخطاء الحسابات بالنقطة العائمة سوف تنعكس حتماً كأخطاء في الحل Z_S . وفي بعض الحالات الخاصة، فإن الحل قد يقع خارج تقاطع المجالات المحسوبة نظرياً. إضافة إلى ذلك، نعتمد على توسيع المجال إلى $E = [Z_{Lower} - \delta, Z_{Upper} + \delta]$ حيث $\delta > 0$ لضمان وقوع الحل Z_S ضمن مجال البحث.

تبين أثناء دراسة هذه المسألة أن التابع $\tilde{U}(Z)$ ليس وحيد الشكل unimodal على كامل مجال البحث بالضرورة. إذ توجد بعض الحالات التي يبلغ فيها $\tilde{U}(Z)$ أكثر من قيمة صغيرة محلياً على مجال البحث. لذلك يجب أن نتبع بحثاً دقيقاً Exhaustive Search من أجل إيجاد الحل. وعلى الرغم من أن التابع ليس وحيد الشكل بالضرورة، إلا أنه يمكن تقسيم مجال البحث إلى عدة مجالات يكون فيها التابع وحيد الشكل. نقتراح الخوارزمية التالية لإيجاد الحل:

$$1. \text{ نحدد مجال البحث } E = [Z_{Lower} - \delta, Z_{Upper} + \delta]$$

2. نحدد $n + 2$ عدد عينات البحث الدقيق.
3. نختار $n + 2$ عينة من Z ولتكن $(Z_k)_{k=0..n+1}$ منتظمة التباعد من ضمن مجال البحث E .
4. نحسب $\tilde{U}(Z_k)$ قيم التابع \tilde{U} عند العينات المختارة.
5. نحدد بالبحث الدقيق قيم $1 \leq k \leq n$ التي تحقق الشرط $\tilde{U}(Z_{k-1}) < \tilde{U}(Z_k) \wedge \tilde{U}(Z_k) > \tilde{U}(Z_{k+1})$. إذا تحقق الشرط من أجل k نقبل أن التابع \tilde{U} وحيد الشكل على المجال $e = [Z_{k-1}, Z_{k+1}]$ ، وندعو هذا المجال مجالاً مؤهلاً للحل. نحفظ بالمجالات المؤهلة للحل وليكن عددها m .
6. نطبق خوارزمية البحث الذهبي Golden-section Search على كل مجال من المجالات المؤهلة للحل ونحصل على m قيمة لـ Z يبلغ عندها التابع \tilde{U} قيمة صغرى محلياً. ندعو هذه القيم قيم Z المؤهلة للحل.
7. نختبر صلاحية القيم المؤهلة للحل وفق معيار صلاحية الحل بطريقة نيوتن، ونرفض القيم غير الصالحة.
8. إذا توافرت قيمة Z_S من خطوة العمل السابقة ولم يكن هناك احتمال لحدوث انعكاس، يكون الحل هو القيمة المؤهلة الأقرب إلى قيمة Z_S من خطوة العمل السابقة، وإلا يكون الحل هو القيمة المؤهلة التي يكون عندها \tilde{U} أصغرياً.

إن خوارزمية البحث الذهبي Golden-section Search أو البحث بالتقسيم بالعدد الذهبي، هي خوارزمية بحث عن القيم الصغرى (أو الكبرى) لتابع وحيد الشكل على مجال محدد. تعتمد طريقة البحث الذهبي على تضيق مجال البحث بأخذ عينات من Z وحساب قيمة التابع \tilde{U} عندها، ثم تضيق المجال بنسبة ثابتة في كل خطوة وذلك بحسب القيم المحسوبة. نلخص فيما يلي طريقة البحث الذهبي عن Z ضمن المجال $[Z_{k-1}, Z_{k+1}]$ التي يأخذ عندها التابع \tilde{U} قيمته الصغرى بخطأ قدره ξ :

$$1. Z_{k-1} \rightarrow a_1, Z_{k+1} \rightarrow a_4$$

$$2. a_4 - |a_4 - a_1|/\phi \rightarrow a_2, a_1 + |a_4 - a_1|/\phi \rightarrow a_3 \text{ حيث } \phi = 1.618\dots \text{ هو العدد الذهبي.}$$

3. إذا تحقق الشرط $|a_1 - a_4| \leq \xi$ عندها يكون الحل $Z_S = (a_1 + a_4)/2$ وتنتهي الخوارزمية، وإذا لم يتحقق الشرط نتابع في الخطوة التالية.

$$4. \text{ نحسب } \tilde{U}_2 = \tilde{U}(a_2), \tilde{U}_3 = \tilde{U}(a_3) \text{ ونختبر الشرط } \tilde{U}_2 < \tilde{U}_3 \text{، فإذا تحقق نضع:}$$

$$a_4 \rightarrow a_3, a_2 \rightarrow a_3, a_1 + |a_1 - a_3|/\phi \rightarrow a_2$$

وإلا نضع:

$$a_2 \rightarrow a_1, a_3 \rightarrow a_2, a_4 - |a_2 - a_4|/\phi \rightarrow a_3$$

ثم نعود إلى الخطوة 3.

بعد تطبيق الطرق السابقة الشرح، نحصل على كل من $(X_S(Z_S), Y_S(Z_S), Z_S)$. حيث تعبر $Z = \Omega_{R/G}$ سرعة دوران الجملة R_0 بالنسبة للجملة المطلقة R_G وذلك باصطلاح التوجه حسب الجملة R_0 . إضافة إلى الحصول على شعاع $Gv_0 = (X_S(Z_S), Y_S(Z_S))$ سرعة الروبوت المطلقة مكتوباً بأشعة جملة الإحداثيات R_0 . وفي هذه المرحلة، تتوفر للروبوت مواضع الروبوتات المجاورة إضافة إلى اتجاه تحركه بالنسبة إليها وسرعة دوران الجملة المصطلحة R_0 . وبالتالي تتوفر معلومات كافية لكي يتمكن الروبوت من ملاحقة التشكيل.

6.3 ملاحظة التشكيل

مقدمة

إن مرحلة اتخاذ الإجراءات هي المرحلة التي يحدّد فيها الروبوت الاتجاه الواجب التحرك فيه بغية تحقيق التشكيل، وذلك بعد رصد مواقع الروبوتات المجاورة وفق طبولوجيا التجاور ورصد سرعاتها التي تعبّر عن اتجاه تحركها. بما أن الهدف هو تحقيق مسافات مرجعية بين الروبوتات، فمن البديهي أولاً تجريب بعض المتحكّمات الشهيرة على النظام الذي تكون فيه المسافات بين الروبوتات متحوّلات حالة. من أشهر هذه المتحكّمات متحكّم التدرّج لتابع كمون، إذ نعرّف تابع كمون على كل متحوّل حالة (أي مسافة إلى روبوت مجاور محدد) بحيث يبلغ تابع الكمون حدّه الأدنى عندما تبلغ المسافة القيمة المرجعية. نستعمل نفس الاصطلاحات كما في القسم السابق. أي نفترض أن r_0 هو الروبوت المركزي، وهو موجود في الموقع $p_0 = (0, 0)$ ونفترض أن $(r_i)_{i=1..N}$ هي الروبوتات المجاورة للروبوت المركزي وفق طبولوجيا التجاور وهي موجودة في المواقع $(p_i)_{i=1..N}$ حيث p_i هو موقع الروبوت r_i ، ويمثّل الشعاع $p = (p_0, \dots, p_N) \in \mathbb{R}^{2(N+1)}$ مواضع الروبوتات. لتكن $d_{i,j}$ المسافة بين الروبوتين r_i و r_j والجار r_j المعرفة بـ $d_{i,j} = \|p_i - p_j\|$ ، ولتكن $\bar{d}_{i,j}$ المسافة المرجعية بين الروبوتين r_i و r_j المحددة بالتشكيل المرغوب وطبولوجيا التجاور. عندئذ نعرّف $U_{i,j} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تابع الكمون بين الروبوتين r_j و r_i بالعلاقة:

$$U_{i,j}(p) = (d_{i,j}^2 - \bar{d}_{i,j}^2)^2$$

إن هذا النمط من قوانين التحكّم مدروس بتعمق في الأدبيات كتابع للتحكّم بالتشكيل كاملاً حيث يتم تحديد إشارة التحكّم لجميع الروبوتات بالاعتماد على مواقع جميع الروبوتات معاً. وأثبت (Dorfler and Francis (2010) الاستقرار التقاربي الآسي في جوار الحالة المرجعية من أجل طبولوجيا تجاور صلبة أصغرياً. في حين اقترح (Dimarogonas and Johansson (2010) تابع كمون من الشكل:

$$U_{i,j}(p) = \frac{(d_{i,j}^2 - \bar{d}_{i,j}^2)^2}{d_{i,j}^2}$$

والفائدة من هذا التابع أن الكمون يسعى نحو اللانهاية عندما تسعى المسافة بين الروبوتين نحو الصفر، وبالتالي يمكن تفادي التصادم بين الروبوتات. المشكلة في هذا التابع أن الاستقرار المطلق مضمون فقط في حالة كانت طبولوجيا التجاور هي شجرة (بيان لا يحوي مسارات مغلقة)، وبالتالي لا يمكن الاستفادة من هذه النتيجة في هذا البحث لأن طبولوجيا التجاور هي بالضرورة ليست شجرة.

نعرّف تابع كمون بين الروبوت المركزي r_0 والروبوت r_j بالعلاقة:

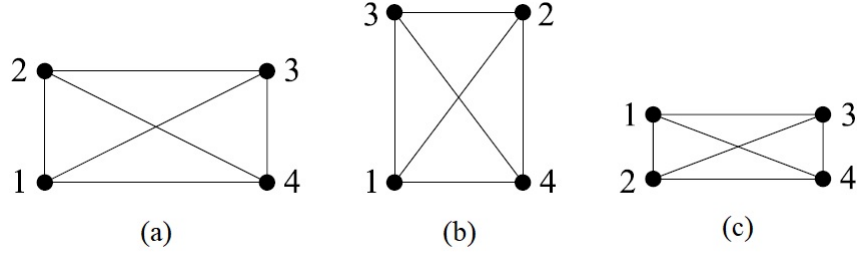
$$U_j(p_j) = (p_j^2 - \bar{d}_j^2)^2 = (x_j^2 + y_j^2 - \bar{d}_j^2)^2$$

بغية دفع الروبوتات باتجاه تحقيق المسافات المرجعية نعرّف قانون التحكّم بالكمون u بالعلاقة:

$$u_j(p) = -k_j \nabla (U_j(p_j)) = -4k_j (p_j^2 - \bar{d}_j^2) p_j$$

$$u(p) = \sum_{j=1}^N u_j(p) \quad (12.3)$$

حيث ∇ هو تابع التدرّج المعرّف على الفضاء \mathbb{R}^2 ذو البعد 2، و k_i ثوابت تتقيل. بحسب نتائج (Krick et al. (2009) فإن استخدام التحكّم بتدرّج تابع كمون قد يعطي نقاط استقرار غير مرغوبة في حال كان التشكيل مكوّن من 4 روبوتات متجاورة فيما بينها مثلى مثلى. يوضّح الشكل 22.3 نقاط الاستقرار غير المرغوبة التي توصل إليها (Summers et al. (2009



الشكل 22.3: حالات الاستقرار غير المرغوبة في متحكم الانحدار الأعظم بحسب (Summers et al. (2009).

عند تطبيق هذا المتحكم لملاحظة التشكيل الموضَّح في (a)، فإن إشارات التحكم تكون معدومة في نقطتي الاستقرار (b) و (c).

إن هذه الحالة هي بالفعل حالة أي روبوت مع جيرانه الملاحقين. وبالتالي لا يمكن الاعتماد بشكل كامل على التحكم بتدرج تابع كمون لدفع أي روبوت للتحرك لتحقيق التشكيل مع جيرانه الملاحقين. لذلك سوف ندعم متحكم التدرج بتابع كمون بحيث يمكن تفادي هذه الحالة، وذلك بالاستفادة من التحويلات المتجانسة لتحديد النقطة الصحيحة.

بحسب خوارزمية الرصد التي استعرضناها في 3.3 فإن الروبوت يشكّل تصوراً عن توضع جيرانه الملاحقين. خلال تكوين هذا التصور يستنتج الروبوت قيمة Ω وهي سرعة دوران محاور الجملة R_0 بالنسبة للجملة المطلقة R_G . يجب الانتباه إلى أن قيمة سرعة الدوران هي وفق اتجاه تحده جملة المحاور المصطلحة R_0 بحيث $\dot{\mathbf{u}}_{0x} = \Omega \mathbf{u}_{0y}$, $\dot{\mathbf{u}}_{0y} = -\Omega \mathbf{u}_{0x}$. يعني هذا أنه وعلى الرغم من معرفة سرعة الدوران واتجاهها بالنسبة للجملة R_0 فإن الروبوت لا يعرف اتجاه دورانه في الجملة المطلقة. إن عدم التعيين في اتجاه الدوران ناتج عن محدودية القياسات بالمسافات، وليس باستطاعة الروبوت تحديده بناء على المسافات فقط. نسعى فيما يلي لرصد اتجاه دوران الجملة R_0 بالنسبة للجملة R_G .

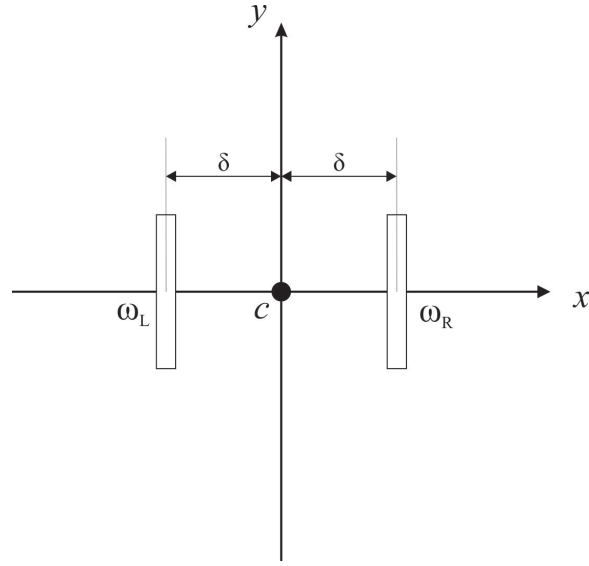
1.6.3 نمذجة الروبوتات

من الناحية العملية فإن الروبوتات اللاجانبية تتحرك بوساطة عجلتين على نفس المحور مفلتين بمحركين، بحيث يقع مركز الروبوت الحجمي في منتصف المسافة بين العجلتين. ليكن C مركز الروبوت. نرفق بالروبوت جملة إحداثيات $R_R(C, \mathbf{u}_{Rx}, \mathbf{u}_{Ry})$ مبدؤها C منطبق على مركز الروبوت ومحوريها \mathbf{u}_{Rx} , \mathbf{u}_{Ry} مرتبطان بالروبوت ويدوران معه بحيث ينطبق المحور x على محور العجلتين والاتجاه الموجب موجه باتجاه العجلة اليمنى. بناء على هذا الاختيار، تقع العجلة اليمنى على مسافة ولتكن $\delta > 0$ من مركز الروبوت. وتكون العجلة اليسرى واقعة على نفس المسافة بالاتجاه السالب.

يوضَّح 23.3 نموذجاً للروبوت الغير جانبي. يكون عندئذ :

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{R/R} &= \delta \mathbf{u}_{Rx} \\ \mathbf{p}_{L/R} &= -\delta \mathbf{u}_{Rx} \end{aligned} \quad (13.3)$$

حيث $\mathbf{p}_{R/R}$, $\mathbf{p}_{L/R}$ شعاعي موضع العجلتين بالنسبة للجملة R_R . نسمي الاتجاه الممثل بـ \mathbf{u}_{Ry} اتجاه الروبوت الأمامي. لتكن $R_G(O, \mathbf{u}_{Gx}, \mathbf{u}_{Gy})$ جملة إحداثيات مطلقة محاورها ثابتة، نضع الروبوت في البيئة بحيث تنتج محاور الجملة R_R بتطبيق دوران فقط (دون انعكاس) لمحاور الجملة R_G . ولتكن $\Omega_{R/G}$ سرعة دوران محاور الجملة R_R بالنسبة لمحاور الجملة R_G .



الشكل 23.3: نموذج الروبوت اللاجاني

ولتكن $\phi = (\widehat{u_{Ry}}, \widehat{u_{Gx}})$ الزاوية التي يصنعها اتجاه الروبوت الأمامي مع اتجاه المحور x الموجب في جملة الإحداثيات المطلقة. نعرّف سرعة دوران محاور الجملة R_R بالنسبة للجملة R_G بالشكل $\Omega_{R/G} = \dot{\phi}$. ليكن r نصف قطر العجلتين، ولتكن ω_R, ω_L السرعة الزاوية للعجلتين اليمنى واليسرى. بفرض العجلتين تتحركان بدون انزلاق، عندئذ تكون سرعة الروبوت عند كل من العجلتين بالنسبة للجملة المطلقة:

$$\mathbf{v}_{R/G} = \omega_R r \mathbf{u}_{Ry} \quad \mathbf{v}_{L/G} = \omega_L r \mathbf{u}_{Ry}$$

ويمكن استنتاج شعاعي سرعة العجلتين عن طريق استنتاج شعاع موضع كل عجلة:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{R/G} &= \mathbf{v}_{C/G} + \Omega \delta \mathbf{u}_{Ry} \\ \mathbf{v}_{L/G} &= \mathbf{v}_{C/G} - \Omega \delta \mathbf{u}_{Ry} \end{aligned} \quad (14.3)$$

حيث $\mathbf{v}_{C/G}$ سرعة مركز الروبوت بالنسبة للجملة المطلقة. بما أن الروبوت يتحرك بالسرعة المشتركة V فإن:

$$\mathbf{v}_{C/G} = V \mathbf{u}_{Ry} \quad (15.3)$$

ولكن بجمع المعادلتين 14.3 ينتج:

$$\mathbf{v}_{C/G} = \frac{\omega_R + \omega_L}{2} r \mathbf{u}_{Ry} \quad (16.3)$$

وبطرح المعادلتين يكون:

$$\frac{\omega_R - \omega_L}{2\delta} r = V \quad (17.3)$$

ومنه:

$$\Omega_{R/G} = \dot{\phi} = \frac{\omega_R - \omega_L}{2\delta} r = \frac{r\omega_R - V}{\delta} = \frac{V - r\omega_L}{\delta} \quad (18.3)$$

وبالتالي يكفي معرفة Ω لمعرفة قيمة كل من ω_R, ω_L . يتضح أن القيد على التحرك بسرعة ثابتة يحد من المتحولات التي يستطيع الروبوت التأثير بها إلى الزاوية ϕ فقط. إن المعلومة المتاحة للروبوت المدروس عن سرعته هي ${}^0\mathbf{v}_{C/G}$ سرعة الروبوت بالنسبة للجملة المطلقة (السرعة التي يسير فيها الروبوت) مكتوبة بأشعة جملة إحداثيات مصطلحة R_0 . يمكن للروبوت التحكم بسرعة دوران شعاع سرعته بالنسبة للجملة المطلقة ω ، كما يمكنه حساب سرعة دوران ${}^0\mathbf{v}_{C/G}$ عن طريق قياس الفرق بين خطوتي عمل وذلك بمعرفة الزمن بين خطوتي العمل، ولتكن سرعة الدوران هذه هي $\dot{\theta}_0$. في حال كانت أشعة واحدة الجملة R_0 تنتج عن دوران دون انعكاس لأشعة الجملة المطلقة، فإن:

$$\omega = \Omega_{R/G} + \dot{\theta}_0$$

أما في حالة نتجت أشعة الواحدة عن دوران وانعكاس فإن:

$$\omega = -\Omega_{R/G} + \dot{\theta}_0$$

وبالتالي، بمعرفة سرعة دوران الشعاع ${}^0\mathbf{v}_{C/G}$ عن طريق حساب الفرق بين خطوتي عمل، وبمعرفة $\Omega_{R/G}$ بعد حل مسألة رصد السرعة، وبما أن الروبوت قادر على التحكم بـ ω فيمكن اختبار أي من المعادلتين السابقتين محققة ومعرفة فيما إذا وجد انعكاس في توضع محاور الجملة R_0 بالنسبة للجملة المطلقة. لا شك أن اختبار المعادلتين يجب أن يعتمد معيار مساواة بين طرفي المعادلة يراعي أخطاء النقطة العائمة. وبالتالي تظهر حالات لا يمكن فيها تحديد أي من المعادلتين محققة بشكل موثوق (مثلاً، حالة كل الحدود معدومة تقريباً). لذلك يجب مراعاة هذه النقطة، وسنرى لاحقاً ما هي الحالات التي يحتمل عندها حدوث انعكاس في توضع الأشعة.

2.6.3 الإحداثيات المتجانسة والتحويلات الهندسية المتجانسة

إن الإحداثيات المتجانسة هي حيلة رياضية تسمح بتوسيع العمليات على الفضاءات الشعاعية بحيث يمكن تطبيق انسحاب على نقطة ما بضرب شعاع الموضع بمصفوفة. تسمح الإحداثيات المتجانسة بتعريف تحويلات هندسية في المستوى باستخدام ترميز يسهل العمليات الحسابية. نستعمل الإحداثيات العادية في هذا القسم لأن تمثيل الأشعة بأعداد عقدية لا يساعد في تبسيط العمليات الحسابية. فيما يلي نستعمل مصطلح نقطة للدلالة على أي عنصر من \mathbb{R}^2 وهو مكافئ للمصطلح شعاع.

ليكن الشعاعين $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ حيث $\mathbf{v} = (x, y)^T, \mathbf{u} = (a, b)^T$ ، وليكن التحويل الخطي $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ الممثل

بالمصفوفة $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbf{M}[\mathbb{R}^2]$ ، عندئذ يكون تمثيل كل من \mathbf{v}, \mathbf{u} و \mathbf{A} بالإحداثيات المتجانسة هو:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن الإحداثيات المتجانسة تحافظ على المسافات (الإقليدية) لأن

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (1 - 1)^2}$$

يمكن باستخدام الإحداثيات المتجانسة حساب المقدار $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{u}$ عن طريق ضرب الشعاع \mathbf{v} بالمصفوفة \mathbf{M} المعرفة بالشكل:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a \\ a_{21} & a_{22} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19.3)$$

إن المصفوفة M تمثل تحويلاً هندسياً يتضمن انسحاباً وتحويلاً خطياً. وهي حالة أعم من التحويلات الهندسية المتاحة في المستوى. ندعو التحويل المعرف بمصفوفة من الشكل 19.3 تحويلاً هندسياً متجانساً. وتكون $HM [\mathbb{R}^2]$ مجموعة التحويلات الهندسية المتجانسة على الفضاء \mathbb{R}^2 . ندعو الشعاع u شعاع الانسحاب وندعو المصفوفة A مصفوفة الأساس لأن أعمدتها هي صور أشعة الأساس القانوني بدون انسحاب. لا شك أن تعيين أي تحويل هندسي متجانس يتطلب تعيين 6 متحولات، تمثل هذه المتحولات مصفوفة الأساس وشعاع الانسحاب. نسعى فيما يلي لاستنتاج علاقة تسمح بتعيين تحويل هندسي متجانس مجهول انطلاقاً من معرفة صور ثلاثة نقاط وفق هذا التحويل. نبدأ بتعريف مفهوم النقاط على استقامة واحدة.

تعريف (25): النقاط الواقعة على استقامة واحدة

نقول عن النقاط $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^2$ أنها تقع على استقامة واحدة إذا وفقط إذا

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

وإلا نقول عنها أنها ليست على استقامة واحدة.

من البديهي أن تساوي أي نقطتين من النقاط p_1, p_2, p_3 شرط كافٍ لكي تقع النقاط الثلاثة على استقامة واحدة. تبين المبرهنة التالية كيفية تعيين تحويل هندسي متجانس مجهول بمعرفة صور ثلاثة نقاط لا تقع على استقامة واحدة.

مبرهنة (8):

ليكن M تحويلاً هندسياً متجانساً مجهولاً ، ولتكن النقاط $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3 \in \mathbb{R}^2$ ليست على استقامة واحدة بحيث $p_i = (x_i, y_i)^T$. ولتكن النقاط p_1, p_2, p_3 صور النقاط $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3$ وفق M بحيث $\hat{p} = (\hat{x}_i, \hat{y}_i)$. عندئذ يعطى التحويل M بالعلاقة:

$$M = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \\ \hat{y}_1 & \hat{y}_2 & \hat{y}_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

البرهان:

نكتب بحسب التحويل M فإن:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \\ \hat{y}_1 & \hat{y}_2 & \hat{y}_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{Q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_Q$$

من الواضح بحسب الفرض أن:

$$\det \hat{Q} = \begin{vmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \hat{x}_3 \\ \hat{y}_1 & \hat{y}_2 & \hat{y}_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

لأن النقاط ليست على استقامة واحدة، وبالتالي تقبل جملة المعادلات السابقة حلاً وحيداً نحسبه بالضرب بمقلوب المصفوفة Q من اليمين فينتج:

$$M = Q\hat{Q}^{-1}$$

وهو المطلوب.

بحساب مقلوب المصفوفة \hat{Q} نجد أن:

$$\hat{Q}^{-1} = \frac{1}{\hat{x}_1(\hat{y}_2 - \hat{y}_3) + \hat{x}_2(\hat{y}_3 - \hat{y}_1) + \hat{x}_3(\hat{y}_1 - \hat{y}_2)} \begin{bmatrix} \hat{y}_2 - \hat{y}_3 & \hat{x}_3 - \hat{x}_2 & \hat{x}_2\hat{y}_3 - \hat{x}_3\hat{y}_2 \\ \hat{y}_3 - \hat{y}_1 & \hat{x}_1 - \hat{x}_3 & \hat{x}_3\hat{y}_1 - \hat{x}_1\hat{y}_3 \\ \hat{y}_1 - \hat{y}_2 & \hat{x}_2 - \hat{x}_1 & \hat{x}_1\hat{y}_2 - \hat{x}_2\hat{y}_1 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن المقلوب مكوّن من حدود خطية بسيطة يمكن حسابها بسهولة، وبالتالي لن يستغرق حساب المقلوب وقتاً طويلاً أثناء التنفيذ.

مبرهنة(9): التحويل الهندسي المتجانس المحافظ على المسافات

ليكن M تحويلاً هندسياً متجانساً، تكون القضيّتين التاليتين متكافئتين:

$$1. \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\| = \|M\mathbf{v}_1 - M\mathbf{v}_2\|$$

2. مصفوفة أساس التحويل M هي مصفوفة متعامدة.

البرهان:

$$\begin{aligned} \|M\mathbf{v}_1 - M\mathbf{v}_2\|^2 &= \|\mathbf{A}\mathbf{v}_1 + \mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}\|^2 \\ &= \|\mathbf{A}\mathbf{v}_1 - \mathbf{A}\mathbf{v}_2\|^2 \\ &= (\mathbf{A}\mathbf{v}_1 - \mathbf{A}\mathbf{v}_2)^T (\mathbf{A}\mathbf{v}_1 - \mathbf{A}\mathbf{v}_2) \\ &= (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \end{aligned}$$

وإذا فقط إذا كانت مصفوفة الأساس A متعامدة فإن:

$$\|M\mathbf{v}_1 - M\mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|$$

وهو المطلوب.

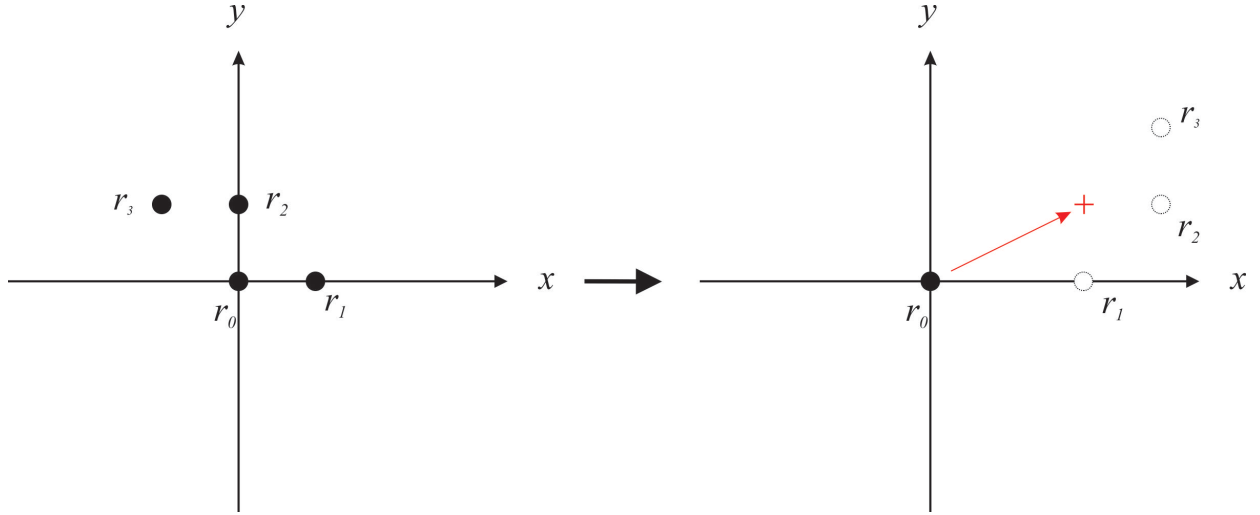
يجدر الانتباه أنه في حال كانت مصفوفة أساس التحويل الهندسي المتجانس مصفوفة متعامدة، كان التحويل تحويلاً هندسياً أو تحويلاً هندسياً انعكاسياً.

3.6.3 تحديد النقطة الملاحقة بالتحويلات الهندسية المتجانسة

تقوم خوارزمية الملاحقة على إيجاد التحويل الهندسي المتجانس الذي يحول الجيران الملاحقين من مواضعهم المرجعية إلى مواضعهم المرصودة. ثم حساب صورة موضع الروبوت المركزي المرجعي (أي المبدأ) وفق هذا التحويل. تكون صورة الموضع هي النقطة التي يجب على الروبوت المركزي ملاحقتها لكي يتحرك مع جيرانه وفق التشكيل المطلوب. نستنتج التحويل الهندسي المتجانس الذي يحول مواضع الروبوتات المرجعية إلى المواضع المرصودة كما سبق وشرحنا في 2.6.3. بفرض $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3$ المواضع المرجعية للروبوتات الملاحقة، وبفرض p_1, p_2, p_3 المواضع المرصودة للروبوتات الملاحقة، فبناء على التعريف السابق، تعطى النقطة الملاحقة بالعلاقة:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \frac{1}{\hat{x}_1(\hat{y}_2 - \hat{y}_3) + \hat{x}_2(\hat{y}_3 - \hat{y}_1) + \hat{x}_3(\hat{y}_1 - \hat{y}_2)} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{y}_2 - \hat{y}_3 & \hat{x}_3 - \hat{x}_2 & \hat{x}_2\hat{y}_3 - \hat{x}_3\hat{y}_2 \\ \hat{y}_3 - \hat{y}_1 & \hat{x}_1 - \hat{x}_3 & \hat{x}_3\hat{y}_1 - \hat{x}_1\hat{y}_3 \\ \hat{y}_1 - \hat{y}_2 & \hat{x}_2 - \hat{x}_1 & \hat{x}_1\hat{y}_2 - \hat{x}_2\hat{y}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\hat{x}_1(\hat{y}_2 - \hat{y}_3) + \hat{x}_2(\hat{y}_3 - \hat{y}_1) + \hat{x}_3(\hat{y}_1 - \hat{y}_2)} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_2\hat{y}_3 - \hat{x}_3\hat{y}_2 \\ \hat{x}_3\hat{y}_1 - \hat{x}_1\hat{y}_3 \\ \hat{x}_1\hat{y}_2 - \hat{x}_2\hat{y}_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20.3)$$

مثال(10):



الشكل 24.3: مثال لنقطة ملاحظة بتحويل متجانس بدون تقييس

لتكن المواضع المرجعية للروبوتات الملاحظة معطاة بالشكل التالي:

$$\hat{p}_1 = (1, 0) \quad \hat{p}_2 = (0, 1) \quad \hat{p}_3 = (-1, 1)$$

ولتكن المواضع المرصودة:

$$p_1 = (2, 0) \quad p_2 = (3, 1) \quad p_3 = (3, 2)$$

عندئذ تكون النقطة الملاحظة:

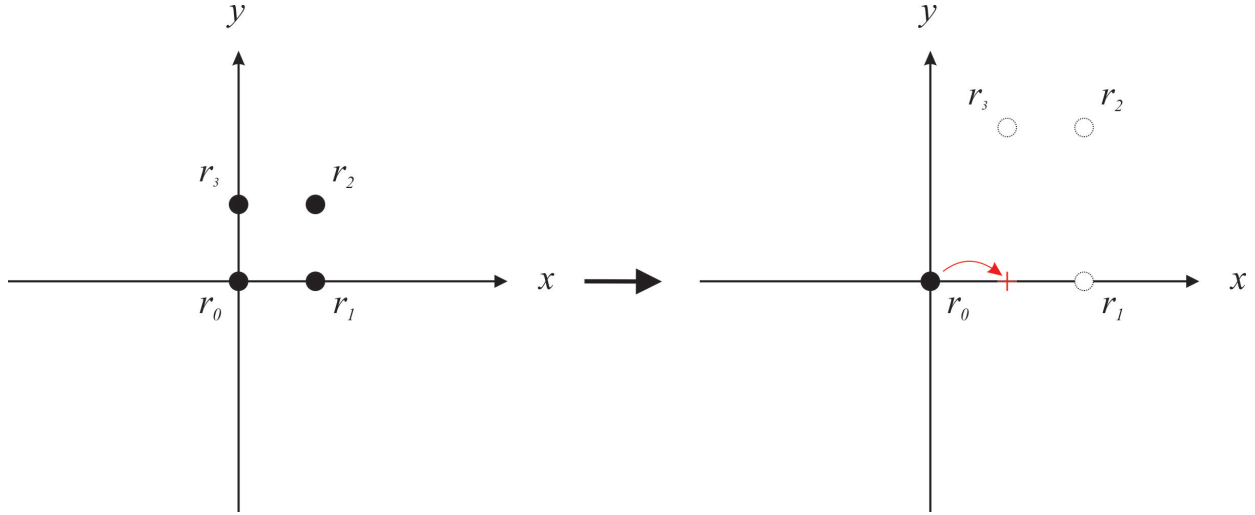
$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{1 \cdot (1 - 1) + 0 \cdot (1 - 0) + (-1) \cdot (0 - 1)} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

إن هذا المثال موضَّح في الشكل 24.3 .

مثال(11):

لتكن المواضع المرجعية للروبوتات الملاحظة معطاة بالشكل التالي:

$$\hat{p}_1 = (1, 0) \quad \hat{p}_2 = (1, 1) \quad \hat{p}_3 = (0, 1)$$



الشكل 25.3: مثال لنقطة ملاحقة بتحويل متجانس مع تقييس

ولتكن المواضع المرصودة:

$$p_1 = (0, 2) \quad p_2 = (-2, 2) \quad p_3 = (-2, 1)$$

عندئذ تكون النقطة الملاحقة:

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{1 \cdot (1-0) + 1 \cdot (1-0) + 0 \cdot (0-1)} \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

إن هذا المثال موضَّح في الشكل 25.3 .

تظهر من المثال الأخير مشكلة في استخدام التحويلات المتجانسة لتحقيق التشكيل. تتجلى هذه المشكلة في حالة كان التحويل من المواضع المرجعية إلى المواضع المرصودة يتضمن تقييساً، ففي هذه الحالة يسعى الروبوت إلى النقطة الملاحقة ويستقر فيها حتى لو لم يتحقق التشكيل. لذلك نعلم إلى الاستفادة من إشارة التحكم الخاصة بمتحكم تدرج الكمون.

4.6.3 ملاحقة التشكيل

إن مسألة ملاحقة التشكيل في هذا البحث مركبة من مسألتين فرعيتين. مسألة التحرك من أجل بلوغ النقطة المستهدفة المحددة بالتحويلات المتجانسة، ومسألة التحرك من أجل تحقيق مسافات مرجعية بين الروبوت المدرس والروبوتات المجاورة له وفق طبولوجيا التجاور. فيما يخص مسألة تحقيق المسافات المرجعية، فإن المتحكم المستخدم هو متحكم الانحدار الأعظم لتتابع

الكمون المدروس بتعمق في (Dorfler and Francis (2010) و (Dimarogonas and Johansson (2010). ولكن (Krick et al. (2009) أثبت وجود نقاط استقرار غير مرغوبة (لا تحقق التشكيل المستهدف) لهذا المتحكم. تبين فيه ذلك البحث أن نقاط الاستقرار تنتج في التشكيلات المكونة من أربع روبوتات متجاورة فيما بينها، ويسعى أحد هذه الروبوتات للتحرك لتحقيق مسافات مرجعية مع جيرانه الثلاثة. أعطي كمثال على حالة استقرار غير مرغوبة حالة ملاحقة تشكيل عبارة عن مستطيل تقع الروبوتات الأربعة على رؤوسه. إذا بدلنا بين روبوتين يقعان على رأسين متجاورين في هذا المستطيل، فإن الروبوت المتحرك لملاحقة التشكيل سوف يكون في وضع استقرار على الرغم من أن التشكيل مختلف عن التشكيل المرغوب. ولهذا السبب، عمدنا في هذا البحث إلى تهجين هذا المتحكم مع متحكم آخر يراعي التشكيل المستهدف وقادر على التغلب على وضعية الاستقرار غير المرغوبة. إن النقطة المستهدفة المستنتجة بالتحويلات المتجانسة تختلف عند التبديل بين موضعي روبوتين في التشكيل المستطيل، وبالتالي فإن أي متحكم يلاحق النقطة المستهدفة لن يعاني من حالة الاستقرار غير المرغوبة. اخترنا متحكماً مقترحاً في (Zambelli et al. (2013) مخصصاً للروبوتات غير الجانبية. ليكن لدينا روبوت في المستوى ثنائي البعد في النقطة (x, y) وموجّهاً باتجاه يصنع زاوية قدرها θ مع المحور x . تعطى المعادلات الحركية للروبوت بالمعادلات:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cos \theta \\ \dot{y} &= v \sin \theta \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \quad (21.3)$$

حيث v سرعة سير الروبوت. نفترض أن الروبوت قادر على التحكم بـ ω سرعة دورانه إضافة إلى التحكم بسرعه v . يدفع المتحكم المستعمل الروبوت باتجاه التحرك إلى المبدأ $(0, 0)$ بحيث يتوجه الروبوت في المبدأ باتجاه المحور x . يعطي المتحكم المستعمل إشارات تحكم بسرعة الدوران وسرعة السير تحسب عن طريق:

$$\begin{aligned} v &= k_1 r \cos \gamma \\ \omega &= k_2 \gamma + \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{\gamma} (\gamma + k_3 \delta) \end{aligned} \quad (22.3)$$

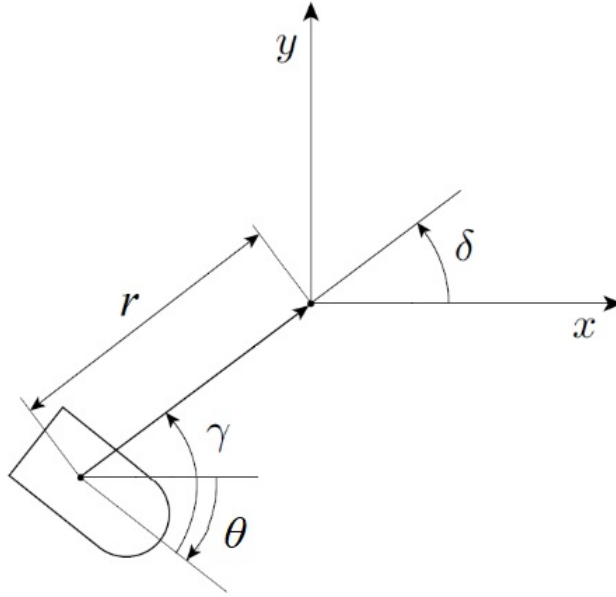
حيث $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، $k_1 > 0$ ، $k_2 > 0$ ، $k_3 > 0$ ، δ هي الزاوية التي يصنعها شعاع موضع الروبوت (x, y) مع المحور x و γ هي الزاوية المقاسة من اتجاه تحرك الروبوت إلى المبدأ. يوضح الشكل 26.3 كل من الزوايا السابقة. يتضح أنه في حال كان الروبوت في المبدأ، فإن الزاويتين γ و δ غير معرفتين.

إن الحد الذي يحوي δ من معادلة w يعنى بدفع الروبوت للتوجه باتجاه المحور x عندما يصل إلى المبدأ، ولكن في بحثنا، ليس هناك حاجة لتحديد توجه الروبوت عند وصوله إلى النقطة الملاحقة في التشكيل، لذلك يمكن تبسيط قانون التحكم إلى الشكل:

$$\begin{aligned} v &= k_1 r \cos \gamma \\ \omega &= k_2 \gamma + k_1 \cos \gamma \sin \gamma \end{aligned} \quad (23.3)$$

وبالتالي يدفع المتحكم المعدل الروبوت باتجاه المبدأ دون تعيين توجه بعد بلوغ المبدأ. يمكن بسهولة برهان استقرار هذا المتحكم عن بطريقة Lyapunov. نختار تابع Lyapunov من الشكل:

$$V = \frac{1}{2}(r^2 + \gamma^2)$$

الشكل 26.3: الزوايا θ, γ, δ

حيث نفترض أن كل من r و γ محدود. يكون $V \geq 0$ ، وهندسياً، يمكن بسهولة استنتاج أن :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -v \cos \gamma \\ \dot{\gamma} &= \frac{v}{r} \sin \gamma - \omega \end{aligned}$$

و بالتالي يكون:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= r\dot{r} + \gamma\dot{\gamma} \\ &= -rv \cos \gamma + \gamma \left(\frac{v}{r} \sin \gamma - \omega \right) \\ &= -k_1 r^2 \cos^2 \gamma + \gamma (k_1 \cos \gamma \sin \gamma - k_2 \gamma - k_1 \cos \gamma \sin \gamma) \\ &= -k_1 r^2 \cos^2 \gamma - k_2 \gamma^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (24.3)$$

وانطلاقاً من كون المشتق بالنسبة للزمن معرّفًا سالباً فإن النظام مستقر بحسب Lyapunov . إن هذا المتحكم مناسب للحالة المدروسة، فمن ناحية فإن إشارات التحكم v, ω هي فعلاً الإشارات التي يمكن للروبوتات الجانبية المنمذجة التحكم بها. ومن ناحية أخرى، فإن قياس كل من r و γ سهل انطلاقاً من المعلومات المتاحة للروبوت المدروس. إذ أن المعلومات المتاحة هي النقطة الملاحقة وشعاع سرعة الروبوت بالنسبة لجملة الإحداثيات المصطلحة R_0 . ولكن يجب الانتباه إلى أن قانون التحكم غير معرّف في حالة $r = 0$ ، وعليه يجب مراعاة ذلك أثناء التطبيق العملي. وبالتحديد، فإنه عند اقتراب الروبوت من النقطة المستهدفة، فإن الأخطاء الحسابية البسيطة في حساب النقطة المستهدفة سوف تنعكس كأخطاء كبيرة في حساب الزاوية γ .

المتحكم بالانحدار الأعظم الذي سبق واستعرضناه في مقدمة هذا القسم يعطي إشارة تحكم هي شعاع سرعة الروبوت، ولكن الروبوت غير قادر على التحكم بشعاع سرعته بشكل مباشر. لذلك يجب إضافة متحكم لملاحقة شعاع السرعة الناتج عن متحكم

الانحدار الأعظم. ملاحقة هذا الشعاع هي مسألة التحكم بنظام بسيط مكون من مكامل من الدرجة الأولى بالنسبة للزاوية، أما بالنسبة للطويلة فيمكن التحكم بها مباشرة.

بعد الحصول على إشارتي التحكم بالسرعة الزاوية وسرعة سير الروبوت بشكل منفصل من متحكمي الانحدار الأعظم و النقطة المستهدفة، ندمج الإشارات عن طريق أخذ وسطي مقل. نستغل هذا الوسطي المقل للتغلب على حالة عدم التعيين في متحكم النقطة المستهدفة، عن طريق تخفيف إشارة التحكم الناتجة عنه عندما تكون r صغيرة. وبالعكس، فيجب زيادة ثقل إشارة التحكم الناتجة عن متحكم النقطة المستهدفة عندما تكون r كبيرة بشكل كافٍ لتحقيق الغرض من ذلك المتحكم وهو تقادي حالات الاستقرار غير المرغوبة في متحكم الانحدار الأعظم.

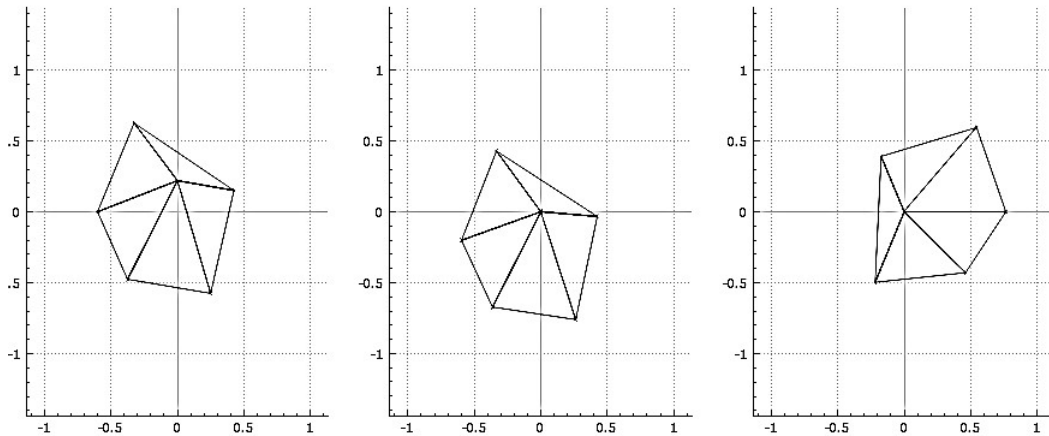
نتائج المحاكاة

أجريت محاكاة لعمل الخوارزمية على برنامج V-REP، وهو برنامج يستخدم لغة Lua لبرمجة الروبوتات الافتراضية في المحاكاة. تتضمن المحاكاة بيئة تتضمن أرضاً تتحرك عليها مجموعة من الروبوتات وكأنها مستوى ثنائي البعد. يتيح البرنامج استخدام نماذج لروبوتات شهيرة لتسهيل مهمة التجريب ولتوفير زمن نمذجة الروبوتات. استُخدم روبوت e-puck لأنه روبوت غير جانبي مفتوح المصدر ومستخدم بكثرة في الأبحاث العلمية، ولكن لم نركز على صحة أو دقة النموذج لأن الهدف من المحاكاة هو اختبار عمل الخوارزمية في رصد الجوار ورصد سرعات الجيران وملاحقة التشكيل.

تتمثل الخوارزمية المختبرة في هذه المحاكاة برمز برمجي يتم تنفيذه بشكل تكراري لكل روبوت في المحاكاة. تحصل هذه الخوارزمية على القراءات من جزء مستقل عن الرمز الخاص بها مراعاة للفصل بين الأقسام الوظيفية في المحاكاة. يمكن أن نقسم المحاكاة إلى ثلاثة أجزاء، جزء يختبر خوارزمية رصد الجوار، وجزء يختبر خوارزمية رصد السرعات، وجزء يختبر الخوارزمية كاملة. تم اختبار خوارزمية رصد الجوار كبدية على برنامج V-REP، وذلك لأنها أول ما تم إنجازه في هذا البحث. تم اختبار خوارزمية رصد السرعة على برنامج Mathematica نظراً للحاجة للحصول على حلول عددية دقيقة نعتبرها مرجعاً للمقارنة مع نتائج الخوارزمية المقترحة. وأخيراً، تم اختبار عمل الخوارزمية بشكل كامل في ملاحقة تشكيل مرغوب مكون من 4 روبوتات. تتضمن الأقسام التالية سير عملية محاكاة كل جزء على حدا.

1.4 خوارزمية رصد الجوار

تعمل خوارزمية رصد الجوار على تحصيل قياسات المسافات الواردة من الحساسات واستنتاج توضع الجيران بالنسبة للروبوت المركزي وفق جملة محاور مصطلحة. وهي أول خطوة يجب على الروبوت القيام بها في كل تكرار. لفصل الرمز البرمجي الخاص بتحصيل القياسات عن الرمز الخاص بالمعالجة، تم كتابة رمز برمجي خاص يعمل عمل كاميرا موضوعاً أعلى البيئة قادرة على رصد كافة المعلومات عن الروبوتات، ويُرسَل لكل روبوت القياسات الخاصة به. بداية اختبرت الحالة البسيطة التي يكون فيها الجيران ثابتين، علماً أنها حالة مستحيلة عملياً لأنه ينبغي على الروبوتات جميعها التحرك بسرعة ثابتة غير معدومة وهي السرعة المشتركة. بملاحظة أن خوارزمية رصد الجوار لا ترصد السرعة وتعتمد على قياسات مسافات فقط، يمكن أن نتأكد

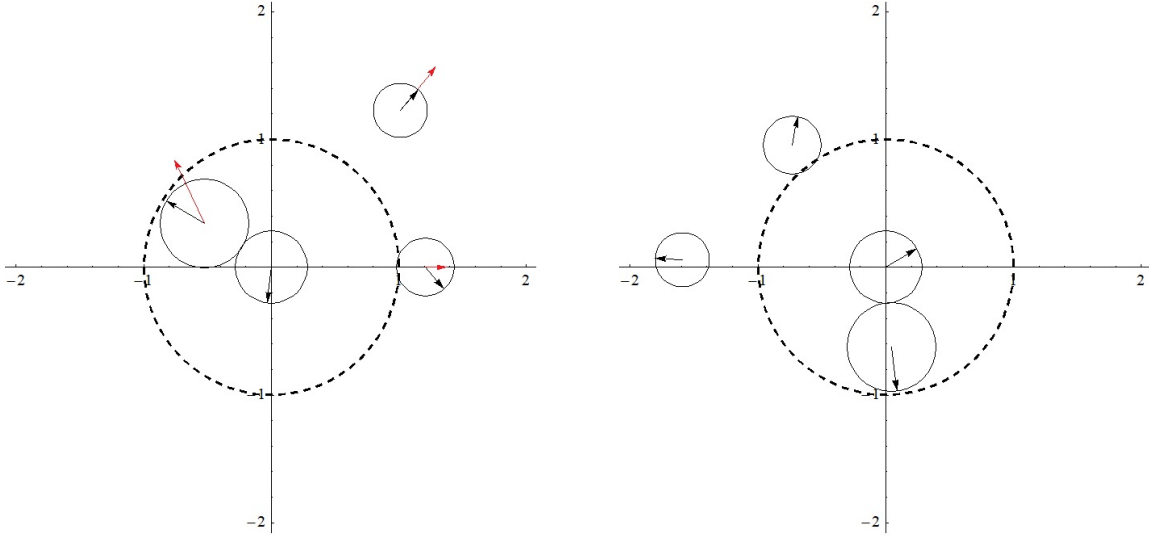


الشكل 1.4: نتائج محاكاة خوارزمية رصد الجوار

أن ثبات العملاء لا يؤثر على نتائج المحاكاة. يوضح الشكل 3.4 توضع الروبوت المركزي في الواقع وكما نتج عن خوارزمية رصد الجوار. إلى اليسار، يظهر التوزع كما يبدو لمراقب خارجي وهو يعبر عن الحالة الواقعية. إلى اليمين، يظهر في الشكل التصور الذي كونه الروبوت عن جواره. إذ يظهر بوضوح انطباق أحد مواضع الجيران على المحور x وهو الاصطلاح المستخدم في هذه الخوارزمية. في المنتصف، تظهر نتيجة خوارزمية رصد الجوار مع دوران مناسب بحيث يمكن المقارنة بينها وبين الحالة الواقعية إلى اليسار. يبدو بشكل واضح أن الخوارزمية قادرة على رصد الجوار بشكل صحيح في هذه الحالة.

2.4 خوارزمية رصد السرعة

لاختبار خوارزمية رصد السرعة تم إجراء محاكاة بسيطة على برنامج V-REP انطلاقاً من عينات عشوائية مولدة ببرنامج Mathematica. حيث تم توليد مواضع عشوائية للروبوتات الأربعة إضافة لتوليد سرعة عشوائية لكل منها. وبعد نقل العينة من برنامج Mathematica إلى برنامج V-REP يدوياً، تم تشغيل خوارزمية رصد السرعة على برنامج V-REP. في هذا القسم سوف نوضح النتائج المتعلقة بعينة واحدة، مع العلم أنه تم اختبار الخوارزمية على العديد من العينات وتم تعديلها بناء على هذه الاختبارات. فمثلاً، اعتمد معيار قبول الحل بطريقة نيوتن واختيار الحل الأقرب للحل في خطوة العمل السابقة نتيجة ظهور مشاكل في الرصد في بعض العينات المختبرة. تم توليد عينة نهتم فيها بقيمتين اثنتين، شعاع سرعة الروبوت المدروس بالنسبة للجملة المطلقة مكتوباً بأشعة الجملة R_0 وسندعوه v_{actual} ، وسرعة دوران محاور الجملة R_0 بالنسبة لمحاور الجملة المطلقة وسندعوه Ω_{actual} . كانت قيمه هذين المقدارين $\Omega_{actual} = (-0.303639, -2.81513) \times 10^{-1} \text{ m.s}^{-1}$ ، $9.153 \times 10^{-2} \text{ rad.s}^{-1}$ ، حيث تم حساب قيمة Ω_{actual} عن طريق حساب سرعة الجار الأول بالنسبة للروبوت المدروس وأخذ مسقط هذه السرعة على المحور y وحساب سرعة الدوران بمعرفة المسافة بين الروبوتين المدروسين والأول. يوضح الشكل 2.4 توزع الروبوتات في الجملة المطلقة. في حين يوضح الشكل 2.4 ب المواضع والسرعات بعد إجراء دوران مناسب للحصول على التوزع كما يرصده الروبوت. توضح الأسهم السوداء السرعات كما هي في الجملة المطلقة، وتوضح الأسهم الحمراء السرعات كما يرصدها الروبوت. نلاحظ أنه لا يوجد سهم يعبر عن سرعة الروبوت المدروس كون الجملة المصطلحة R_0 التي يتم فيها الرصد هي جملة مرتبطة بالروبوت المدروس. نلاحظ أيضاً أن سرعة الجار الأول منطبقة على المحور الأفقي x ، حيث نميز الجار الأول بأنه الروبوت المتوضع على المحور x بالاتجاه الموجب اعتباراً من المبدأ، وذلك كما اصطلاحنا تعريف

(ب) المجموعة توزع روبوتات العينة المدروسة في الجملة R_0

(أ) توزع روبوتات العينة المدروسة في الجملة المطلقة

الجملة R_0 .

تأخذ خوارزمية رصد السرعة سرعة الروبوتات المرصودة عن طريق رصد تغيرات المواضع بين خطوتي عمل، حيث يتم رصد المواضع باستعمال خوارزمية رصد الجوار. وتستفيد من المواضع المرصودة أيضاً في عملها. نتج عن خوارزمية رصد السرعة النتائج التالية:

$$\begin{aligned}(X_S(Z_S), Y_S(Z_S)) &= (-0.292, -2.82) \times 10^{-1} \text{ m.s}^{-1} \\ Z_S &= 9.48 \times 10^{-2} \text{ rad.s}^{-1} \\ U(X_S(Z_S), Y_S(Z_S), Z_S) &= 6.70 \times 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-2}\end{aligned}$$

بداية، نلاحظ أن شعاع السرعة المرصود $(X_S(Z_S), Y_S(Z_S))$ قريب جداً من القيمة الحقيقية بخطأ طويلة نسبي قدره $|v_{observed} - v_{actual}|/|v_{actual}| = 4.87 \times 10^{-3}$ وخطأ زاوية قدره $(v_{observed}, v_{actual}) = 4.33 \times 10^{-3} \text{ rad}$. وهي نتائج جيدة جداً توضح أن الحل العددي يتقارب بشكل جيد من الحل الصحيح. استعمل في تطبيق خوارزمية رصد السرعة معيار توقف لطريقة نيوتن قدره $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$ ، كما أضفنا شرط توقف آخر وهو حد عدد التكرارات بـ 20 تكرار. إن نيوتن مناسبة لحل مسائل التربيعة الأصغرية، وإيجاد القيمة الصغرى لتابع الكمون في مسألة رصد السرعة هو بالفعل مسألة تربيعة أصغرية. إضافة إلى ذلك، فإن التجارب العملية على عدد كبير من العينات العشوائية لمسألة رصد السرعة لم تسفر عن أي حالة تتجاوز فيها التكرارات 20 تكراراً. وأخيراً، بفرض أن التكرار توقف بسبب عدد التكرارات الكبير، فإما أن يكون الخطأ صغيراً ومقبولاً أو أن يفرض الحل خلال عملية انتقاء الحلول الصالحة وفق معيار قبول الحل. في حالتنا فقد اخترنا معيار قبول للحل قدره $\mu^2 = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$ ، وقد أعطى نتائج جيدة جداً.

3.4 محاكاة الخوارزمية الكاملة

تم اختبار عمل الخوارزمية في العديد من الحالات، وساهمت نتائج هذه الاختبارات في تحديد الشكل العام للخوارزمية وتحسينها. اخترنا في هذا القسم حالة نموذجية هي ملاحقة تشكيل مربع الشكل يتحرك منعطفاً نحو اليمين. ينطلق الروبوت الملاحق للتشكيل من نقطة بعيدة عن التشكيل المرغوب، ويتحرك للحاق بالتشكيل والمحافظة عليه. تمت هذه المحاكاة بشكل كامل على

برنامج V-REP ، حيث تم تحديد ثلاثة نقاط مرجعية تمثل الروبوتات جيران الروبوت المدروس. وتمكن الروبوت من اللحاق بالتشكيل بسرعة والمحافظة عليه حتى نهاية المحاكاة دون مشاكل. برزت بعض الصعوبات التقنية أثناء المحاكاة أهمها:

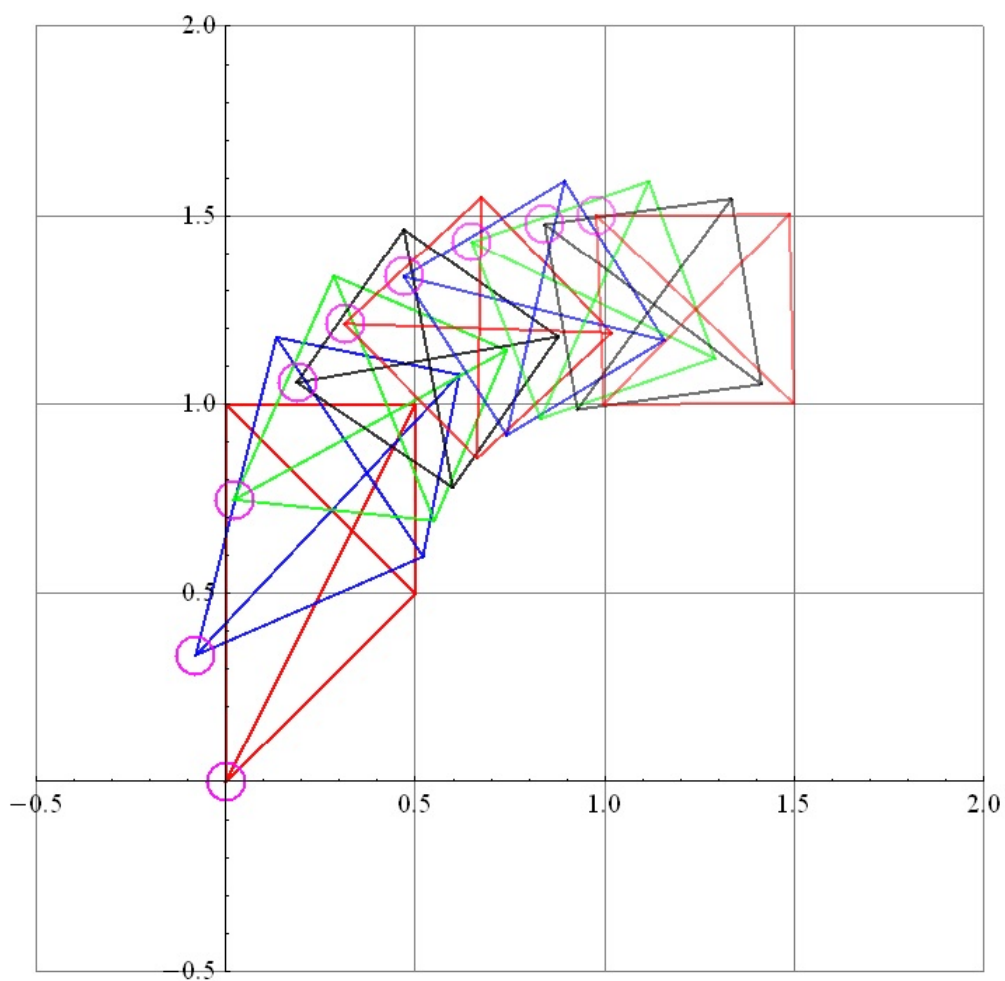
1. استعمل في المحاكاة نموذج عن روبوت e-puck مرفق ببرنامج V-REP. ويتمتع هذا النموذج بالعديد من الميزات التي يتمتع بها الروبوت الحقيقي، مثل الكاميرا وأجهزة تحسس المسافات. ولكن هذه الميزات غير مستعملة في المحاكاة، وتم الاستغناء عن معظمها وإزالتها من المحاكاة لتسريع الحسابات. ولكن بعض هذه الميزات غير قابلة للإزالة وهو ما أبطأ من سير المحاكاة.

2. إن برنامج V-REP هو برنامج مجاني ومفتوح المصدر ويتميز بالبساطة وسهولة الاستخدام ويقدم ميزات عديدة منها برمجة الروبوتات الافتراضية بعدة لغات برمجة والتخاطب مع الروبوتات الفيزيائية بشكل فعال. ولكن هذا البرنامج أيضاً يعاني من قلة الدعم كونه مجاني، وفيه العديد من الأخطاء البرمجية. إضافة إلى ذلك فإن تعدد الميزات اقتضى استعمال عدة بيئات عمل، إذا يعمل البرنامج عن طريق التخاطب بين الوحدة المركزية المكتوبة بلغة C++ ومفسر Python ومفسر Lua. حيث تتم برمجة الروبوتات الافتراضية بلغة Lua في حين يتولى مفسر Python الحسابات المتعلقة بالمحاكاة (النماذج الحركية والديناميكية، التماس، البيانات). وتربط الوحدة المركزية بين هتين البيئتين. أدى تعدد الوحدات الوظيفية إلى بطء في العمليات الحسابية.

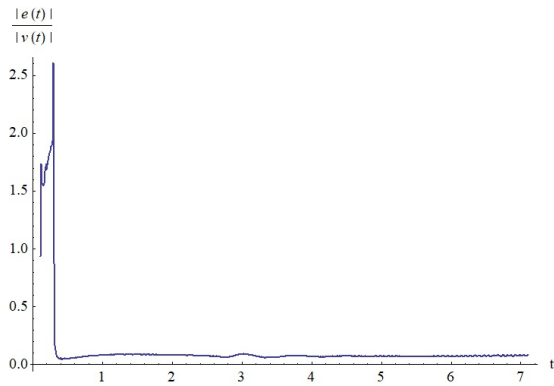
3. إن آلية تبادل البيانات ضمن المحاكاة في برنامج V-REP هي آلية بدائية يسهل باستخدامها تبادل المعلومات بين عدد قليل من الأطراف. ولكن تبادل المعلومات بين عدد كبير من الأطراف معقد وغير عملي. إضافة إلى ذلك، فإن عدم التزامن في النياسب Threads بين الروبوتات الافتراضية أدى إلى تأخير مقداره خطوة عمل كاملة بين الروبوتات. وهذا أدى إلى تحصيل معلومات غير دقيقة عن طريق تبادل المعلومات، وبدوره أدى إلى زيادة في تعقيد المحاكاة.

على الرغم من المشاكل السابقة فقد تمكنا من إجراء محاكاة ناجحة، ولو استغرقت وقتاً طويلاً. يوضح الشكل 3.4 توضع الروبوتات في المستوي أثناء سير المحاكاة. إذ يمثل كل مضلع ملون بلون واحد مواضع الروبوتات في لحظة من لحظات المحاكاة. ويظهر موضع الروبوت المطبق للخوارزمية ضمن الدائرة البنفسجية. يظهر بشكل واضح توضع الروبوتات الابتدائي المتمثل بالمضلع الملون باللون الأحمر الغامق أسفل يسار الشكل 3.4. حيث يبدأ الروبوت المطبق للخوارزمية التحرك من موقع متأخر عن التشكيل. ويلحق الروبوت بالتشكيل بسرعة، إذ يظهر المضلعين التاليين (الأزرق والأخضر) لحظات يقوم خلالها الروبوت المطبق للخوارزمية باللحاق بالتشكيل وتكوينه. وفي المضلع التالي والملون بالأسود، يظهر بوضوح تكون التشكيل المرغوب وهو مربع. يمكن بعدها متابعة المضلعات عبر لحظات المحاكاة اللاحقة إذ يظهر فيها بوضوح التشكيل المربعي الذي حافظ عليه الروبوت أثناء المحاكاة. وفي المضلع الأخير الملون باللون الأحمر الشفاف، يظهر وصول التشكيل إلى النقطة النهائية. سيتم توسيع المحاكاة لتتضمن عدداً أكبر من الروبوتات تلاحق تشكيل أكثر تعقيداً من المربع. يعبر الشكل 3.4 عن سير الروبوتات في التشكيل أثناء إجراء المحاكاة. حيث يعبر المضلع الأحمر أسفل يسار الشكل عن توزع الروبوتات في اللحظة الابتدائية، وتتالي الأشكال لتعبر عن التوزع خلال لحظات مأخوذة عند فواصل زمنية متساوية وصولاً إلى الحالة النهائية في المضلع الأحمر الشفاف أعلى يمين الشكل. توضح الدائرة البنفسجية موضع الروبوت المدروس في كل لحظة.

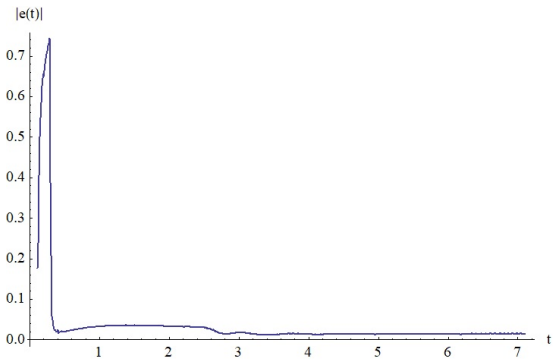
أخذت قياسات لشعاع سرعة الروبوت الفعلي في المحاكاة وأجريت مقارنة بينها وبين شعاع السرعة كما يرصده الروبوت. إذ تم تحويل شعاع السرعة المطلقة المحصل بالمحاكاة إلى الجملة المصطلحة لإجراء المقارنة، ثم حسب الخطأ المطلق بين شعاع السرعة المرصود في المحاكاة وشعاع السرعة الذي يرصده الروبوت، وحسب الخطأ النسبي كنسبة بين طولية الخطأ المطلق وطولية شعاع السرعة المطلقة. أما خطأ الزاوية فحسب بقياس الزاوية بين شعاع السرعة المرصودة وشعاع السرعة المطلقة. تبين النتائج الموضحة في الأشكال 4.4، 4.4ب و 4.4ج نتائج المقارنة بين السرعة المرصودة والسرعة الفعلية. يبين من هذه النتائج أن الروبوت يمر في مرحلة ابتدائية تمتد حتى 0.4 ثانية من بداية المحاكاة يعاني فيها من أخطاء كبيرة في تقدير السرعة، وبعدها يستقر الأداء ويكون خطأ النسبي أقل من 10%، أما الزاوية بين شعاع السرعة المرصودة و شعاع السرعة الفعلية فلا يتجاوز 0.1 راديان بعد استقرار الأداء.



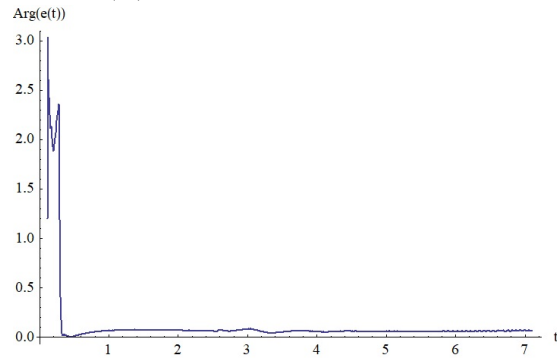
الشكل 3.4: شكل يوضح توزع الروبوتات خلال لحظات زمنية متساوية البعد أثناء المحاكاة.



(ب) الخطأ النسبي في تقدير السرعة



(ا) طولية الخطأ في تقدير السرعة



(ج) الزاوية بين شعاع السرعة المرصودة وشعاع السرعة الفعلية

الخلاصة والآفاق المستقبلية

1.5 الخاتمة

تضمّن هذا البحث شرحاً لخوارزمية مقترحة للتحكم بسرّب من الروبوتات لملاحقة تشكيل بالاعتماد على المسافات بين الروبوتات فقط. إن الخوارزمية المقترحة تتميز عن الخوارزميات المقترحة في (Anderson and Yu (2011 بالتغلب على مشكلة عدم التعيين في الانعكاس بين المعلومات المرصودة والحالة الواقعية إضافة إلى بساطة الحسابات. إذ اعتمدنا في بحثنا هذا على سرعات الروبوتات المطلقة للحصول على معلومة عن الاتجاهات واستعملت هذه المعلومة للتأكد من كون التصور صحيحاً. إن الحسابات في الخوارزمية المقترحة أبسط وتم تطبيقها عملياً، في حين تضمن (Anderson and Yu (2011 تفريق مصفوفة أبعادها 4×4 بطريقة تفريق Cholesky دون تقديم طريقة عملية لحساب هذا التفريق. من مميزات عمل الخوارزمية المقترحة في بحثنا ميزة أن عمل الخوارزمية مستمر، على العكس من الخوارزمية المقترحة في (Cao et al. (2011 التي تعتمد على توقف ثلاثة أرباع السرب عن التحرك ريثما يتحرك الربع المتبقي ليتم الرصد، والتبادل بين الروبوتات في 4 أدوار. أما في (Jiang et al. (2017 فإن رصد المواقع والسرعة يعتمد على قدرة الروبوتات على التحرك مسافات صغيرة في اتجاهات مختلفة. إذ يتم تطبيق تحويل فورييه على تابع المسافة بين روبوتين بالنسبة للزمن، ويستفاد من التحركات الصغيرة ونتيجة التحويل في تحديد المواضع والسرعات. إن هذا الأسلوب معقد حسابياً بسبب حساب تحويل فورييه، إضافة أنه يفرض على الروبوتات التحرك بشكل غير مرغوب بالضرورة. بشكل عام، فإن هذين البحثين ركّزا على الجانب النظري وعلى إثبات قابلية تنفيذ خوارزميات تحكم بالاعتماد على المسافات فقط. لكن لم تتم مناقشة بعض الجانب العملية المهمة المتعلقة بالعتاد الفيزيائي، فمثلاً في (Anderson and Yu (2011 يجب تضخيم قدرة قياس المسافات ثلاثة أضعاف قبل أن يكون كل روبوت قادراً على قياس المسافات المطلوبة للرصد.

بدأ البحث باستعراض لتاريخ هذه المسألة ودراسة مرجعية للأدبيات، حيث قدّم (Scharf et al. (2004 و (Oh et al. (2015 طريقتين لتصنيف أساليب حل مسألة التحكم بسرّب من الروبوتات لملاحقة تشكيل. تندرج الخوارزمية المقترحة في هذا البحث تحت تصنيف خوارزميات البنى الافتراضية بحسب طريقة التصنيف الأولى. وهي من الخوارزميات التي تعتمد على المسافات بين العملاء فقط لكي تعمل بناء على التصنيف بالطريقة الثانية. يمكن القول عن الخوارزمية المقترحة أنها موزّعة لأنها تعمل على جميع الروبوتات في اسرب معاً، كما أنه يمكن أن يكون للسرب ثلاثة روبوتات قائدة لا تتبع أي روبوت آخر

أو ألا يوجد قادة أبداً. لذلك لا يمكن بشكل صريح القول عن الخوارزمية المقترحة أنها خوارزمية قائد-تابع. استهلت الدراسة النظرية بمقدمة رياضية سعياً لتوضيح مفهوم البيان الصلب، وهو أحد أهم الأدوات الرياضية المستخدمة في حل مسألة التحكم بالاعتماد على المسافات فقط. إذ تضمن صلابة البيان أن يتحقق التشكيل المرغوب فقط بتحقيق المسافات بين العملاء. ناقشنا في هذه المقدمة أيضاً بعض التوسعات المحتملة للمسألة لأكثر من المستوي (الفراغ ثلاثة الأبعاد مثلاً)، كما ناقشنا التحويلات المتجانسة التي تضمن تحديد اتجاه جيد لملاحقة التشكيل.

بدأ شرح الخوارزمية بالمرحلة الأولى، وهي مرحلة رصد الجوار أو تحديد مواضع الروبوتات المجاورة حسب طبولوجيا التجاور. تتضمن هذه المسألة إيجاد سلسلة من الأعداد سميت بالأعداد s_j . إن حل هذه المسألة غير أمثلي ويعتمد على التجريب، لذلك كان من الواجب إثبات استحالة إيجاد حل أفضل عن طريق برهان أن مسألة إيجاد الأعداد هي مسألة NP-Hard. قد ينتج في هذه المرحلة أكثر من استنتاج صالح للجوار، وهذه الحالات خاصة جداً وعابرة تزول بسرعة وعادة تكون عندما يصطف ثلاثة روبوتات على استقامة واحدة. في الواقع فإن التطبيق العملي قد لا يحتاج لمناقشة هذه الحالات لأن الوقوع على استقامة واحدة يتطلب دقة لانهائية في القياس وهذا مستحيل.

ينتقل الشرح للمرحلة الثانية من الخوارزمية وهي مرحلة رصد السرعات المطلقة في الجملة النسبية. لرصد السرعات يجب على الروبوتات التحرك بسرعة ثابتة وموحدة لكي يتمكن كل روبوت من استنتاج سرعة محاور جملته المصطلحة بالنسبة للجملة المطلقة. تناول الشرح طريقتين للحل تعتمد إحداها على التوابع المثلية وتعتمد الأخرى على إيجاد مركز الدائرة المارة من رؤوس مثلث، وكل طريقة تتيح فهماً أعمق للمسألة واستيعاب للمشاكل الناتجة عن عدم التعيين الانعكاس.

في المرحلة الثالثة من عمل الخوارزمية استخدم متحكم الانحدار الأعظمي لضمان تحقيق المسافات المطلوبة بين العملاء، ولكن كما يتبين فإن هذا المتحكم قد يعاني من نقاط توازن غير مرغوبة تؤثر على الأداء. لذلك استخدم طريقة جديدة تعتمد على التحويلات المتجانسة لتحديد اتجاه تحرك يضمن تحقيق التشكيل.

تضمنت المحاكاة استعراض عمل خوارزمية الرصد الموضع والسرعة في بعض الحالات البسيطة، وتمت مناقشة النتائج ونقاط الضعف والقوة في الخوارزمية. وأخيراً ألحق بالبحث بعض البراهين الرياضية المهمة ولكننا أطول أو أقصد من أن تظهر في المقدمة الرياضية، ومن ضمنها إثبات أن مسألة إيجاد الأعداد s_j هي مسألة NP-Hard.

2.5 الآفاق المستقبلية

في هذا القسم نستعرض آفاق البحث في هذه الخوارزمية (أو هذا الأسلوب في التحكم بشكل عام)، ونبين مواضع التحسين. نلخص المناقشة بالنقاط التالية:

- إن القياس العملي للمسافات عملية سهلة للمسافات الموجهة بتوجيه معلوم، ولكن في صلب هذا البحث فإن المسافات المقاسة يجب أن تقاس دون توجيه. وبالتالي يجب أن يكون الحساس كرادار يرسل الإشعاعات في كل الاتجاهات، ولكن دون القدرة على قياس اتجاه الأشعة المنعكسة إليه. بداية كانت الأبحاث تتمحور حول مركبات الفضاء وتوجد بعض الأجهزة الفضائية التي تقوم بمهمة القياس المطلوبة ولكن لا يوجد لها مقابل قابل للتطبيق. يمكن أن يتم العمل على تطوير حساس بسيط بأقل التكاليف الممكنة قادر على قياس المسافة إلى روبوت آخر دون الحاجة لتوجيه الحساس.

- حالياً، فإن إيجاد الأعداد s_j يتم بالتجريب، وتبرير ذلك أن مسألة إيجاد الأعداد s_j هي مسألة NP-Hard. هل يمكن إيجاد الأعداد s_j بشكل مباشر بالاعتماد على المسافات فقط وبتعقيد حسابي كثير حدود؟ بالتأكيد فإن هذا مستحيل في الحالة العامة ولكن يمكن البحث في الحالة المثالية $N = 3$ كبدية.

- تناول البحث بتعمق حالة الروبوت المركزي وثلاثة من الروبوتات المحاورة له، وسميت هذه الحالة بـ $N = 3$. يوجد مجال واسع للتبحر بالحالات الأكبر من 3، ولكن يمكن التنبؤ أن مناقشة هذه الحالات المختلفة لا بد أن تكون متشابهة. في هذا البحث فقد افترضنا وجود حل لمسألة إيجاد الأعداد s_j لأنه المعطيات تمثل بالضرورة حالة فيزيائية محققة. يجب دراسة الحالات التي يوجد فيها أكثر من حل أو لا يوجد فيها حلول أبداً، ويجب دراسة كيفية التصرف في عند ورود إحدى هذه الحالات.

- اعتمدت خوارزمية رصد الجوار على معلومات غير مضججة، ومن المقترح التوسع في دراسة أثر الضجيج على عمل هذه الخوارزمية وكيفية التغلب عليه. لا شك أن الضجيج في قياس المسافات سيؤدي إلى حالات لا يمكن فيها إيجاد الأعداد s_j . وهذا يعيدنا إلى النقطة السابقة.
- تعتمد الخوارزمية المقترحة على قياس المسافات بين الروبوت وجيرانه، وهي عملية تقوم فيها أجهزة أقرب إلى الرادارات. يمكن الاستفادة من تكنولوجيا GPS التي تعتمد على قياس الفوارق الزمنية بين الإشارات النابعة من عدة مصادر. وبالتالي يمكن البحث في تطوير خوارزمية تحكّم بالتشكيل تعتمد على الفروقات في المسافات بين الروبوتات لرصد الجوار.
- اعتمد في مسألة رصد السرعة على طريقة الحل العددي، يمكن البحث عن حل تحليلي للمسألة بغية اختزال العمليات الحسابية الناتجة عن خوارزميات الأمثلة التكرارية.
- يمكن أيضاً البحث عن حلول عددية لمسألة رصد السرعة لا تعتمد الطرائق التكرارية. مثلاً، يمكن البحث في تقريب توابع الكمون بتابع سهل حساب قيمته الصغرى، مع مراعاة للخطأ الناتج عن التقريب.
- استعمل في الخطوة الأخيرة من الخوارزمية متحكمان اثنان، متحكم الانحدار الأعظم ومتحكّم بسيط لملاحقة النقطة المستهدفة المحسوبة بالتحويلات المتجانسة. يمكن البحث في استعمال متحكّمات أخرى لملاحقة التشكيل.

براهين رياضيه

1.١ الاتصال علاقة متعدية

مبرهنة 1 ليكن $G = (V, E)$ بياناً، ولتكن $x_1, x_2, x_3 \in V$ عقداً مختلفة مثنى مثنى منه. وليكن $p_1 = ((v_i)_{i=0..n}, (e_j)_{j=1..n})$ طريقاً بدايته x_1 ونهايته x_2 ، وليكن $p_2 = ((u_i)_{i=0..m}, (f_j)_{j=1..m})$ طريقاً بدايته x_2 ونهايته x_3 . عندئذ يوجد طريق بدايته x_1 ونهايته x_3 .

البرهان:

بحسب الفرض فإن $v_0 = x_1, v_n = u_0 = x_2, u_m = x_3$ ، نعرف جماعة الحواف $(g_k)_{k=1..n+m}$ بالشكل:

$$g_k = \begin{cases} e_k & k \leq n \\ f_{k-n} & k > n \end{cases}$$

ونعرف جماعة العقد $(w_l)_{l=0..n+m}$ بالشكل:

$$w_l = \begin{cases} v_l & l \leq n \\ u_{l-n} & l > n \end{cases}$$

نلاحظ أن $s = ((g_k)_{k=0..n+m}, (w_l)_{l=1..n+m})$ رحلة لأن:

$$k \leq n \Rightarrow g_k = e_k = (v_{k-1}, v_k) = (w_{k-1}, w_k)$$

$$k > n \Rightarrow g_k = f_{k-n} = (u_{k-n-1}, u_{k-n}) = (w_{k-1}, w_k)$$

نلاحظ أن $w_0 = v_0 = x_1$ و $w_{n+m} = u_{n+m-n} = u_m = x_3$ أي أن بداية الرحلة هي x_1 و نهاية الرحلة هي x_3 . إذا كانت الرحلة $s = ((g_k)_{k=0..n+m}, (w_l)_{l=1..n+m})$ طريقاً يتم المطلوب، وإلا نقوم باختزال هذه الرحلة لتصبح طريقاً.

إذا لم تكن الرحلة s طريقاً، فيوجد $p, q \in \{0, \dots, n+m\}$ بحيث $p < q$ و $g_p = g_q$ عندئذ نعرف جماعة الحواف:

$$g'_k = \begin{cases} g_k & k \leq p \\ g_{k-p+q} & k > p \end{cases}$$

وجماعة العقد:

$$w'_k = \begin{cases} w_k & k \leq p \\ w_{k-p+q} & k > p \end{cases}$$

وعندها يتحقق:

$$\begin{aligned} k \leq p &\Rightarrow g'_k = g_k = (w_{k-1}, w_k) = (w'_{k-1}, w'_k) \\ k > n &\Rightarrow g'_k = g_{k-p+q} = (w_{k-p+q-1}, w_{k-p+q}) = (w'_{k-1}, w'_k) \end{aligned}$$

وبناء عليه تكون $s' = ((g'_k)_{k=0..n+m-(q-p)}, (w'_l)_{l=1..n+m-(q-p)})$ رحلة تحقق $w'_0 = w_0 = v_0 = x_1$ و $w'_{n+m-(q-p)} = w_{n+m-(q-p)-p+q} = w_{n+m} = u_m = x_3$ أي أن بداية الرحلة هي x_1 و نهاية الرحلة هي x_3 . وبالتالي عملية الاختزال لا تغير بداية أو نهاية الرحلة. بما أن كل عملية اختزال تنقص من طول الرحلة بمقدار 1 على الأقل، فإنه بعد عدد منه من عمليات الاختزال نحصل على طريق بدايته x_1 ونهايته x_3 ، وبذلك يتم المطلوب.

2.1 التوابع المحافظة على المسافات في \mathbb{C}

مبرهنة 2 ليكن $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ تابعاً، عندئذ يتحقق التكافؤ:

$$\forall a, b \in \mathbb{C} : |f(a) - f(b)| = |a - b| \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, \exists w \in \mathbb{C} : f(z) = ze^{i\theta} + w \vee f(z) = \bar{z}e^{i\theta} + w$$

البرهان:

1. \Leftarrow :

من الواضح أن:

$$\forall a, b \in \mathbb{C} : |f(a) - f(b)| = |ae^{i\theta} - w - be^{i\theta} + w| = |a - b| |e^{i\theta}| = |a - b|$$

$$\forall a, b \in \mathbb{C} : |f(a) - f(b)| = |\bar{a}e^{i\theta} - w - \bar{b}e^{i\theta} + w| = |\bar{a} - \bar{b}| |e^{i\theta}| = |a - b|$$

2. \Rightarrow :

ليكن $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ تابعاً محافظاً على المسافات، أي يحقق $|f(a) - f(b)| = |a - b|$ ، $\forall a, b \in \mathbb{C}$ ، ولنبرهن أن f هو تحويل هندسي أو تحويل هندسي انعكاسي. نعرف $g(z) = f(z) - f(0)$ ، من الواضح أن $g(0) = 0$ نجد أنه مهما تكن $a, b \in \mathbb{C}$ يتحقق:

$$|g(a) - g(b)| = |f(a) - f(0) - f(b) + f(0)| = |f(a) - f(b)| = |a - b|$$

وبالتالي g محافظ على المسافات، ومنه $|g(1)| = |g(1) - g(0)| = |1 - 0| = 1$ ، وبالتالي يوجد $\theta \in \mathbb{R}$ بحيث $g(1) = e^{i\theta}$. نعرف $h(z) = g(z)e^{-i\theta}$ ، من الواضح أن $h(1) = 1$ و $h(0) = 0$ وبالتالي:

$$\begin{aligned} |h(z) - h(0)| &= |z - 0| \Rightarrow |h(z)| = |z| \\ |h(z) - h(1)| &= |z - 1| \Rightarrow |h(z) - 1| = |z - 1| \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} |h(z) - 1|^2 &= |z - 1|^2 \\ |h(z)|^2 + 1 - h(z) - \overline{h(z)} &= |z|^2 + 1 - z - \bar{z} \\ \text{Re}(h(z)) &= \text{Re}(z) \end{aligned}$$

وبما أن $|h(z)| = |z|$ فإما $h(z) = z$ أو $h(z) = \bar{z}$ ومنه إما $f(z) = ze^{i\theta} + f(0)$ أو $f(z) = \bar{z}e^{i\theta} + f(0)$.

3.1 مسألة إيجاد الأعداد s_j هي مسألة NP-Hard

لإثبات أن مسألة إيجاد الأعداد s_j هي مسألة NP-Hard، نستعمل أسلوب نقض الفرض في البرهان. نفترض بداية أن هذه المسألة قابلة للحل بخوارزمية ذات تعقيد كثير حدود بالنسبة لـ N عدد الأعداد s_j . ثم نستفيد من هذه الخوارزمية الافتراضية لحل مسألة NP-Complete مشهورة، وبذلك نكون قد أثبتنا قابلية حل مسألة NP-Complete باستخدام خوارزمية ذات تعقيد كثير حدود، وهو تناقض. نستنتج أنه لا توجد خوارزمية تعقيدها كثير حدود تحل مسألة إيجاد الأعداد s_j وبذلك يتم المطلوب. لإتمام هذا البرهان، يجب تعريف مسألة إيجاد الأعداد s_j بشكل دقيق. وسنرمز لها بالرمز $S(\lambda_j)$.

تعريف: المسألة $S(\lambda_j)$

لتكن الأعداد $j = 1..N$: $\delta_j \in [0, \pi]$ أوجد الأعداد $s_j \in \{-1, 1\}$ بحيث يوجد $n \in \mathbb{Z}$ تحقق:

$$\sum_{j=1}^N s_j \delta_j = 2\pi n$$

اخترنا من أجل البرهان نسخة معدلة من مسألة NP-Hard شهيرة هي مسألة المجاميع الجزئية Subset Sums Problem الموضحة بالتعريف التالي.

تعريف: مسألة المجاميع الجزئية $SS(x_j)$

لتكن لدينا الأعداد $j = 1..N$: $x_j \in \mathbb{N}_+$ وليكن العدد $A \in \mathbb{N}_+$. أوجد الأعداد $j = 1..N$: $\alpha_j \in \{0, 1\}$ بحيث:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j x_j = A$$

إن مسألة المجاميع الجزئية هي من المسائل الشهيرة التي أثبت أن تعقيدها NP-Complete في 3.1 ، ولكن في هذا البرهان سوف نستخدم نسخة معدلة عنها هي مسألة المجاميع الجزئية الحقيقية الموضحة في التعريف التالي.

تعريف: مسألة المجاميع الجزئية الحقيقية $RSS(x_j)$

تكن لدينا الأعداد $x_j \in \mathbb{R}_+ : j = 1..N$ وليكن العدد $A \in \mathbb{R}_+$.أوجد الأعداد $\alpha_j \in \{0, 1\} : j = 1..N$ بحيث:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j x_j = A$$

في الحالة الخاصة التي يكون فيها كل من x_j و A أعداداً طبيعية تؤول مسألة المجاميع الجزئية الحقيقية إلى مسألة المجاميع الجزئية التقليدية، وذلك يبرهن أن تعقيد مسألة المجاميع الجزئية الحقيقية هو على الأقل مكافئ لتعقيد مسألة المجاميع الجزئية التقليدية، وبالتالي مسألة المجاميع الجزئية الحقيقية هي مسألة NP-Hard. نفترض أن المسألة $S(\delta_j)$ قابلة للحل بخوارزمية ذات تعقيد كثير حدود. ولنقم بحل المسألة $RSS(x_j)$.

نعرف العدد $X = \sum_{j=1}^N x_j$ ولنناقش الحالتين التاليتين:

• حالة $A > X$:

تكون مسألة المجاميع الجزئية الحقيقية مستحيلة الحل.

• حالة $A \leq X$: نعرف الأعداد λ_j من أجل $j = 1..N$ بالشكل:

$$\lambda_j = \pi \frac{x_j}{4X}$$

ونعرف العدد λ_{N+1} بالشكل:

$$\lambda_{N+1} = \pi \left| \frac{A}{2X} - \frac{1}{4} \right|$$

من الواضح أن $\lambda_j \in [0, \pi]$. نقوم بحل المسألة $S(\lambda_j)$ باستخدام الخوارزمية ذات التعقيد كثير الحدود. بافتراض وجود الحل نحصل على الأعداد s_j و $n \in \mathbb{Z}$ بحيث:

$$\sum_{j=1}^{N+1} s_j \lambda_j = 2\pi n$$

ولكن:

$$-\frac{3\pi}{4} \leq -\sum_{j=1}^N \lambda_j - \frac{\pi}{2} \leq \sum_{j=1}^N s_j \lambda_j + s_{N+1} \lambda_{N+1} \leq \sum_{j=1}^N \lambda_j + \frac{\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{4}$$

وبالتالي نجد أن $n = 0$ ومنه:

$$\sum_{j=1}^{N+1} s_j \lambda_j = 0$$

وعندها نكتب:

$$\sum_{j=1}^N s_j \lambda_j + s_{N+1} \lambda_{N+1} = 0$$

$$\sum_{j=1}^N s_j \lambda_j = -s_{N+1} \lambda_{N+1}$$

نناقش الآن حالتين:

1. حالة $A \geq \frac{X}{2}$:

يكون:

$$\lambda_{N+1} = \pi \left(\frac{A}{2X} - \frac{1}{4} \right)$$

ومنه:

$$\sum_{j=1}^N -\frac{s_j}{s_{N+1}} \lambda_j = \lambda_{N+1}$$

$$\sum_{j=1}^N -\frac{s_j}{s_{N+1}} \frac{\pi x_j}{4X} = \pi \left(\frac{A}{2X} - \frac{1}{4} \right)$$

$$\sum_{j=1}^N -\frac{s_j}{s_{N+1}} x_j = 2A - X$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \left(-\frac{s_j}{s_{N+1}} + 1 \right) x_j = A$$

ونحصل على الأعداد:

$$\alpha_j = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s_j}{s_{N+1}} \right) : \sum_{j=1}^N \alpha_j x_j = A$$

2. حالة $A < \frac{X}{2}$:

بشكل مماثل يكون:

$$\lambda_{N+1} = \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{A}{2X} \right)$$

ومنه:

$$\sum_{j=1}^N \frac{s_j}{s_{N+1}} \lambda_j = -\lambda_{N+1}$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{s_j}{s_{N+1}} \frac{\pi x_j}{4X} = \pi \left(\frac{A}{2X} - \frac{1}{4} \right)$$

$$\sum_{j=1}^N \frac{1}{2} \left(\frac{s_j}{s_{N+1}} + 1 \right) x_j = A$$

ونحصل على الأعداد

$$\alpha_j = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{s_j}{s_{N+1}} \right) : \sum_{j=1}^N \alpha_j x_j = A$$

. وبذلك نكون قد برهنا أن في حال وجد حل للمسألة $S(\lambda_j)$ فيمكن حل المسألة $RSS(x_j)$ بتعقيد كثير حدود. يجب أيضاً أن نبرهن عدم وجود حالة تكون فيها المسألة $RSS(x_j)$ قابلة للحل ولا تكون فيها المسألة $S(\lambda_j)$ قابلة للحل. يكفي لبرهان ذلك اثبات وجود حل للمسألة $S(\lambda_j)$ إذا وجد حل للمسألة $RSS(x_j)$. لنفترض وجود حل للمسألة $RSS(x_j)$ ولنبرهن وجود حل للمسألة $S(\lambda_j)$. عندها توجد الأعداد α_j بحيث:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j x_j = A$$

نعرف مجدداً $X = \sum_{j=1}^N x_j$ ونكتب:

$$\sum_{j=1}^N (2\alpha_j - 1) x_j = 2A - X$$

$$\sum_{j=1}^N (2\alpha_j - 1) \frac{\pi x_j}{2X} = \pi \left(\frac{A}{X} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\sum_{j=1}^N s_j \lambda_j - \pi \left(\frac{A}{X} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

وبشكل مماثل نعرف:

$$\lambda_{N+1} = \pi \left| \frac{A}{X} - \frac{1}{2} \right|$$

ونناقش حالتين هما:

$$1. \text{ حالة } A \geq \frac{X}{2}$$

عندها نحصل على الأعداد:

$$s_j = 2\alpha_j - 1$$

$$s_{N+1} = -1$$

وعندها:

$$\sum_{j=1}^{N+1} s_j \lambda_j = 2\pi n$$

حيث $n = 0$.

2. حالة $A < \frac{X}{2}$ عندها نحصل على الأعداد:

$$\begin{aligned} s_j &= 2\alpha_2 - 1 \\ s_{N+1} &= 1 \end{aligned}$$

وعندها:

$$\sum_{j=1}^{N+1} s_j \lambda_j = 2\pi n$$

حيث $n = 0$.

بذلك نكون قد أثبتنا أن أي مسألة RSS يمكن إرجاعها إلى مسألة S مكافئة ثم حلها باستخدام خوارزمية ذات تعقيد كثير حدود، ولكن مسألة RSS هي حالة عامة من مسألة المجاميع الجزئية ذات التعقيد NP -Hard ، وهذا تناقض. إذن المسألة S هي على الأقل مسألة NP -Hard .

4.1 برهان تعريف التابع $\cos(\theta(Z) - \psi(Z))$

نبرهن في هذا القسم صحة المتراجحة التالية:

$$\forall Z \in S, \left| \frac{D_3^2(Z) + V_0^2 - V_3^2}{2V_0 D_3(Z)} \right| \leq 1 \quad (1.1)$$

حيث تعريف الرموز واضح في القسم 1.5.3 . بالعودة للقسم المذكور نجد أن $\forall Z \in S, D_3^2(Z) \in [|V_0 - V_3|^2, (V_0 + V_3)^2]$ ، وبالانتباه إلى أن المقادير D_3, V_0, V_3 مقادير موجبة نستنتج أنه يمكن إرجاع برهان المتراجحة المطلوبة إلى برهان أن:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \forall x \in [|a - b|, a + b], \left| \frac{x^2 + a^2 - b^2}{2ax} \right| \leq 1 \quad (2.1)$$

ندرس تغيّرات التابع f المعرّف بالشكل:

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^2 + a^2 - b^2}{2ax} \quad (3.1)$$

، يُعطى المشتق الأول للتابع f بالعلاقة:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = \frac{4ax^2 - 2a(x^2 + a^2 - b^2)}{4a^2x^2} = \frac{x^2 + b^2 - a^2}{2ax^2} \quad (4.1)$$

ويُعطى المشتق الثاني للتابع f بالعلاقة:

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f''(x) = \frac{4ax^3 - 4ax(x^2 + b^2 - a^2)}{4a^2x^4} = \frac{a^2 - b^2}{ax^3} \quad (5.1)$$

نناقش أولاً حالة $a = b$ ، عندها يكون $f(x) = \frac{x}{2a}$ والمتراجحة محققة. في حالة $a > b$ ، يكون المشتق الثاني موجباً والمشتق الأول متزايداً. ونلاحظ أن المشتق الأول يندم عند النقطة $x_0 = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a-b)(a+b)} \in [a-b, a+b]$ وبملاحظة أن:

$$\begin{aligned} f(a-b) &= \frac{(a-b)^2 + a^2 - b^2}{2a(a-b)} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab + a^2 - b^2}{2a(a-b)} = 1 \\ f(x_0) &= \frac{a^2 - b^2 + a^2 - b^2}{2a\sqrt{a^2 - b^2}} > 0 \\ f(a+b) &= \frac{(a+b)^2 + a^2 - b^2}{2a(a+b)} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab + a^2 - b^2}{2a(a+b)} = 1 \end{aligned}$$

تكون المتراجحة محققة.

أما في حالة $a < b$ فإن المشتق الأول موجب على المجال المدروس $[b-a, b+a]$ والتابع متزايد. ويتحقق عندها:

$$\begin{aligned} f(b-a) &= \frac{(b-a)^2 + a^2 - b^2}{2a(b-a)} = \frac{a^2 + b^2 - 2ab + a^2 - b^2}{2a(b-a)} = -1 \\ f(b+a) &= \frac{(b+a)^2 + a^2 - b^2}{2a(b+a)} = \frac{a^2 + b^2 + 2ab + a^2 - b^2}{2a(b+a)} = 1 \end{aligned}$$

وتتحقق المتراجحة ويتم البرهان.

العلمية المراجع

- Anderson, B. D. and Yu, C. .(2011) Range-only sensing for formation shape control and easy sensor network localization. Proceedings of the 2011 Chinese control and decision conference, page .3315–3310
- Arkin, R. C. .(1998) Behavior-Based Robotics. MIT Press.
- Asimov, L. and Roth, B. (November .(1978 The rigidity of graphs. Journal of Mathematical Analysis and Applications.
- Basiri, M., Bishop, A. N., and Jensfelt, P. .(2010) Distributed control of triangular formations with angle-only constraints. Systems and Control Letters, page .154–147
- Belabbas, M. A., Mou, S., Morse, A. S., and Anderson, B. D. O. .(2012) Robustness issues with undirected formations. Proceedings of the 51st IEEE Conference on Decision and Control.
- Cao, M., Yu, C., and Anderson, B. D. O. .(2011) Formation control using range-only measurements. Automatica, page .781–776
- Cao, Y. and Ren, W. .(2010) Distributed formation control for fractional-order systems: Dynamic interaction and absolute/relative damping. Systems and Control Letters, page .240–233
- Dimarogonas, D. V. and Johansson, K. H. .(2010) Stability analysis for multi-agent systems using the incidence matrix: Quantized communication and formation control. Automatica, pages .700–695
- Dong, W. and Farrell, J. A. .(2008) Cooperative control of multiple nonholonomic mobile agents. IEEE Transactions on Automatic Control, page .1448–1434

- Dorfler, F. and Francis, B. A. .(2009) Formation control of autonomous robots based on cooperative behavior. Proceedings of the 2009 European control conference, page –2432 .2437
- Dorfler, F. and Francis, B. A. .(2010) Geometric analysis of the formation problem for autonomous robots. Transactions on Automatic Control, pages .2384--2379
- Fax, J. A. and Murray, R. .(2002) Graph laplacians and stabilization of vehicle formations. Proceedings of the 15th IFAC World Congress, page .288–283
- Haas, R. et al. .(2003) Planar minimally rigid graphs and pseudo–triangulations. Proceedings of thenineteenth annual symposium on Computational geometry, pages .163--154
- Hadaegh, F. et al. .(2000) A centralized optimal controller for formation flying spacecraft. International Conference on Intelligent Technology.
- Jackson, B. and Jordan, T. .(2005) Connected rigidity matroids and unique realizations of graphs. Journal of Combinatorial Theory.
- Jiang, B., Deghat, M., and Anderson, B. D. .(2017) Simultaneous velocity and position estimation via distance–only measurements with application to multi–agent system control. IEEE Transactions on Automatic Control.
- Krick, L. et al. .(2009) Stabilization of infinitesimally rigid formations of multi–robot networks. InternationalJournalofControl, pages .439--423
- Laman, G. .(1970) On graphs and rigidity of plane skeletal structures. Journal of Engineering Mathematics.
- Lin, A. J. J. and Morse, A. .(2003) Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules. Transactions on Automatic Control, pages .1001--988
- Moreau, L. .(2005) Stability of multi agent systems with time–dependent communication links. Transactions on Automatic Control, page .182–169
- Oh, K.–K. and Ahn, H.–S. .(2014) Distance–based undirected formations of single– and double–integrator modeled agents in n–dimensional space. International Journal of Robust and Nonlinear Control, page .1820–1809
- Oh, K.–K., Park, M.–C., and Ahn, H.–S. .(2015) A survey of multi–agent formation control. Automatica.
- Olfati–Saber, R. and Murray, R. M. .(2004) Consensus problems in networks of agents with switching topology and time–delays. Transactions on Automatic Control, page .1533–1520
- P.K.C.Wang and Hadaegh, F. .(1994) Coordination and control of multiple micro spacecraft moving in formation. Journal of Astronomical Sciences.

- Ren, W., Beard, R. W., and McLain, T. W. (2005) Coordination variables and consensus building in multiple vehicle systems. *Cooperative Control*, page .188–171
- Ren, W. and Atkins, E. (2007) Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, pages .11033--1002
- Scharf, D., F.Y.Hadaegh, and Ploen, S. (2004) A survey of spacecraft formation flying guidance and control. *partii:control*. Proceedings of the 2004 American Control Conference.
- Sparks, A. (2000) Satellite formation keeping control in the presence of gravity perturbations. *American Control Conference*.
- Summers, T. H., Yu, C., Anderson, B. D. O., and Dasgupta, S. (2009) Formation shape control: global asymptotic stability of a four-agent formation. In Proceedings of the 48th IEEE conference on decision and control and the 28th Chinese control conference.
- Suttner, R. and Sun, Z. (2018) Posture regulation for unicycle-like robots with prescribed performance guarantees. *SIAM Journal on Control and Optimization*.
- Zambelli, M., Karayiannidis, Y., and Dimarogonas, D. (2013) Posture regulation for unicycle-like robots with prescribed performance guarantees. *IET Control Theory and Applications*.