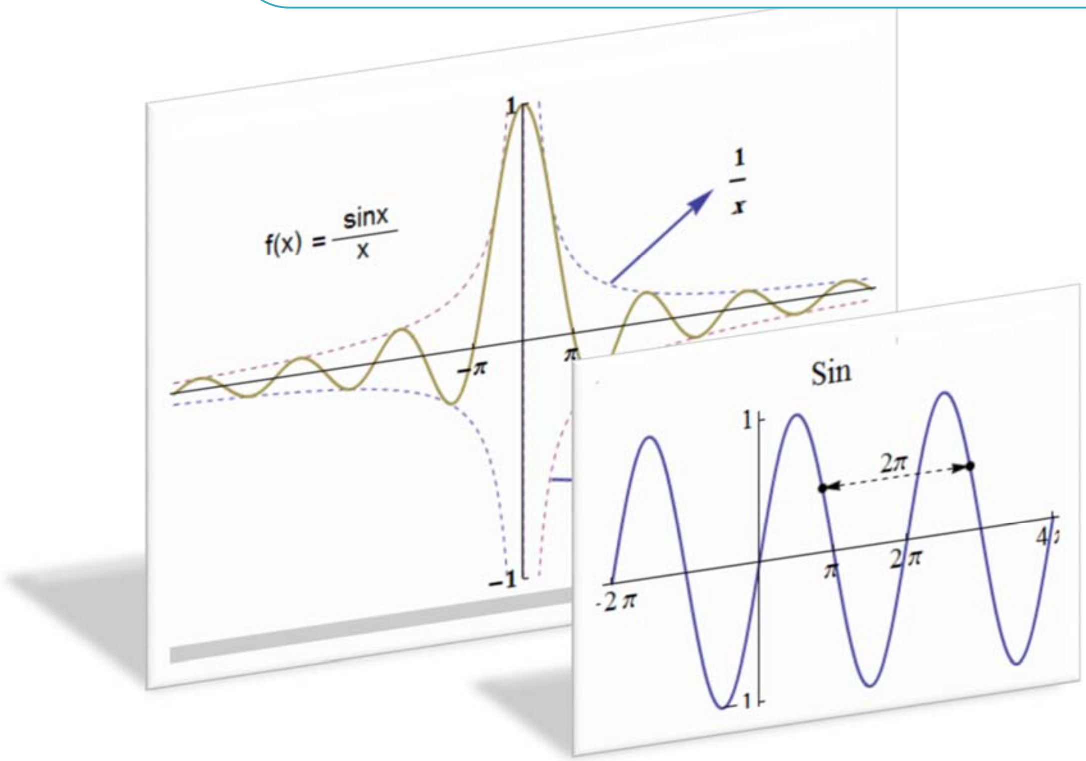
المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

الرياضيّات

للتحضير لاختبارات القبول في المعهد العالي للعلوم التطبيقيّة والتكنولوجيا



إعداد :

خالد حلاوه

فارس أبوصالح

المعهد العالي للعلوم التطبيقيّة والتكنولوجيا

المنطق الرياضي

خالد حلاوة

المنطق الرياضي

القضيّة

القضيّة هي عبارة تأخذ إحدى القيمتين "T" أي صحيحة أو "F" أي خاطئة.

أمثلة

القضيّة	$-3 \leq 0$	$(-3)^2 \leq 2^2$	مجموعة الأعداد الطبيعيّة منتهية.	يوجد على الأقلّ عدد صحيح مربّعه يساوي -2.
قيمة القضيّة	T	F	F	F

انطلاقاً من قضيّتين P و Q يمكننا تشكيل قضايا أخرى مثل

- $\neg P$ وتُقرأ "نفي P" ويكون لها القيمة المخالفة لقيمة P.
- $P \wedge Q$ وتُقرأ "P و Q"، وتكون صحيحة إذا وفقط إذا كانت كلّ من P و Q صحيحة.
- $P \vee Q$ وتُقرأ "P أو Q"، وتكون صحيحة إذا وفقط إذا كانت إحدى القضيتين P أو Q صحيحة.
- $P \Rightarrow Q$ وتقرأ "P يقتضي Q"، وتكون صحيحة إذا وفقط إذا كانت "صحّة P" تقتضي "صحّة Q".
- $P \Leftrightarrow Q$ وتقرأ "P يكافئ Q"، وتكون صحيحة إذا كان للقضيّتين P و Q القيمة نفسها.

يُمكن تلخيص ما سبق بالجدول التالي الذي يسمّى جدول الحقيقة :

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F
F	T	F	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

يُمكن أن نربط كلّ عنصر x من مجموعة "مرجع" E بقضيّة $P(x)$ ونسمّي هذه القضيّة قضيّةً مفتوحةً كما ويمكن أن تكون القضيّة المفتوحة تابعة لأكثر من متحوّل $R(x,y,\cdots)$.

المكمّمات:

المكمّمات عبارة عن رموز تُمكّن من صياغة جمل بطريقة أسهل للقراءة وللكتابة.

1. **مكمّم الشمول $(\forall)$: ويقرأ "أيّاً كان"**

لتكن $p(x)$ قضيّة مفتوحة معرّفة على مرجع ما E. نستطيع تعريف قضيّة جديدة P بالشكل التالي $P \equiv (\forall x \in E, p(x))$ وتُقرأ "أيّاً كان x من E فإنّ $p(x)$"، وهي تعني أنّ $p(x)$ صحيحة أيّاً كان x من E.

أمثلة:

- $\forall x \in \mathbb{R}, -x^2 \le 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2a_n$.

2. مكمّم الوجود $(\exists)$: ويُقرأ "يوجد على الأقلّ"

لتكن $p(x)$ قضيّة مفتوحة معرّفة على المرجع E . نستطيع تعريف قضيّة أخرى Q بالشكل التالي $P \equiv (\exists x \in E : p(x))$ وتُقرأ " يوجد على الأقلّ x من E بحيث $p(x)$"، وهي تعني أنّه يوجد على الأقلّ عنصر x من Eبحيث تكون $p(x)$ صحيحة.

أمثلة

- $\exists x \in \mathbb{R} : x \le 0$.
- $\exists x \in \mathbb{R} : \sin x = 0$.
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 9$.
- $\exists n \in \mathbb{N}, n^3 = 2$.

3. المبادلة بين المكمّمات :

يمكننا استخدام عدّة مكمّمات في عبارة واحدة مثلاً : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{R} : x = y^2$.

يمكن المبادلة بين المكمّمات المتماثلة فمثلاً القضيّة :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

تكافئ القضيّة

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

أمّا في حالة المكمّمات المختلفة فإنّ عمليّة المبادلة تغيّر من قيمة القضيّة : فمثلاً القضيّة :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists y \in \mathbb{R} : x = y^2$ صحيحة بينما $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}_+^*, x = y^2$ قضيّة خاطئة.

طرائق الإثبات :

الإثبات "بالنفي":

تعتمد فكرة الإثبات بالنفي على الملاحظة التالية :

لتكن القضيّتان A و B والقضيّة $P \equiv \left(A \Rightarrow B\right)$. نستطيع إثبات صحّة P بإثبات صحّة الاقتضاء $Q \equiv \left(\neg B\right) \Rightarrow \left(\neg A\right)$ حيث أنّ القضيّتين P و Q متكافئتان.

مثال :

نرمز بالرمز $2\mathbb{N}$ إلى مجموعة الأعداد الطبيعيّة الزوجيّة، و بالرمز $2\mathbb{N}+1$ إلى مجموعة الأعداد الطبيعيّة الفرديّة.

1. أثبت صحّة القضيّة: $\forall n \in \mathbb{N}, \left(n \in 2\mathbb{N}+1\right) \Rightarrow \left(n^2 \in 2\mathbb{N}+1\right)$.
2. أثبت صحّة القضيّة: $\forall n \in \mathbb{N}, \left(n^2 \in 2\mathbb{N}+1\right) \Rightarrow \left(n \in 2\mathbb{N}+1\right)$.

الحلّ : ليكن n عدداً طبيعيّاً. لتكن القضيّتين $A_n \equiv$(n^2 فرديّ) و $B_n \equiv$(n فرديّ).

1. ليكن n عدداً طبيعيّاً. نريد إثبات القضيّة $P \equiv \left(B_n \Rightarrow A_n\right)$. نفترض صحّة B_n أي n فردي. يوجد إذاً عدد طبيعي k يحقّق $n = 2k+1$ وبالتالي $n^2 = 2\left(2k^2+2k\right)+1$ أي إنّ n^2 فردي و A_n صحيحة. وبذلك نكون قد أثبتنا صحّة P.
2. لنحاول أوّلاً الإثبات بطريقة مباشرة : ليكن n عدداً طبيعيّاً. نفترض صحّة A_n أي n^2 فردي وبالتالي يوجد عدد طبيعي k يحقّق $n^2 = 2k+1$ ونريد إثبات صحّة B_n أي أنّ $n = \sqrt{2k+1}$ فردي. نلاحظ أنّنا دخلنا في طريق صعب وليس من السهل أن نُكمل. لنجرّب الآن طريقة الإثبات بالنفي : ليكن n عدداً طبيعيّاً. نفترض صحّة القضيّة $\left(\neg B_n\right)$ أي " n زوجيّ" عندئذٍ يوجد عدد طبيعي k يحقّق $n = 2k$ وبالتالي $n^2 = 4k^2$ عدد زوجيّ ومنه صحّة القضيّة $\left(\neg A_n\right)$. نلاحظ أنّ الطريقة الثانية أبسط وأوضح بكثير.

تمرين :

1. أثبت صحّة القضيّة : $\forall n \in \mathbb{N}, \left(n \in 2\mathbb{N}\right) \Rightarrow \left(n^2 \in 2\mathbb{N}\right)$.
2. أثبت صحّة القضيّة: $\forall n \in \mathbb{N}, \left(n^2 \in 2\mathbb{N}\right) \Rightarrow \left(n \in 2\mathbb{N}\right)$.

الإثبات "بنقض الفرض":

الإثبات بنقض الفرض طريقة إثبات منطقيّ تنطلق من افتراض خطأ القضيّة P التي نريد إثباتها ومن ثمّ الوصول باقتضاءات صحيحة إلى نفي قضيّة P_0 نعلم صحّتها. أي إنّنا نُثبت الاقتضاء $\left(\left(\neg P\right) \Rightarrow \left(\neg P_0\right)\right)$ الذي يكافئ $\left(P_0 \Rightarrow P\right)$.

مثال : إثبات أنّ $\sqrt{2}$ لا ينتمي إلى مجموعة الأعداد العاديّة $\mathbb{Q}$.

نفترض أنّ $\sqrt{2}$ عدد عاديّ، يوجد على الأقلّ عددان طبيعيّان p و q أوّليّان فيما بينهما (أي ليس لهما قاسم طبيعيّ مشترك إلاّ الواحد) بحيث $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ وبالتالي $\frac{p^2}{q^2} = 2$ أو $p^2 = 2q^2$.

من المعادلة الأخيرة يتّضح لنا أنّ p^2 زوجي ومنه p زوجي وبالتالي يوجد عدد طبيعيّ p' بحيث $p = 2p'$. نعوّض في المعادلة فنجد : $4p'^2 = 2q^2$ ومنه $q^2 = 2p'^2$. أي إنّ q عدد زوجيّ، أي إنّ كلاً من العددين p و q يقبل القسمة على 2 وهذا يناقض كون p و q أوّليّان فيما بينهما.

خلاصة ما سبق هو أنّ $\sqrt{2}$ ليس عدداً عاديّاً أو بشكل آخر $\sqrt{2} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

الإثبات بالتدريج :

لتكن القضيّة P_n المعرّفة على المجموعة $\mathbb{N}$ يفيد الإثبات بالتدريج في إثبات صحّة قضيّة من الشكل $\left(\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq k) \Rightarrow P_n\right)$ حيث k عدد طبيعيّ. لهذا الغرض يلزمنا إثبات القضيّتين التاليتين :

- P_k صحيحة.
- أيّاً كان $n \geq k$ فإنّ الاقتضاء التالي $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ صحيح. بمعنى إذا كانت P_n صحيحة فإنّ P_{n+1} صحيحة.

مبرهنة : لتكن القضيّة P_n المعرّفة على مجموعة الأعداد الطبيعيّة $\mathbb{N}$، وليكن $k \in \mathbb{N}$. نفترض أنّ :

- P_k صحيحة.
- أيّاً كان العدد الطبيعي $n \geq k$ لدينا $P_n \Rightarrow P_{n+1}$.

عندئذٍ تكون القضيّة $\left(\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq k) \Rightarrow P_n\right)$ صحيحة.

مثال1 : أثبت أنّ العدد $4^n - 1$ يقبل القسمة على 3 وذلك أيّاً كان $n \in \mathbb{N}$.

الحلّ : أيّاً كان $n \in \mathbb{N}$، نضع $P_n \equiv$ "$4^n - 1$ يقبل القسمة على 3".

- عندما $n = 0$ لدينا $4^0 - 1 = 0$ يقبل القسمة على 3 ومنه P_0 صحيحة.
- ليكن $n \in \mathbb{N}$ نفترض صحّة P_n أي "$4^n - 1$ يقبل القسمة على 3" وبالتالي يوجد $k \in \mathbb{N}$ بحيث $4^n - 1 = 3k$ أو $4^n = 3k + 1$. لدينا :
  $$4^{n+1} - 1 = 4 \cdot 4^n - 1 = 4 \cdot (3k + 1) - 1 = 12k + 3 = 3(4k + 1)$$
  إذن "$4^{n+1} - 1$ يقبل القسمة على 3" و P_{n+1} صحيحة.

نستنتج أنّه أيّاً كان $n \in \mathbb{N}$ فإنّ العدد $4^n - 1$ يقبل القسمة على 3.

مثال2 : ادرس صحّة المتراجحة التالية : $n^2 \leq 2^n$، وذلك أيّاً كان العدد الطبيعيّ n.

الحلّ :

نلاحظ أنّ المتراجحة صحيحة عندما $n = 0,1,2$ ولكنّها خاطئة عندما $n = 3$. وعندما $n = 4,5$ تصبح صحيحة. لنحاول إذن إثبات صحّتها بالتدريج وذلك أيّاً كان العدد الطبيعي $n \geq 4$.

أيّاً كان n من $\mathbb{N}$ و $4 \le n$، نضع $P_n \equiv \left(n^2 \le 2^n\right)$

- عندما $n = 4$ لدينا $16 = 4^2 \le 2^4 = 16$ ومنه P_4 صحيحة.
- ليكن n من $\mathbb{N}$ و $n \ge 4$، نفترض صحّة P_n أي $\left(n^2 \le 2^n\right)$، لدينا :

$$\left(n+1\right)^2 = n^2 + 2n + 1 \le 2^n + 2n + n = 2^n + 3n \le 2^n + n^2 \le 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

إذن $\left(n+1\right)^2 \le 2^{n+1}$ و P_{n+1} صحيحة.

نستنتج أنّه أيّاً كان n من $\mathbb{N}$ و $4 \le n$، فإنّ $\left(n^2 \le 2^n\right)$.

تمرين 1

نقول عن التطبيق $f : A \to B$ إنّه متباين إذا لم يوجد أيّ عنصرين متباينين من A لهما الصورة نفسها. عبّر عن صفة التباين هذه باستخدام المكمّمات بطريقتين مختلفتين.

تمرين 2

ماذا تقول عن القضيّة التالية : " أيّاً كان العدد الحقيقي x، فإنّ $\left(0 < x\right) \Rightarrow \left(x < x^2\right)$ " ؟

تمرين 3

ليكن a و b عددين حقيقيّين يحقّقان $\left(\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon\right)$، أثبت أنّ $\left(a \le b\right)$.

تمرين 4

عيّن كلّ التوابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ التي تحقّق :

$$\forall\left(x,y\right) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \quad f\left(x\right)f\left(y\right) - f\left(xy\right) = x + y \qquad \left(1\right)$$

إرشاد : افترض وجود تابع من هذا النوع واحسب قيمته عند الصفر.

تمرين 5

أثبت أنّه أيّاً كان العدد الحقيقي الموجب a والعدد الطبيعي n، فإنّ $\left(1+a\right)^n \ge 1 + na$.

تمرين 6

أثبت أنّه أيّاً كان العدد الطبيعي n من $\mathbb{N}^*$، فإنّ $\left(3^{2n+2} - 2^{n+1}\right)$ يقبل القسمة على 7.

تمرين 7

ليكن n من $\mathbb{N}$.

1. استخدم المساواة $\sum_{k=1}^{n+1}\left(\left(k-1\right)+1\right)^2 = \sum_{k=1}^{n+1}k^2$ لتحسب قيمة المجموع : $S_1 = \sum_{k=1}^{n}k$.

2. بطريقة مشابهة، احسب : $S_2 = \sum_{k=1}^{n}k^2$ و $S_3 = \sum_{k=1}^{n}k^3$.

تمرين8

لتكن $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية من الأعداد الحقيقيّة، بسّط المجموع $\sum_{k=0}^{n}\left(u_{k+1}-u_k\right)$.

1. احسب قيمة المجموع $S = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\left(k+1\right)}$ بدلالة n . إرشاد : اكتب $\frac{1}{k\left(k+1\right)}$ بشكل فرق كسرين مناسبين.

2. احسب قيمة المجموع $T = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\left(k+1\right)!}$ بدلالة n .

تمرين9

ليكن n من $\mathbb{N}$. أثبت صحّة المساواة : $\sum_{k=0}^{n}k\times k! = \left(n+1\right)!-1$.

تمرين10

أثبت أنّه أيّاً كان $n \geq 4$ فإنّ $2^n \leq n!$.

تمرين11

بيّن الخطأ في الإثبات التالي :

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ ، لنتأمّل القضيّة التالية : $P\left(n\right) \equiv$ " كلّ مجموعة مؤلّفة من n قلماً ملوّناً لها لون واحد".

- إنّ القضيّة $P\left(1\right)$ صحيحة.
- نفترض صحّة القضيّة $P\left(n\right)$ ولنتأمّل مجموعة مؤلّفة من $\left(n+1\right)$ قلماً.

حسب فرض التدريج " كلّ مجموعة مؤلّفة من n قلماً ملوّناً لها لون واحد"

نأخذ قلماً واحداً من هذه المجموعة فيبقى n قلماً فهي من لون واحد وليكن c هذا اللون. نأخذ قلماً آخر "طبعاً لونه c" ونعيد القلم الأوّل إلى المجموعة فتصبح المجموعة الجديدة من لون واحد لأنّ عدد عناصرها n وهذا اللون هو بالضرورة من اللون c . ممّا سبق نستنتج أنّ الـ $\left(n+1\right)$ قلماً من لون واحد هو c .

إذن $P\left(n\right)$ صحيحة أيّاً كان العدد n من $\mathbb{N}^*$!!!!

المعهد العالي للعلوم التطبيقيّة والتكنولوجيا

قسمة الأعداد الصحيحة

خالد حلاوة

قسمة الأعداد الصحيحة وخواصها

القسمة في مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$

تعريف :

ليكن (x,y) في $\mathbb{Z}^2$، نقول إنّ " x يقسم y " أو " y مضاعف لـ x " إذا وُجد k في $\mathbb{Z}$ بحيث $y = kx$. ونرمز إلى ذلك بالرمز $x|y$ (القاسم من اليسار). أي :

$$x|y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y = kx$$

أمثلة

- $13|39$ لأنّ $39 = 3\times 13$.
- $(-7)|56$ لأنّ $56 = (-8)\times 7$.

خواص القسمة في $\mathbb{Z}$

لتكن z,y,x ثلاثة أعداد صحيحة لدينا :

1. $x|x$.
2. $x|y \wedge y|z \Rightarrow x|z$.
3. $x|y \wedge x|z \Rightarrow x|(ay+bz)$ حيث b,a عددان صحيحان.
4. $x|y \wedge y|x \Rightarrow |x| = |y|$.
5. إذا كان $z > 0$ فإنّ : $x|y \Rightarrow (zx)|(zy)$.

القسمة الإقليديّة :

مبرهنة : ليكن a و b عددين صحيحين و b موجب تماماً، توجد ثنائيّة وحيدة (q,r) من الأعداد الصحيحة بحيث $a = bq + r$ و $0 \le r < b$. نسمّي q ناتج القسمة و r باقي القسمة.

أمثلة

- إذا كان $a = 27, b = 4$ عندها $q = 6, r = 3$.
- إذا كان $a = -27, b = 4$ عندها $q = -7, r = 1$.
- باقي قسمة أيّ عدد فردي على 2 هو 1، وباقي قسمة أيّ عدد زوجي على 2 هو 0.
- باقي قسمة أيّ عدد من الشكل 10^k على 3 هو 1 (k عدد طبيعيّ).
- باقي قسمة أيّ عدد من الشكل 10^k على 9 هو 1 (k عدد طبيعيّ).
- باقي قسمة عدد طبيعي على عشرة هو آحاد هذا العدد مكتوباً بالنظام العشري.

تعريف العدد الأوّلي:

نقول إنّ العدد الصحيح p أوّلي إذا كان $p > 1$ وكان p و 1 هما القاسمان الوحيدان الموجبان لـ p. نرمز بالرمز $\mathcal{P}$ إلى مجموعة الأعداد الأوّليّة.

$$p \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \forall d \in \mathbb{N}, d|p \Rightarrow d \in \{1, p\}$$

وإذا لم يكن العدد p أوّليّاً قلنا إنّه مركّب.

أمثلة

الأعداد $2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47$ هي الأعداد الأوّليّة الأصغر من 50.

تدريب

أوجد بقيّة الأعداد الأوّلية الأصغر من 100.

نتيجة هامّة

يكون العدد n و $\mathbb{N}$ مركّبا إذا وفقط إذا كان له قاسم أوّليّ p يحقّق $p^2 \leq n$.

مثال

كي نعرف فيما إذا كان العدد 137 أوّلياً أم لا، يكفي اختبار قابليّة قسمة هذا العدد على الأعداد $2,3,5,7,11$. هل هو أوّلي أم لا ؟

المبرهنة الأساسيّة في الحساب

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً تماماً، يوجد أعداد أوّليّة $p_k,\cdots,p_2,p_1$ وأعداد طبيعيّة غير معدومة $\alpha_k,\cdots,\alpha_2,\alpha_1$ بحيث $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$. إنّ هذه الأعداد وحيدة باستثناء ترتيبها.

نستخدم الرمز التالي $p^{\alpha}\|n$ للدلالة على أنّ p^{α} يقسم n وأنّ $p^{\alpha+1}$ لا يقسم n.

نتيجة1

ليكن a و b من $\mathbb{Z}$ و p عدد أوّليّ. لدينا $p|(ab) \Rightarrow (p|a)\vee(p|b)$.

نتيجة2

يوجد عدد لانهائي من الأعداد الأوّليّة.

تمرين1

أثبت أنّ p أوّلي إذا وفقط إذا تحقّقت المساواة : $2 = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\left\lfloor\frac{p}{k}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{p-1}{k}\right\rfloor\right)$. (حيث يرمز $\lfloor x \rfloor$ إلى الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x وهو العدد الصحيح الوحيد الذي يحقّق $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$ أو $x-1 < \lfloor x\rfloor \leq x$).

القاسم المشترك الأكبر

تعريف

ليكن n و m عددين صحيحين، نرمز بالرمز D_k إلى مجموعة القواسم الموجبة لـ k. إنّ المجموعة $D_n \cap D_m$ مجموعة محدودة غير خالية فلها أكبر عنصر، نسمّي هذا العنصر القاسم المشترك الأكبر للعددين n و m ونرمز إليه بالرمز $\gcd(n,m)$.

أمثلة

1. $\gcd(24,18) = 6$.
   $D_{24} = \{1,2,3,4,6,12,24\}, D_{18} = \{1,2,3,6,9,18\}, D_{18}\cap D_{24} = \{1,2,3,6\}$.
2. $\gcd(-12,16) = 4$.
   $D_{16} = \{1,2,4,8,16\}, D_{-12} = \{1,2,3,6,12\}, D_{-12}\cap D_{16} = \{1,2,4\}$

تعريف

نقول إنّ العددين n و m أوّليّان فيما بينهما إذا كان $\gcd(n,m) = 1$.

نتائج مباشرة :

1. إذا كان p أوّليّاً و n عدداً صحيحاً فإنّ $\gcd(p,n)$ ∋ $\{1,p\}$.
2. إذا كان $d = \gcd(n,m)$ و $n = dn'$ و $m = dm'$ فإنّ $\gcd(n',m') = 1$.
3. إذا كان d' قاسماً مشتركاً لكلّ من n و m فإنّ $d' | \gcd(n,m)$.
4. إذا كان $p^a \| n$ و $p^b \| m$ فإنّ $p^{\min(a,b)} \| \gcd(n,m)$.
5. إذا كان $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ و $m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ فإنّ $\gcd(n,m) = p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)} \cdots p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}$.
6. إذا كان $n = mq + r$ فإنّ $\gcd(n,m) = \gcd(m,r)$.

مبرهنة بيزو (Bezout)

ليكن (m,n) ∋ $\mathbb{N}^2$ يوجد (x,y) ∋ $\mathbb{Z}^2$ بحيث $xm + yn = \gcd(m,n)$.

نتيجة1

لدينا التكافؤ التالي :

$$\gcd(m,n) = 1 \Leftrightarrow \exists (x,y) \in \mathbb{Z}^2 : xm + yn = 1$$

ملاحظة

إذا كان (x_0, y_0) حلاً للمعادلة $xm + yn = 1$ فإنّ أيّ حلّ آخر (x,y) يكون من الشكل : $x = x_0 + kn$ و $y = y_0 - km$.

نتيجة2

إذا كان $a | bc$ و $\gcd(a,b) = 1$ فإنّ $a | c$.

نتيجة3

إذا كان $a | c$ و $b | c$ و $\gcd(a,b) = 1$ فإنّ $(ab) | c$.

نتيجة4

إذا كان p عدداً أوّليّاً فإن : $\forall k \in \mathbb{N}, 0 < k < p \Rightarrow p \left| \binom{p}{k} \right.$.

حيث $\binom{p}{k} = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$

المضاعف المشترك الأصغر

تعريف

ليكن n و m عددين صحيحين ، نرمز بالرمز M_k إلى مجموعة المضاعفات الموجبة لـ k. إنّ المجموعة $M_n \cap M_m$ مجموعة محدودة من الأدنى وغير خالية فلها أصغر عنصر، نسمّي هذا العنصر المضاعف المشترك الأصغر للعددين n و m ونرمز إليه بالرمز $\operatorname{lcm}(n,m)$.

نتائج مباشرة :

1. إذا كان $M = \operatorname{lcm}(m,n)$ و $M = am = bn$ ، عندها $\gcd(a,b) = 1$.
2. إذا كان $d = \gcd(n,m)$ و $n = dn'$ و $m = dm'$ فإنّ $dn'm' = \operatorname{lcm}(m,n)$.
3. إذا كان m' مضاعف مشترك لكلّ من n و m فإنّ $\operatorname{lcm}(n,m) | m'$.
4. إذا كان $p^a \| n$ و $p^b \| m$ فإنّ $p^{\max(a,b)} \| \operatorname{lcm}(n,m)$.
5. إذا كان $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ و $m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$ فإنّ $\operatorname{lcm}(n,m) = p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)} p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)} \cdots p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}$.

مبرهنة (عدد القواسم الموجبة لعدد طبيعي)

عدد القواسم الموجبة لعدد صحيح $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ هو $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\cdots(\alpha_k + 1)$.

تمرين2

يكون العدد x مربّعاً كاملاً إذا وفقط إذا كان عدد قواسمه الموجبة فرديّاً.

تمرين3

ليكن $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ أثبت أنّه يوجد $(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1)\cdots(2\alpha_k + 1)$ ثنائيّةً من الأعداد الموجبة التي تحقّق $\operatorname{lcm}(a,b) = n$.

نتيجة (تمرين4)

لدينا $\prod_{d|n} d = n^{\frac{\tau(n)}{2}}$.

تمرين5

أثبت أنّ $\tau(n) \le 2\sqrt{n}$.

مبرهنة (مجموع القواسم الموجبة لعدد طبيعي)

مجموع القواسم الموجبة لعدد طبيعي غير معدوم مفرّق إلى عوامله الأوّليّة بالشكل $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ هو:

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \times \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \times \cdots \times \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$$

الحساب بالقياس

تعريف

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً تماماً و x, y عددين صحيحين، نقول إنّ x و y متساويان بالقياس n إذا كان الفرق $x - y$ مضاعفاً لـ n. ونرمز إلى ذلك بالرمز : $x \equiv y \pmod{n}$.

مبرهنة

ليكن n عدداً صحيحاً موجباً تماماً و x, y عددين صحيحين، لدينا :

1. $x \equiv x \pmod{n}$.
2. $x \equiv y \pmod{n} \Rightarrow y \equiv x \pmod{n}$.

3. $\left(x\equiv y\left(\bmod n\right)\right)\wedge\left(y\equiv z\left(\bmod n\right)\right)\Rightarrow\left(x\equiv z\left(\bmod n\right)\right)$.
4. لتكن k,s,t أعداداً صحيحة نفترض أنّ $\left(x\equiv y\left(\bmod n\right)\right)\wedge\left(s\equiv t\left(\bmod n\right)\right)$ عندئذٍ
   a. $x+s\equiv y+t\left(\bmod n\right)$.
   b. $kx\equiv ky\left(\bmod n\right)$.
   c. $xs\equiv yt\left(\bmod n\right)$.
5. يوجد عدد وحيد r بحيث $0\le r<n$ و $x\equiv r\left(\bmod n\right)$.

تمرين6

1. ما هو باقي قسمة 7^{1000} على 9.
2. ما هو آحاد العدد 1946^{1946}.
3. ما هو باقي قسمة العدد 9^{2011} على 25.

تمرين7

لنتأمّل العددين $a=n^3-n^2-12n$ و $b=2n^2-7n-4$ حيث n عدد طبيعيّ $n\ge 5$.

1. أثبت أنّ كلاً من a و b من مضاعفات العدد $n-4$.
2. نضع $\alpha=2n+1$ و $\beta=n+3$ و $d=\gcd\left(\alpha,\beta\right)$.
   a. أوجد علاقة بين α و β بمعزل عن n.
   b. أثبت أنّ d يقسم b.
   c. أثبت أنّ : α و β من مضاعفات العدد 5 إذا وفقط إذا كان $n-2$ من مضاعفات العدد 5.
3. أثبت أنّ n و $2n+1$ أوّليّان فيما بينهما.
4. احسب $\gcd\left(a,b\right)$ وذلك تبعاً لقيم n.

المعهد العالي للعلوم التطبيقيّة والتكنولوجيا

علاقة الترتيب واستخدام المتراجحات

خالد حلاوة

علاقة الترتيب على مجموعة الأعداد الحقيقيّة

نرمز بالرمز $\mathbb{R}$ إلى مجموعة الأعداد الحقيقيّة. وإذا كان x و y عددين حقيقيّن فإنّنا نكتب $(x \le y)$ أو $(y \ge x)$ للدلالة عل أنّ x أصغر أو يساوي y، كما نكتب $(x < y)$ أو $(y > x)$ للدلالة عل أنّ x أصغر تماماً من y أي إذا كان $x \le y$ و $x \ne y$.

إنّ العلاقة $(\le)$ هي **علاقة ترتيب كلّي** على مجموعة الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$، بمعنى أنّها تحقّق ما يلي :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \le x$. أي إنّ $(\le)$ انعكاسيّة.
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x \le y) \wedge (y \le x) \Rightarrow x = y$. أي إنّ $(\le)$ تخالفيّة.
3. $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x \le y) \wedge (y \le z) \Rightarrow x \le z$. أي إنّ $(\le)$ متعدّية.
4. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, (x \le y) \vee (y \le x)$.

المتراجحات والعمليّات الحسابيّة

لتكن x, y, z أعداد حقيقيّة. نفترض أنّ $x \le y$ عندئذٍ :

1. $x + z \le y + z$.
2. إذا كان $z > 0$ فإنّ $xz \le yz$.
3. إذا كان $z < 0$ فإنّ $xz \ge yz$.
4. إذا كان $0 < x \le y$ فإنّ $\frac{1}{y} \le \frac{1}{x}$ و $x^2 \le y^2$.
5. إذا كان $x \le y < 0$ فإنّ $\frac{1}{y} \le \frac{1}{x}$ و $x^2 \ge y^2$.

جهة تغيّر تابع حقيقي

تعريف : لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{R}$. وليكن التابع $f : A \to \mathbb{R}$.

1. نقول عن f إنّه متزايد إذا تحقّق الشرط : $\forall (x,y) \in A^2, (x < y) \Rightarrow f(x) \le f(y)$. ونقول إنّه متزايد تماماً إذا تحقّق الشرط : $\forall (x,y) \in A^2, (x < y) \Rightarrow f(x) < f(y)$.
2. نقول عن f إنّه متناقص إذا تحقّق الشرط : $\forall (x,y) \in A^2, (x < y) \Rightarrow f(x) \ge f(y)$. ونقول إنّه متناقص تماماً إذا تحقّق الشرط : $\forall (x,y) \in A^2, (x < y) \Rightarrow f(x) > f(y)$.
3. نقول عن f إنّه مطّرد إذا كان متزايداً أو متناقصاً. ونقول إنّه مطّرد تماماً إذا كان متزايداً تماماً أو متناقصاً تماماً.

العنصر الراجح والعنصر القاصر

تعريف : لتكن المجموعة $X \subset \mathbb{R}$

1. نقول إنّ العدد الحقيقيّ β **راجح** على X إذا تحقق الشرط : $\forall x \in X, x \leq \beta$.
2. نقول إنّ العدد الحقيقيّ α **قاصر** على X إذا تحقّق الشرط : $\forall x \in X, \alpha \leq x$.

إذا كان للمجموعة X عنصر راجح فإنّنا نقول إنّها **محدودة من الأعلى** وإذا كان لها عنصر قاصر فإنّنا نقول إنّها **محدودة من الأدنى**، وإذا كان لها عنصر راجح وآخر قاصر فإنّنا نقول إنّها **محدودة**.

أمثلة

1. العناصر $0,1,5$ راجحة على المجموعة $]-\infty,0]$، وليس لهذه المجموعة عناصر قاصرة.
2. العناصر $-1,2,3$ قاصرة على المجموعة $[4,\infty[$، وليس لهذه المجموعة عناصر راجحة.
3. ليس للمجموعة $\mathbb{Z}$ لا عناصر قاصرة ولا راجحة.

أكبر عنصر وأصغر عنصر لمجموعة

تعريف

إذا وُجد عنصر $M \in X$ راجح على X فإنّ هذا العنصر وحيد نسمّيه **أكبر عنصر** في X ونكتب $M = \max X$.
وإذا وُجد عنصر $m \in X$ قاصر على X فإنّ هذا العنصر وحيد نسمّيه **أصغر عنصر** في X ونكتب $m = \min X$.

أمثلة

1. $\min([0,1]) = 0, \max([0,1]) = 1$.
2. ليس للمجموعة $X =]0,1]$ أصغر عنصر. إذ لو افترضنا وجود هكذا عنصر m لكان من جهة أولى $0 < m \leq 1$ ومن جهة ثانية $\forall x \in X, m \leq x$ وهذا غير ممكن لأنّ العنصر $\frac{m}{2}$ من المجموعة X وأصغر تماماً من m.
3. أكبر عنصر للمجموعة $X = [0,1[\cup \{2\}$ هو $\max X = 2$.
4. ليس للمجموعة $X = \left\{1 - \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ أكبر عنصر. أثبت ذلك.
5. كلّ مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{N}$ لها أصغر عنصر.

الحدّ الأعلى والحدّ الأدنى لمجموعة

تعريف

1. إذا كانت المجموعة $X \subset \mathbb{R}$ محدودة من الأعلى فإنّنا نسمّي أصغر العناصر الراجحة على X **الحدّ الأعلى** للمجموعة X ونرمز إليه بالرمز $\sup X$ وإذا لم تكن X محدودة من الأعلى نكتب $\sup X = +\infty$.
2. إذا كانت المجموعة $X \subset \mathbb{R}$ محدودة من الأدنى فإنّنا نسمّي أكبر العناصر القاصرة على X **الحدّ الأدنى** للمجموعة X ونرمز إليه بالرمز $\inf X$ وإذا لم تكن X محدودة من الأدنى نكتب $\inf X = -\infty$.

ملاحظات :

- إذا كان للمجموعة X أكبر عنصر فإنّه هو حدّها الأعلى أي $\max X = \sup X$. ولكن وجود حدّ أعلى للمجموعة لا يقتضي وجود أكبر عنصر لها.
- ليس من الضروري أن يكون الحدّ الأعلى لمجموعة أحد عناصرها حتّى وإن كان حقيقيّاً. مثل $\sup([0,1[) = 1 \notin [0,1[$. وعندما يكون الحدّ الأعلى لمجموعة عنصراً من عناصرها فإنّه يكون أكبر عنصر.
- ليكن $z \in \mathbb{R}$، لدينا التكافؤين التاليين :
$$z = \inf X \Leftrightarrow (\forall x \in X, z \le x) \wedge (\forall z' \in \mathbb{R}, z < z' \Rightarrow (\exists x_0 \in X : z \le x_0 \le z'))$$
- إذا رمزنا بالرمز $-X$ إلى المجموعة $-X = \{-x : x \in X\}$ فإنّ $\sup(-X) = -\inf X$ وكذلك $\inf(-X) = -\sup X$.

أمثلة

1. $\sup(]-\infty,0]) = 0, \sup(]-\infty,0[) = 0$.
2. إنّ الحدّ الأعلى للمجموعة $X = \left\{1 - \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\right\}$ هو $\sup X = 1$.
3. ليس للمجموعة $\mathbb{N}$ حد أعلى ولكن لها حدّ أدنى (أصغر عنصر) هو 0.

الحدّ الأعلى والحدّ الأدنى لتابع

لتكن المجموعة غير الخالية $A \subset \mathbb{R}$ وليكن $f : A \to \mathbb{R}$ تابعاً معرّفاً على A ويأخذ قيمه في $\mathbb{R}$. لتكن المجموعة $X = f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ مجموعة القيم $f(x)$ عندما يمسح المتحوّل x المجموعة A. نعرّف الحدّ الأعلى للتابع f بالعلاقة $\sup f = \sup_{x \in A} f(x) = \sup X$ والحدّ الأدنى بالعلاقة $\inf f = \inf_{x \in A} f(x) = \inf X$.

عادةً ما يتمّ حساب الحدّين الأعلى والأدنى لتابع f بالبدء بدراسة جهة تغيّر التابع على المجموعة A.

أمثلة

1. أوجد الحدّين الأعلى والأدنى للتابع $f:[-1,1]\to\mathbb{R}:x\to\dfrac{1}{x^2+1}$.

نلاحظ أنّ التابع زوجي فيكفي دراسته على المجال $[0,1]$. وباعتبار التابع $x\to x^2+1$ موجب تماماً ومتزايد فإنّ التابع $x\to\dfrac{1}{x^2+1}$ متناقص وعليه فإنّ : $\forall x\in[0,1], f(1)\le f(x)\le f(0)$ وبالتالي :

$\inf f=f(1)=\dfrac{1}{2},\sup f=f(0)=1$.

2. أوجد الحدّين الأعلى والأدنى للتابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\to\dfrac{x}{x^4+1}$.

إنّ التابع f قابل للاشتقاق و لدينا :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\frac{1-3x^4}{\left(1+x^4\right)^2}$$

يُمكننا إنشاء جدول التغيّرات التالي :

x	$-\infty$		$-\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$		$\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$		∞
$f'(x)$	$-$		0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{3^{3/4}}{4}$	$\nearrow$	$\dfrac{3^{3/4}}{4}$	$\searrow$	0

ومن خلال الجدول السابق نجد أنّ : $\inf f=-\dfrac{3^{3/4}}{4},\sup f=\dfrac{3^{3/4}}{4}$.

تمرين 3 (محلول):

أوجد الحدّ الأعلى والأدنى للمجموعة $X=\left\{\left|\ln\left(1+x^2-2x\cos t\right)\right|:(x,t)\in[-a,a]\times[-\pi,\pi]\right\}$ حيث $0<a$.

الحلّ :

علينا أوّلاً إيجاد الحدّ الأعلى والأدنى للمجموعة $X' = \left\{ \ln\left(1 + x^2 - 2x\cos t\right) : \left(x, t\right) \in \left[-a, a\right] \times \left[-\pi, \pi\right] \right\}$

ليكن t ∋ $\left[-\pi, \pi\right]$ لدينا : $-1 \le \cos t \le 1$.

إذا كان $0 \le x \le a$ فإنّ :

$$-2x \le 2x\cos t \le 2x$$

وإذا كان $-a \le x \le 0$ فإنّ :

$$2x \le 2x\cos t \le -2x$$

وفي الحالتين نجد

$$-2\left|x\right| \le -2x\cos t \le 2\left|x\right|$$

ومنه $\left(1 - \left|x\right|\right)^2 = 1 + x^2 - 2\left|x\right| \le 1 + x^2 - 2x\cos t \le 1 + x^2 + 2\left|x\right| = \left(1 + \left|x\right|\right)^2$ وبالتالي باعتبار ln تابع متزايد فإنّ

$$2\ln\left(1 - \left|x\right|\right) = \ln\left(\left(1 - \left|x\right|\right)^2\right) \le \ln\left(1 + x^2 - 2x\cos t\right) \le \ln\left(\left(1 + \left|x\right|\right)^2\right) = 2\ln\left(1 + \left|x\right|\right)$$ ومنه

$$2\ln\left(1 - a\right) \le \ln\left(1 + x^2 - 2x\cos t\right) \le 2\ln\left(1 + a\right)$$

وبالتالي $2\ln\left(1 + a\right)$ عنصر راجح على X' كما أنّ $2\ln\left(1 + a\right) = \ln\left(1 + a^2 - 2a\cos\pi\right)$ ∋ X' ومنه $\max X' = 2\ln\left(1 + a\right)$. وبطريقة مماثلة نجد $\min X' = 2\ln\left(1 - a\right)$.

ولكن $\max X = \max\left(\left|\max X'\right|, \left|\min X'\right|\right)$.

وباعتبار أنّ العددين $\max X'$ و $\min X'$ أحدهما موجب والآخر سالب فإنه يتوجبّ علينا معرفة أيّهما أكبر بالقيمة المطلقة ويمكن تحديد ذلك من إشارة المجموع :

لدينا $0 > 2\ln\left(1 - a\right) + 2\ln\left(1 + a\right) = 2\ln\left(1 - a^2\right)$ وبالتالي $\left|\min X'\right| > \left|\max X'\right|$ ومنه $\max X = 2\left|\ln\left(1 - a\right)\right|$.

حلول المتراجحات

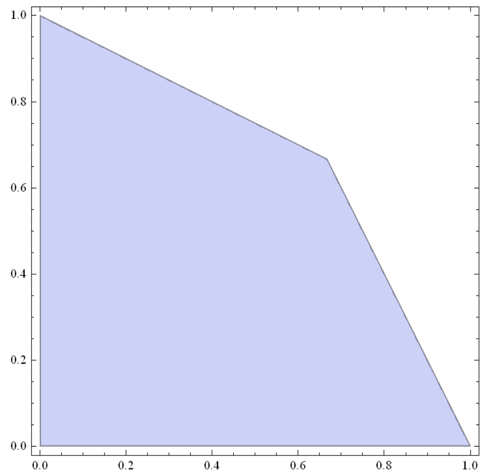
جملة متراجحات من الدرجة الأولى

تمرين1

مثّل بيانيّاً مجموعة حلول جملة المتراجحات التالية :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y + 2x \leq 2 \\ 2y + x \leq 2 \end{cases}$$

الإجابة

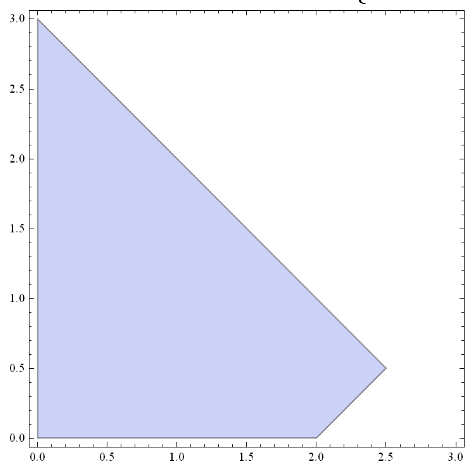


تمرين2

مثّل بيانيّاً مجموعة حلول جملة المتراجحات التالية :

$$\begin{cases} x + y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y - x \geq -2 \end{cases}$$

الإجابة

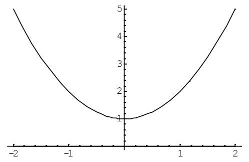
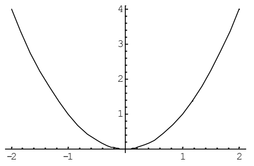
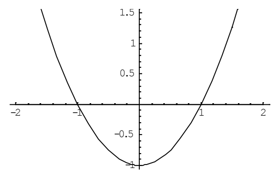
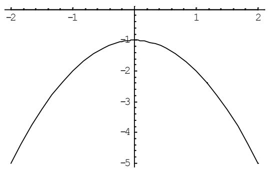
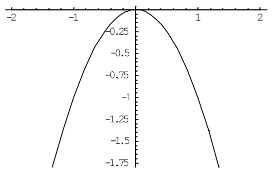
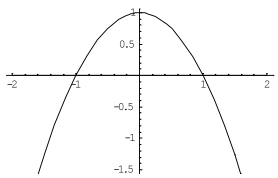


المتراجحات من الدرجة الثانية

ليكن $p(x) = ax^2 + bx + c$ مع $a \neq 0$. إن حل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ يتعلق بالمميّز $\Delta = b^2 - 4ac$ والجدول التالي يبين حلول هذه المعادلة تبعاً للمميز:

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
حلول المعادلة	لا يوجد حل	حل مضاعف $x = -\dfrac{b}{2a}$	حلان مختلفان: $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

أما بالنسبة لإشارة ثلاثي الحدود $p(x) = ax^2 + bx + c$ وبالتالي حلول المتراجحة $ax^2 + bx + c \geq 0$ فيبيّنها الجدول التالي:

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
$a > 0$	$p(x)$ موجب تماماً 	$p(x)$ موجب 	$p(x)$ سالب على المجال $[x_1, x_2]$ و موجب خارجه 
$a < 0$	$p(x)$ سالب تماماً 	$p(x)$ سالب 	$p(x)$ موجب على المجال $[x_1, x_2]$ و سالب خارجه 

مثال:

لدراسة إشارة المقدار $A(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{(x+1)^2}$ نلاحظ أن إشارته من إشارة $x^2 - 3x + 2$ لذلك نحسب المميز $\Delta = 1 > 0$ ومن ثم نحسب الجذرين $x_1 = 1$ و $x_2 = 2$ وبذلك يكون $A(x)$ سالباً على المجال $[1,2]$ وموجباً خارجه.

المعهد العالي للعلوم التطبيقيّة والتكنولوجيا

دراسة التوابع الحقيقية

خالد حلاوة

تذكير ببعض خواصّ علاقة الترتيب على مجموعة الأعداد الحقيقيّة:

ليكن y,x من $\mathbb{R}$ بحيث $x \leq y$ ، عندها:

- أيّاً كان z من $\mathbb{R}$ فإنّ $x+z \leq y+z$.
- إذا كان $k>0$ فإنّ $kx \leq ky$.
- إذا كان $k<0$ فإنّ $kx \geq ky$.
- إذا كان $xy>0$ (أي x و y من إشارة واحدة) فإنّ $\dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{y}$.

تتحقّق في $\mathbb{R}$ الخاصّة التالية: كلّ مجموعة جزئيّة من $\mathbb{R}$ ومحدودة من الأعلى لها حدّ أعلى في $\mathbb{R}$.

المجالات في $\mathbb{R}$:

ليكن a و b عددين حقيقيّين.

- المجالات المحدودة

$$\left[a,b\right]=\left\{x\in\mathbb{R},a\leq x\leq b\right\}$$
$$\left]a,b\right[=\left\{x\in\mathbb{R},a< x< b\right\}$$
$$\left[a,b\right[=\left\{x\in\mathbb{R},a\leq x< b\right\}$$
$$\left]a,b\right]=\left\{x\in\mathbb{R},a< x\leq b\right\}$$

- المجالات غير المحدودة

$$\left]-\infty,b\right]=\left\{x\in\mathbb{R},x\leq b\right\}$$
$$\left]-\infty,b\right[=\left\{x\in\mathbb{R},x< b\right\}$$
$$\left[a,\infty\right[=\left\{x\in\mathbb{R},x\geq a\right\}$$
$$\left]a,\infty\right[=\left\{x\in\mathbb{R},x> a\right\}$$

نقول عن مجال I إنّه غير تافه إذا كان فيه نقطتين على الأقلّ.

تعريف

ندعو تابعاً حقيقيّاً كلّ تطبيق منطلقه مجموعة جزئيّة من $\mathbb{R}$ ويأخذ قيمه في $\mathbb{R}$.

جهة تغيّر تابع:

ليكن f تابعاً معرّفاً على مجال غير تافه I .

- نقول إنّ f متزايد إذا تحقّق الشرط: $\forall(x,y)\in I^2,\left(x<y\Rightarrow f(x)\leq f(y)\right)$.
- نقول إنّ f متزايد تماماً إذا تحقّق الشرط: $\forall(x,y)\in I^2,\left(x<y\Rightarrow f(x)< f(y)\right)$.
- نقول إنّ f متناقص إذا تحقّق الشرط: $\forall(x,y)\in I^2,\left(x<y\Rightarrow f(x)\geq f(y)\right)$.
- نقول إنّ f متناقص تماماً إذا تحقّق الشرط: $\forall(x,y)\in I^2,\left(x<y\Rightarrow f(x)> f(y)\right)$.
- نقول إنّ f مطّرد إذا كان متزايداً أو متناقصاً.
- نقول إنّ f مطّرد تماماً إذا كان متزايداً تماماً أو متناقصاً تماماً.

العمليّات على التوابع:

ليكن u و v تابعين معرّفين على المجال نفسه I، و λ عدد حقيقيّ، نعرّف التوابع $u+v$ و $u\cdot v$ و λu المعرّفة على المجال I بالعلاقات التالية:

- $(u+v)(x)=u(x)+v(x)$.
- $(u\cdot v)(x)=u(x)v(x)$.
- $(\lambda u)(x)=\lambda u(x)$.

جهة تغيّر مجموع تابعين

إذا كان كلّ من u و v متزايداً كان $u+v$ متزايداً. و إذا كان كلّ من u و v متناقصاً كان $u+v$ متناقصاً. أمّا في الحالات الأخرى فلا يمكننا الحكم على جهة تغيّر $u+v$.

مثال

ليكن التابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ بالعلاقة: $f(x)=\dfrac{x^3+2x-4}{x}$. نكتب f على شكل مجموع تابعين لهما جهة التغيّر نفسها وهما: $u(x)=x^2+2$ و $v(x)=\dfrac{-4}{x}$. باعتبار u و v متزايدان فإنّ f متزايد على المجال $]0,+\infty[$.

جهة تغيّر تركيب تابعين

ليكن I و J مجالين. ليكن u تابعاً معرّفاً على المجال I ويحقّق: $\forall x\in I,u(x)\in J$. ليكن g تابعاً معرّفاً على المجال J. عندها يمكننا تعريف التابع $g\circ u$ على المجال I على النحو التالي:

$\forall x\in I,g\circ u(x)=g(u(x))$.

- إذا كان كلّ من u و g متزايداً كان $g\circ u$ متزايداً.
- إذا كان كلّ من u و g متناقصاً كان $g\circ u$ متزايداً.
- إذا كان أحد التابعين u و g متناقصاً والآخر متزايداً كان $g\circ u$ متناقصاً.

مثال

نأخذ التابعين: $u:x\to 5-x$ المعرّف على $]-\infty,+\infty[$ و $g:X\to\sqrt{X}$ المعرّف على $[0,+\infty[$. حتّى نستطيع تعريف التابع $g\circ u$ يجب أن يتحقّق الشرط $u(x)\geq 0$ أي $5-x\geq 0$ أو $x\leq 5$. أي أنّ مجال تعريف $g\circ u$ هو $]-\infty,5]$ ويكون $g\circ u(x)=\sqrt{5-x}$. إنّ u متناقص، و g متزايد وبالتالي $g\circ u$ متناقص.

كيف ندرس جهة تغير تابع دون اشتقاقه

يمكننا الاستفادة من النتائج التالية. ليكن u تابعاً حقيقياً لدينا:

- إذا كان $k>0$ فإن u و ku لهما جهة التغير نفسها.
- إذا كان $k<0$ فإن u و ku لهما جهتي تغير متعاكستين.
- مجموع تابعين متزايدين متزايد ومجموع تابعين متناقصين متناقص.
- حاصل تركيب تابعين لهما جهة تغير واحدة متزايد.

- حاصل تركيب تابعين لهما جهتي تغير متعاكستين متناقص.
- إذا كان u لا ينعدم ولا يغير إشارته على مجال ما فإن u و $\frac{1}{u}$ لهما جهتي تغير متعاكستين.

قراءات بيانية :

ليكن f تابعاً و C_f منحنيه البياني .

- الحل البياني للمعادلة $f(x)=0$ هو إيجاد نقاط تقاطع C_f مع محور الفواصل.
- الحل البياني للمتراجحة $f(x)>0$ هو إيجاد فواصل النقاط من C_f التي تقع فوق محور الفواصل.
- الحل البياني للمتراجحة $f(x)>g(x)$ هو إيجاد فواصل النقاط من C_f التي تقع فوق المنحني C_g.

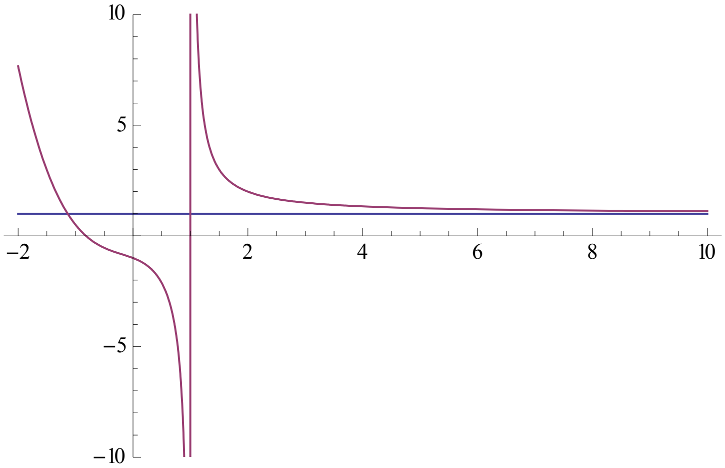
نهايات التوابع

- ليكن f تابعاً معرّفاً على المجال غير التافه I ولتكن a و $\mathbb{R}$ نقطة من I أو أحد طرفيه. نقول إنّ للتابع f نهاية l و $\mathbb{R}$ عند a، ونرمز إلى ذلك بالرمز $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$، إذا تحقّق الشرط التالي : أيّاً كان المجال المفتوح J الذي يحتوي l، يوجد $\delta>0$ بحيث إذا كانت x من I و $a-\delta<x<a+\delta$ كان $f(x)$ و J.
- نقول إنّ للتابع f نهاية l و $\mathbb{R}$ عند a **<u>من اليمين</u>**، ونرمز إلى ذلك بالرمز $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l$ ، إذا تحقّق الشرط التالي : أيّاً كان المجال المفتوح J الذي يحتوي l، يوجد $\delta>0$ بحيث إذا كانت x من I و $a<x<a+\delta$ كان $f(x)$ و J.
- نقول إنّ للتابع f نهاية l و $\mathbb{R}$ عند a **<u>من اليسار</u>**، ونرمز إلى ذلك بالرمز $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l$ ، إذا تحقّق الشرط التالي : أيّاً كان المجال المفتوح J الذي يحتوي l، يوجد $\delta>0$ بحيث إذا كانت x من I و $a-\delta<x<a$ كان $f(x)$ و J.
- نقول إنّ التابع f يسعى إلى الـ $+\infty$ عند a و $\mathbb{R}$، ونرمز إلى ذلك بالرمز $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$، إذا تحقّق الشرط التالي: أيّاً كان العدد الحقيقي A، يوجد $\delta>0$ بحيث إذا كانت x من I و $a-\delta<x<a+\delta$ كان $f(x)\geq A$.
- إذا كانت $+\infty$ أحد طرفيّ I و l و $\mathbb{R}$، فإنّنا نقول إنّ للتابع f نهاية l و $\mathbb{R}$ عند $+\infty$، ونرمز إلى ذلك بالرمز $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=l$ ، إذا تحقّق الشرط التالي : أيّاً كان المجال المفتوح J الذي يحتوي l، يوجد δ و I بحيث إذا كان $x>\delta$ كان $f(x)$ و J.
- إذا كانت $+\infty$ أحد طرفيّ I ، فإنّنا نقول إنّ التابع f يسعى إلى الـ $+\infty$ عند $+\infty$، ونرمز إلى ذلك بالرمز $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ ، إذا تحقّق الشرط التالي : أيّاً كان العدد الحقيقي A، يوجد δ و I بحيث إذا كان $x>\delta$ كان $A\leq f(x)$.

ملاحظة : يمكننا تعريف النهايات المتعلّقة بـ $-\infty$ بطريقة مشابهة.

مثال

ليكن التابع f الذي منحنيه البياني مبيّن في الشكل التالي:



لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = -\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

العمليّات على التوابع والنهايات

1. نهاية مجموع تابعين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L L'	L $+\infty$	L $-\infty$	$+\infty$ $+\infty$	$-\infty$ $-\infty$	$+\infty$ $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	عدم تعيين

2. نهاية جداء تابعين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L L'	$L\neq0$ $+\infty$ أو $-\infty$	0 $+\infty$ أو $-\infty$	$+\infty$ أو $-\infty$ $+\infty$ أو $-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)$	$L\times L'$	$\pm\infty$	عدم تعيين	$\pm\infty$

3. نهاية حاصل قسمة تابعين:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$ $\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L $L'\neq0$	$L\neq0$ 0	L $\pm\infty$	$\pm\infty$ L'	0 0	$\pm\infty$ $\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{L}{L'}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	عدم تعيين	عدم تعيين

النهايات البسيطة: $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ مع $n \geq 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

أمثلة:

- ليكن $p\left(x\right) = ax^2 + bx + c$ مع $a \neq 0$. إذا كان $x \neq 0$ يمكننا أن نكتب $p\left(x\right) = ax^2\left(1 + \dfrac{b}{ax} + \dfrac{c}{ax^2}\right)$. عندما تسعى x إلى $+\infty$ أو $-\infty$ فإنّ كلاًّ من $\dfrac{b}{ax}$ و $\dfrac{c}{ax^2}$ يسعى إلى الصفر. وبتطبيق قاعدة الجمع نجد $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1 + \dfrac{b}{ax} + \dfrac{c}{ax^2}\right) = 1$ وهذا يعني أنّ نهاية $p\left(x\right)$ هي نهاية ax^2 وهو الحدّ الأعلى درجة.

- ليكن $Q\left(x\right) = \dfrac{3x^2 + x}{4 - x}$ مع $x \neq 4$. إذا كان $x \neq 0$ يمكننا أن نكتب $Q\left(x\right) = \dfrac{3x^2\left(1 + \dfrac{1}{3x}\right)}{-x\left(1 - \dfrac{4}{x}\right)}$.
عندما تسعى x إلى $+\infty$ أو $-\infty$ فإنّ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1 + \dfrac{1}{3x}\right) = 1$ و $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1 - \dfrac{4}{x}\right) = 1$. بذلك نجد أنّ نهاية $q\left(x\right)$ هي نهاية $-3x = \dfrac{3x^2}{-x}$.

يمكننا تعميم النتيجتين السابقتين على النحو التالي:

- في اللاّنهاية، للتابع الصحيح والحدّ المسيطر فيه النهاية نفسها.
- في اللاّنهاية، للتابع الكسري وحاصل قسمة الحدّين المسيطرين في البسط والمقام النهاية نفسها.

تمرين محلول:

عيّن النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\dfrac{1}{x^2} - 4\right)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\dfrac{4x}{1 - x^2}$.

الحلّ:

- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2} - 4\right) = -4$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$. نستنتج، باستخدام قواعد الضرب مع مراعاة الإشارة، أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\dfrac{1}{x^2} - 4\right) = -\infty$.
- لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\left(4x\right) = -4$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\left(1 - x^2\right) = 0$. نحتاج إذن إلى معرفة إشارة $1 - x^2$. نلاحظ أنّه إذا كانت x في جوار -1 و $x < -1$ فإنّ $1 - x^2 < 0$ وبالتالي $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\dfrac{4x}{1 - x^2} = +\infty$.

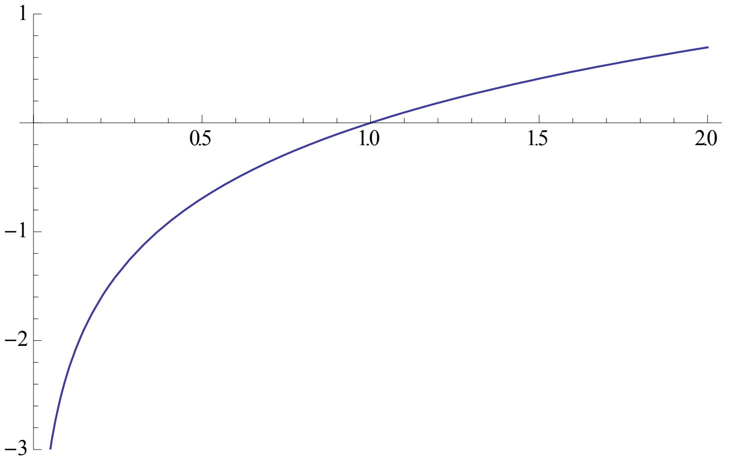
تدريب : احسب النهايتين: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3 + 5x - 4\right)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4 - x^2}{2x^2 + 1}$.

نهاية تركيب تابعين:

لتكن a ، b و l أعداداً حقيقيّة أو $+\infty$ أو $-\infty$. ليكن u و g تابعين بحيث يكون $g \circ u$ معرّفاً على مجال تكون a ضمنه أو تشكّل أحد طرفيه. بفرض $\lim_{x \to a} u(x) = b$ و $\lim_{X \to b} g(X) = l$. عندها يكون $\lim_{x \to a} g \circ u(x) = l$.

مثال:

يبيّن الرسم التالي المنحني البياني للتابع $g:]0,+\infty[\to \mathbb{R}, x \to \ln x$. ليكن u التابع المعرّف على $]2,+\infty[$ بالعلاقة $u(x) = 1 + \dfrac{3}{x-2}$. باعتبار أنّ u يبقى موجباً تماماً على هذا المجال فإنّه يمكننا تطبيق التابع g عليه.

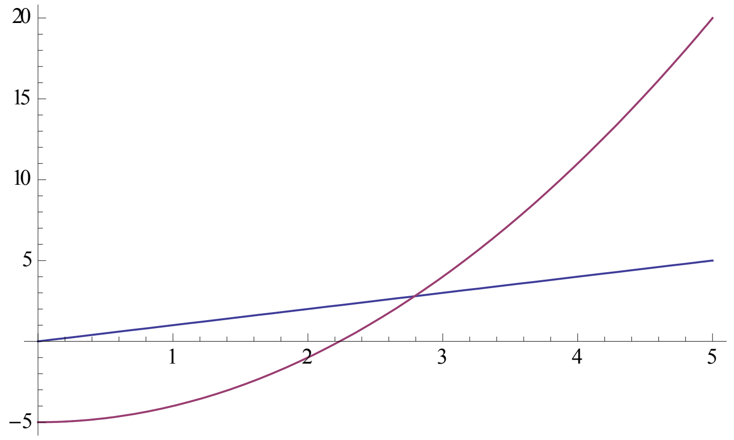


لدينا $\lim_{x \to 2}\left(1 + \dfrac{3}{x-2}\right) = +\infty$ ، كما أنّ $\lim_{X \to +\infty} g(X) = +\infty$ إذن $\lim_{x \to 2} g \circ u(x) = +\infty$.

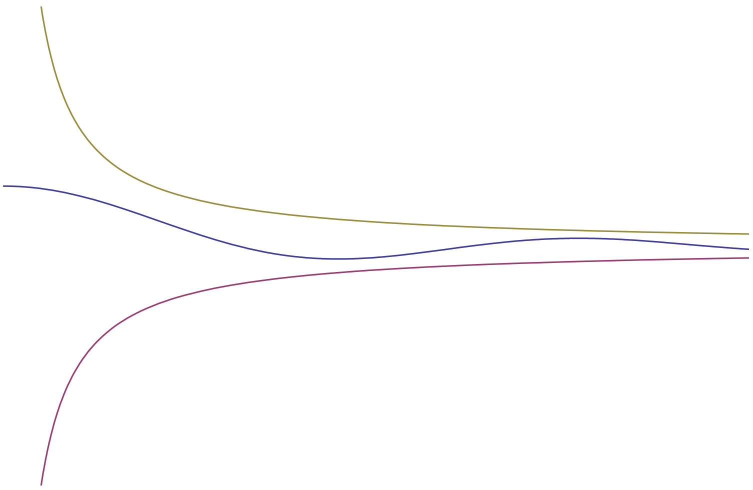
من جهة أخرى لدينا $\lim_{x \to +\infty}\left(1 + \dfrac{3}{x-2}\right) = 1$ و إذن $\lim_{x \to \infty} g \circ u(x) = g(1) = 0$.

إيجاد النهاية بالمقارنة:

- إذا وُجد عدد حقيقي A بحيث $\forall x \ge A, f(x) \ge g(x)$ (أي إنّ f أكبر من g اعتباراً من حدّ معيّن A) وكان $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ عندها $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



- إذا وُجد عدد حقيقي A بحيث $\forall x \ge A, u(x) \le f(x) \le v(x)$ وإذا كان $\lim_{x \to a} u(x) = \lim_{x \to a} v(x) = l$ عندها يكون لدينا $\lim_{x \to a} f(x) = l$.



تمرين محلول:

ليكن f التابع المعرّف على المجال $]0,+\infty[$ بالعلاقة: $f(x)=\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}$. احسب نهايتيّ التابع عند طرفيّ مجموعة تعريفه.

الحلّ:

- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4+\dfrac{1}{x}\right)=4$ و $\lim\limits_{X\to4}\sqrt{X}=\sqrt{4}=2$. بالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}=2$.
- لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$ إذن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(4+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$. كما أنّ $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$ وبالتالي $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\sqrt{4+\dfrac{1}{x}}=+\infty$.

تمرين 1

ادرس النهايات التالية

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2+1}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(x+1\right)$	$\lim\limits_{x\to4}\left(\sqrt{x}+x\right)$
$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x-3}{x^2-1}$	$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x}{x}$
$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x}}+1}{x+\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{2x+6}{x^2-x-2}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}{x+\sqrt{x}}$
$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3-x^2}{x^2+1}\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-x^2\right)$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$

تمرين2

ليكن التابع $f\left(x\right)=\dfrac{3\left(x+10\right)^{2}}{x^{2}+400}$ الذي يمثّل عدد سكان مدينة بالملايين تبعاً للعام x علماً أنّ $x=0$ في عام 1960.

1. احسب $f'\left(x\right)$ واستنتج جهة تغيّر التابع f.
2. أوجد نهايتيّ f عند $-\infty$ وعند $+\infty$. ما تأويلك لهذه النتائج؟
3. نظّم جدول تغيّرات التابع f وعيّن عليه النهايات المحلّيّة الصغرى والكبرى.
4. حلّ المتراجحة $f\left(x\right)\geq 3$.
5. في ضوء الدراسة السابقة، أجب عن الأسئلة: في أيّ عام يصل عدد سكان المدينة إلى 3 ملايين؟ ومتى يصبح عدد السكّان أكبر ما يمكن؟ وما هو عدد سكّان المدينة في المدى الطويل؟

الاستمرار ومبرهنة القيمة الوسطى

تعريف

نقول إنّ التابع f المعرّف على المجال I مستمرّ عند النقطة a من I إذا تحقّق الشرط: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

ونقول إنّه مستمرّ على I إذا كان مستمرّاً عند كلّ نقطة من نقاط المجال I. بيانيّاً، يكون التابع مستمرّاً على I إذا كان منحنيه البياني مستمرّاً لا انقطاع فيه.

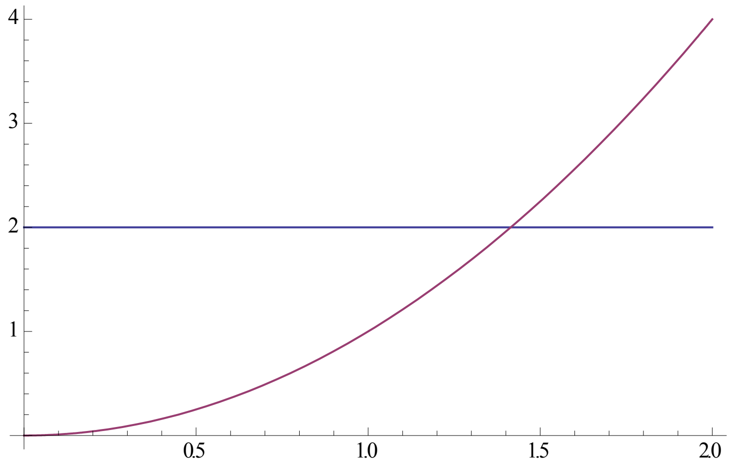
ملاحظة : إنّ التوابع الصحيحة مستمرّة على مجموعة الأعداد الحقيقيّة، والتابع $x \to \sqrt{x}$ مستمرّ على $[0,+\infty[$.

مبرهنة

إذا كان كلّ من u و v مستمراً على I فإنّ كلاًّ من ku، $u+v$ و uv مستمر على I وإذا كان v لا ينعدم على هذا المجال كان $\frac{u}{v}$ مستمرّاً على I.

مبرهنة القيمة الوسطى:

ليكن التابع f المعرّف والمستمرّ على المجال $[a,b]$ ومطّرد تماماً. ولتكن λ قيمة بين $f(a)$ و $f(b)$ عندها يوجد حلّ وحيد للمعادلة $f(x) = \lambda$.



مثال:

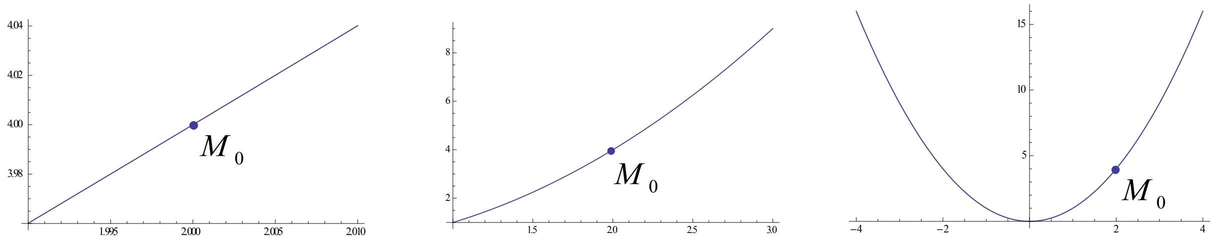
ليكن التابع $f(x) = x^5 + x$. هذا التابع مستمرّ على المجال $[0,1]$ كما أنّه قابل للاشتقاق على هذا المجال ولدينا: $f'(x) = 5x^4 + 1 > 0$ فالتابع متزايد تماماً على المجال المذكور. كما أنّ $f(0) = 0$ و $f(1) = 2$. إذن حسب مبرهنة القيمة الوسطى نستنتج أنّ للمعادلة $x^5 + x = 1$ حلّ وحيد في المجال $[0,1]$.

ملاحظة: ليكن f معرّفاً ومستمرّاً على المجال $[a,b]$. ولتكن λ قيمة بين $f(a)$ و $f(b)$ عندها يوجد حلّ للمعادلة $f(x) = \lambda$. (حذفنا هنا شرط الاطّراد التامّ عن التابع فخسرنا وحدانيّة الحلّ). كما في المثال: $f(x) = x^3 - x$ المعرّف المجال $[-2,2]$.

الاشتقاق

تمهيد :

لنتأمّل التابع $f(x)=x^2$ المعرّف على $\mathbb{R}$، ولنراقب المنحني البياني للتابع بجوار النقطة $M_0(2,4)$. نلاحظ أنّ المنحني يقترب شيئاً فشيئاً من مستقيم مار بالنقطة ميله يساوي 4. هذا المستقيم معادلته $Y-4=4(X-2)$.

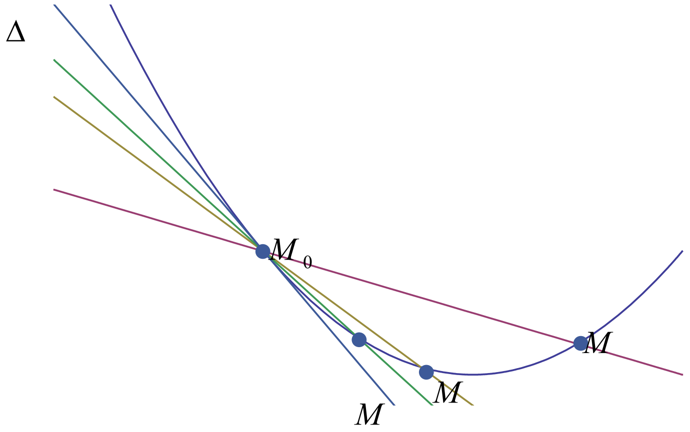


كذلك سنحصل على النتيجة ذاتها إذا أخذنا نقطة $M_0(x_0,y_0)$ من المنحني وسيكون ميل المستقيم $2x_0$.

لنتأمّل الآن نقطة $M(x,y)$ من المنحني مجاورة للنقطة M_0. يمكن التعبير عن فاصلة النقطة M بالشكل $x=x_0+h$ حيث h صغير فيكون ترتيبها هو $y=(x_0+h)^2$. لنحسب m ميل المستقيم (M_0M) :

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{2x_0h+h^2}{h}=2x_0+h$$

نلاحظ أنّ ميل المستقيم (M_0M) الواصل بين لنقطتين M_0 و M يسعى نحو العدد $2x_0$ عندما يسعى h نحو الصفر. نسمّي العدد الأخير مشتقّ التابع f عند x_0.



تعريف :

ليكن f تابعاً معرّفاً على مجال غير تافه I و $x_0 \in I$. نقول إنّ f يقبل الاشتقاق عند النقطة x_0 إذا كان للمقدار $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ نهاية عندما تسعى h إلى الصفر بقيم مختلفة عن الصفر. نسمّي هذه النهاية مشتقّ التابع f عند x_0 ونرمز إليه بـ $f'(x_0)$. أي: $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

وفي هذه الحالة يكون لمنحني التابع مماس في النقطة $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ معادلته :

$Y = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(X - x_0\right)$. بمعنى آخر يمكننا تقريب التابع f بجوار النقطة M_0 بالمقدار $f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$.

مبرهنة : إذا قبل التابع f الاشتقاق عند x_0 فإنّه مستمرّ عند هذه النقطة.

لكنّ العكس خاطئ كما تبيّن التمارين التالية.

تمرين3

ادرس قابليّة التابع $f : \left[0, \infty\right[\to \mathbb{R} : x \to \sqrt{x}$ عند $x_0 = 3$، ومن ثمّ عند نقطة x_0 من المجال $\left]0, \infty\right[$. هل يقبل التابع الاشتقاق عند الصفر ؟

ملاحظة : إذا كان $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f\left(x\right) - f\left(x_0\right)}{x - x_0} = \pm\infty$ فإنّ التابع لا يقبل الشتقاق عند النقطة x_0، وفي هذه الحالة يقبل منحني التابع مماساً شاقوليّاً عند النقطة $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$.

الإجابة : $f'\left(3\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$. $f'\left(x_0\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$. لا يقبل f الاشتقاق عند الصفر.

تمرين4 $\sqrt{\ }$ $\sqrt{\quad}$

ادرس قابليّة اشتقاق التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \left|x\right|$ عند نقطة x_0 من $\mathbb{R}$. (ميّز بين الحالات المختلفة).

نذكّر : عندما $x \in \mathbb{R}$ فإنّ $\left|x\right| = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$.

ارسم منحني التابع البياني وفسّر النتائج بيانيّاً.

الإجابة : إذا كان $x_0 > 0$ كان $f'\left(x_0\right) = 1$، وإذا كان $x_0 < 0$ كان $f'\left(x_0\right) = -1$، أمّا إذا كان $x_0 = 0$ فإنّ f لا يقبل الاشتقاق عند x_0.

تمرين5

ادرس قابليّة اشتقاق التابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to \left|x^2 - 1\right|$ عند نقطة x_0 من $\mathbb{R}$.

الإجابة :

$$f'\left(x_0\right) = \begin{cases} -2x_0 & x \in \left]-1, 1\right[\\ 2x_0 & x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, \infty\right[\end{cases}$$

ولا يقبل f الاشتقاق عند $x_0 = -1$ أو $x_0 = 1$.

تعريف

إذا كان f قابلاً للاشتقاق عند كلّ نقطة من I فإنّنا نقول إنّ f قابل للاشتقاق على I. وفي هذه الحالة نعرّف التابع المشتقّ على المجال I على النحو التالي: $f : I \to \mathbb{R} : x \to f'\left(x\right)$.

مثال

إنّ التابع $f:\left]0,\infty\right[\to\mathbb{R}:x\to\sqrt{x}$ يقبل الاشتقاق عند كلّ نقطة من المجال $\left]0,\infty\right[$ والتابع المشتقّ له هو التابع f' المعرّف على $\left]0,\infty\right[$ بالصيغة : $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

$\sqrt{\ }$

تمرين6

استخدم التعريف لتثبت أنّ التوابع الثلاثة التالية $f(x)=k$ و $g(x)=kx$ و $h(x)=x^2$ حيث k ثابت حقيقيّ، تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ وعيّن التوابع h',g',f'.

الإجابة : $f'(x)=0, g'(x)=k, h'(x)=2x$.

تمرين7

ليكن n عدداً طبيعيّاً، نعرّف التابع $x\to x^n$ (التابع $x\to x^0$ هو التابع $x\to 1$ اصطلاحاً).

أثبت بالتدريج أنّه أيّاً كان العدد الطبيعي $n\geq 1$ فإنّ التابع $x\to x^n$ يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأنّ مشتقّه هو التابع $x\to nx^{n-1}$.

أثبت أيضاً أنّه أيّاً كان العدد الطبيعي $n\geq 1$ فإنّ التابع $x\to x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$ يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ وأنّ مشتقّه هو التابع $x\to\dfrac{-n}{x^{n+1}}$.

قواعد الاشتقاق

تمكّننا المبرهنتان التاليتان من حساب مشتقّات التوابع المختلفة انطلاقاً من مشتقّات توابع بسيطة.

مبرهنة :

ليكن u و v تابعين قابلين للاشتقاق على المجال غير التافه I و k عدد حقيقيّ ثابت. عندها تكون التوابع $u+v$ و uv و ku قابلة للاشتقاق على I ويكون لدينا:

$$\begin{aligned}(u+v)'(x)&=u'(x)+v'(x)\\(k\cdot u)'(x)&=k\cdot u'(x)\\(u\cdot v)'(x)&=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)\end{aligned}$$

وإذا كان v لا ينعدم على I فإنّ $\dfrac{u}{v}$ يقبل الاشتقاق على I ويكون

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

حالة خاصّة : إذا أخذنا $u\equiv 1$ أصبح $\dfrac{1}{v}$ قابلاً للاشتقاق ومشتقّه $\left(\dfrac{1}{v}\right)'(x)=-\dfrac{v'(x)}{v(x)^2}$.

مبرهنة : مشتقّ تركيب تابعين

ليكن u تابعاً قابلاً للاشتقاق على المجال I و g تابعاً قابلاً للاشتقاق على المجال J بحيث $\forall x \in I, u(x) \in J$.
عندها يكون التابع $f = g \circ u$ قابلاً للاشتقاق على I ويكون

$$(g \circ u)'(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x)$$

نتائج:

- ليكن u تابعاً قابلاً للاشتقاق على المجال I، عندها يكون التابع u^n قابلاً للاشتقاق على I ويكون $(u^n)'(x) = nu^{n-1}u'(x)$.
- وإذا كان u لا ينعدم على I فإنّ $\frac{1}{u}$ و $\frac{1}{u^n}$ يقبلان الاشتقاق ويكون لدينا $\left(\frac{1}{u}\right)'(x) = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$ و $\left(\frac{1}{u^n}\right)'(x) = -\frac{nu'(x)}{u^{n+1}(x)}$.
- وإذا كان u موجباً تماماً على I فإنّ $\sqrt{u}$ يقبل الاشتقاق ويكون لدينا $\left(\sqrt{u}\right)'(x) = \frac{u'(x)}{2u(x)}$.

مثال:

التابع $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ يقبل الاشتقاق على المجال $]-2,2[$ ومشتقّه: $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$

مشتقّات بعض التوابع المألوفة:

يبيّن الجدول التالي مشتقّات بعض التوابع البسيطة:

التابع f	المشتقّ f'	مجموعة التعريف
$f(x) = k$ k ثابت	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$ a,b ثوابت	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ n عدد طبيعي غير الصفر	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ n عدد طبيعي غير الصفر	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$f(x) = \cos$
$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z}\right\}$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$f(x) = \tan x$
$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$	$f(x) = e^x$
$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$f(x) = \ln x$

تمرين8

أوجد مجموعة تعريف كلّ من التوابع التالية وادرس قابليّتها للاشتقاق واحسب التابع المشتقّ على مجموعة تعريفه.

$f_3(x) = 2 + \dfrac{3}{x}$	$f_2(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 13}{7}$	$f_1(x) = x^3 - 2x^2 + x - 6$
$f_6(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$	$f_5(x) = \dfrac{3}{4x}$	$f_4(x) = \dfrac{1}{2}x^4 + x - \dfrac{3}{4}x^2$
$f_9(x) = x\sqrt{x}$	$f_8(x) = \dfrac{1}{x^7}$	$f_7(x) = \dfrac{\sin x}{x}$
$f_{12}(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$	$f_{11}(x) = \dfrac{x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1}$	$f_{10}(x) = (x+1)\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$
$f_{15}(x) = \dfrac{\sin x + 2}{\cos x + 3}$	$f_{14}(x) = \left(x^3 + 2x\right)\sqrt{x}$	$f_{13}(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$
$f_{18}(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$	$f_{17}(x) = \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$	$f_{16}(x) = \sin\left(x^2 + 1\right)$

تمرين9

هل لمنحني التابع $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ مماساً موازياً للمستقيم ذي المعادلة : $Y = -X + 1$ ؟ عيّن معادلة هذا المماس في حال الإيجاب.

تمرين10

باستخدام تعريف المشتقّ احسب النهايات التالية :

$$\lim_{\substack{x \to 3 \\ \neq}} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x - 3}, \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{\sin x}{x}, \qquad \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ \neq}} \left(\frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}\right)$$

(الرمز $\neq$ يعني أنّ النهاية بقيم مختلفة عن x_0 في كلّ حالة).

مبرهنة رئيسيّة:

ليكن f قابلاً للاشتقاق على المجال I، عندها:

- إذا كان $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ فإنّ f متزايد على I.

- إذا كان $\forall x \in I, f'\left(x\right) = 0$ فإنّ f ثابت على I.
- إذا كان $\forall x \in I, f'\left(x\right) \leq 0$ فإنّ f متناقص على I.
- إذا كان $\forall x \in I, f'\left(x\right) > 0$ فإنّ f متزايد تماماً على I.
- إذا كان $\forall x \in I, f'\left(x\right) < 0$ فإنّ f متناقص تماماً على I.

مبرهنة

إذا كان التابع f متزايداً تماماً على المجال المفتوح $\left]a,b\right[$ ومستمرّاً على المجال المغلق $\left[a,b\right]$، كان f متزايداً تماماً على المجال المغلق $\left[a,b\right]$.

القيم المحلّيّة

تعريف

ليكن التابع f المعرّف على المجال غير التافه I ولتكن $a \in I$. نقول إنّ التابع f يبلغ قيمةً محلّيّةً عظمى إذا وُجد $\delta > 0$ بحيث يتحقّق ما يلي :

$$\forall x \in \left]a-\delta, a+\delta\right[\cap I, f\left(x\right) \leq a$$

ونقول إنّ التابع f يبلغ قيمةً محلّيّةً صغرى إذا وُجد $\delta > 0$ بحيث يتحقّق ما يلي :

$$\forall x \in \left]a-\delta, a+\delta\right[\cap I, f\left(x\right) \geq a$$

تعريف

ليكن التابع f المعرّف والقابل للاشتقاق على المجال غير التافه I، نقول عن النقطة $a \in I$ إنّها نقطة حرجة إذا كان $f'(a) = 0$.

مبرهنة

ليكن التابع f المعرّف والقابل للاشتقاق على المجال غير التافه I، إذا بلغ التابع قيمةً محلّيّةً (عظمى أو صغرى) عند النقطة $a \in I$ من داخل المجال (أي إنّ a ليست أحد أطراف المجال I) عنها تكون a نقطةً حرجة أي $f'(a) = 0$.

تمكّننا المبرهنات السابقة من دراسة تغيّرات تابع.

مثال هام

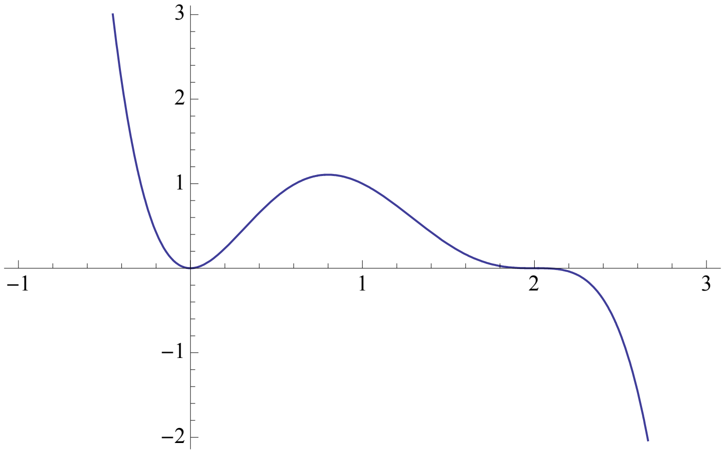
ادرس تغيّرات التابع $f\left(x\right) = x^2\left(2-x\right)^3$.

التابع معرّف وقابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومشتقّه هو

$$f'\left(x\right) = 2x\left(2-x\right)^3 + x^2 \times 3\left(2-x\right)^2\left(-1\right) = x\left(2-x\right)^2\left(4-5x\right)$$

نلاحظ أنّ إشارة f' من إشارة $x\left(4-5x\right)$ ومنه يمكننا استنتاج تغيّرات التابع f التي يمكن أن نلخّصها في الجدول التالي:

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{5}$		∞
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{4}{5}\right)$	$\searrow$	



لاحظ ما يلي :

1. التابع f متناقص تماماً على المجال $]-\infty,0]$ بالرغم من أنّ f' ليس سالباً تماماً على هذا المجال.
2. للتابع f ثلاث نقاط حرجة في $\mathbb{R}$ وهي $a=0, b=\frac{4}{5}, c=0$.
3. للتابع f قيمتين محلّيّتين في $\mathbb{R}$ الأولى صغرى وهي a والثانية عظمى وهي b.
4. على المجال $[0,3]$، النقطة $b=2$ نقطة حرجة ولكن التابع لا يبلغ قيمةً محلّيّةً عندها (لا عظمى ولا صغرى) وذلك لأنّ f موجب تماماً على المجال $]1,2[$ وسالب تماماً على المجال $]2,3[$ بينما $f(2)=0$.
5. يبلغ التابع f أكبر قيمة له على المجال $[-1,1]$ عند النقطة $a=-1$ وهي ليست نقطة حرجة.

ملاحظة هامّة

لكي نعرف الحدّ الأعلى والحدّ الأدنى لتابع f معرّف على مجال غير تافه I، نقارن بين قيم التابع عند النقاط الحرجة ونهاياته عند أطراف المجال I.

تمرين 11

لنتأمّل التابع المعرّف على المجال $]0,2[$ بالعلاقة $f(x)=\dfrac{1+x}{x^2-2x}$.

1. احسب نهايات التابع عند طرفيّ مجال تعريفه.
2. أثبت قابليّة f للاشتقاق على مجال تعريف واحسب f'.
3. ادرس إشارة التابع f' ونظم جدول تغيّرات التابع.

تمرين 12

ليكن التابع المعرّف بالعلاقة $f(x)=x^3-3x^2+1$.

1. نظّم جدول تغيّرات التابع f.
2. مثّل f بيانيّاً.
3. ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$. هل يمكنك إعطاء قيمة تقريبيّة لكلّ من هذه الحلول ؟

تمرين 13

ليكن التابع f المعرّف على المجال $[0,+\infty[$ بالعلاقة $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+3}$.

1. انظم جدول تغيّرات التابع f.
2. مثّل f بيانيّاً، وارسم بشكل خاص المماس عند $x_0 = 0$.

تمرين14

ليكن التابع f المعرّف على المجال $\left[0,1\right[$ بالعلاقة : $f\left(x\right) = \sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$.

1. انظم جدول تغيّرات التابع.
2. ليكن Γ_1 المنحني البياني للتابع f في المستوي المنسوب إلى الجملة النظاميّة. عيّن معادلة المماس T للمنحني Γ_1 في النقطة التي فاصلتها $x_0 = \dfrac{1}{2}$ منه، وارسم كلاًّ من Γ_1 و T.
3. ارسم Γ_2 المنحني البياني المناظر لـ Γ_1 بالنسبة لمحور الفواصل.
4. لتكن $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. أثبت أنّ لـ Γ المعادلة الديكارتيّة التالية : $x^3 + \left(x-1\right)y^2 = 0$.

لتكن $\mathtt{I}$ النقطة التي إحداثيّاتها $\left(1,0\right)$ و C الدائرة التي قطرها $\left[\mathtt{OI}\right]$ وليكن Δ المستقيم المماس للدائرة C في النقطة $\mathtt{I}$، وأخيراً ليكن $\mathtt{D}$ مستقيم يمرّ من $\mathtt{O}$ وميله t من $\mathbb{R}$.

1. عيّن إحداثيّات $\mathtt{M}$ نقطة تقاطع C مع $\mathtt{D}$ (غير $\mathtt{O}$)، وكذلك إحداثيّات $\mathtt{N}$ نقطة تقاطع Δ مع $\mathtt{D}$.
2. عيّن إحداثيّات $\mathtt{M'}$ بحيث $\overrightarrow{\mathtt{OM'}} = \overrightarrow{\mathtt{MN}}$. وأثبت أنّ $\mathtt{M'}$ نقطة من المنحني Γ.

استخدام المشتقّ في التقريب:

إذا كان x قريباً من a فإنّ $f\left(x\right) \approx f\left(a\right) + f'\left(a\right)\left(x-a\right)$.

مثال: $\left(1+x\right)^n \approx 1 + nx$ و $\dfrac{1}{1+x} \approx 1 - x$ وذلك بجوار الصفر.

إيجاد معادلة المماس لمنحني التابع عند نقطة منه:

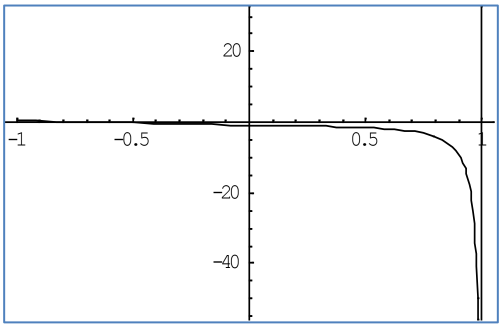
معادلة المماس لمنحني التابع f عند النقطة $A = \left(a, f\left(a\right)\right)$ مع f قابل للاشتقاق عند a هي:
$Y = f'\left(a\right)\left(X-a\right) + f\left(a\right)$.

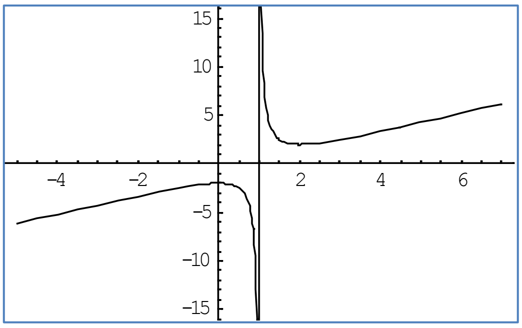
تدريب : أوجد معادلة المماس لمنحني التابع $f\left(x\right) = x^2 + x + 2$ عند النقطة التي فاصلتها $a = 2$.

المستقيمات المقاربة

1. المقارب الشاقولي:

ليكن c عدداً حقيقيّاً و C_f منحني التابع f. فإذا كان لدينا $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$، قلنا إنّ المستقيم ذا المعادلة $x = c$ مقارب شاقولي للمنحني C_f. كما في الشكلين التاليين.





غالباً ما يكون العدد c طرفاً لمجال مفتوح من مجموعة تعريف التابع f.

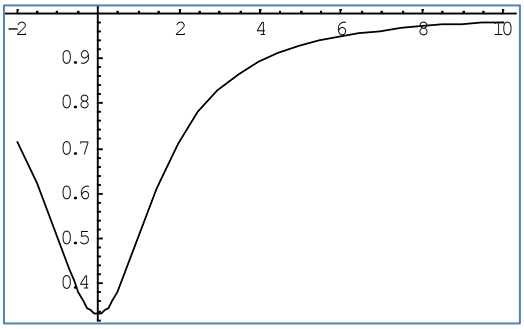
2. المقارب الأفقي:

إذا كان لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \quad \text{أو} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

قلنا إنّ المستقيم ذا المعادلة $y = b$ مقارب أفقي للمنحني C_f.

ويبيّن الشكل حالة المقارب في الـ $+\infty$



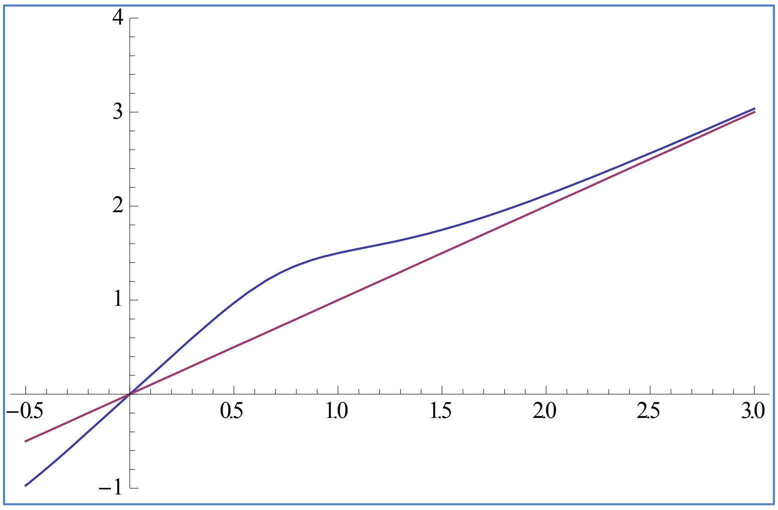
3. المقارب المائل:

في كثير من الأحيان يكون من المفيد مقارنة تابع ما f بتابع صحيح من الدرجة الأولى أي من الشكل $ax + b$ وذلك في جوار اللانهاية. لهذا الغرض ندرس التابع $f(x) - (ax+b)$ ونهايته عند $+\infty$ أو $-\infty$.

فإذا كان $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$ أو $\lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$، قلنا إنّ المستقيم Δ ذا المعادلة $y = ax + b$ مقارب مائل للمنحني C_f في الـ $+\infty$ أو في الـ $-\infty$.

إنّ دراسة إشارة التابع $f(x) - (ax+b)$ تفيد في معرفة فيما إذا كان المنحني C_f فوق المقارب Δ أو تحته. فإذا كان هذا التابع موجباً كان C_f فوق المقارب Δ وإذا كان سالباً كان C_f تحت المقارب Δ.

يبيّن الشكل التالي إحدى الحالات:



تمرين محلول:

ليكن التابع f المعرّف على المجال $]1,+\infty[$ بالعلاقة $f(x)=\dfrac{-x^2+4x}{x-1}$ و C_f منحنيه البياني. أثبت أنّ المستقيمين Δ ذا المعادلة $x=1$ و D ذا المعادلة $y=-x+3$ مقاربان لـ C_f. ادرس الوضع النسبي لـ C_f و D

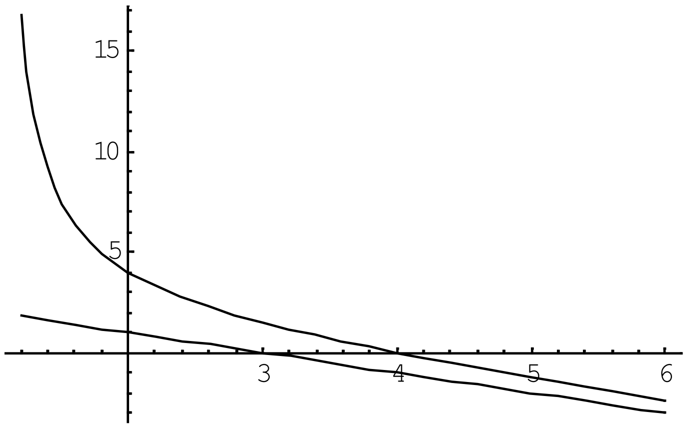
الحلّ:

- المقارب الشاقولي: لدينا $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(-x^2+4x\right)=-1+4=3$ مع $x-1>0$ إذن باستخدام قاعدة القسمة ومراعاة الإشارات نجد $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{-x^2+4x}{x-1}=+\infty$. بالتالي يكون المستقيم ذو المعادلة $x=1$ مقارباً للمنحني C_f.
- المقارب المائل: نتأمّل التابع $h(x)=f(x)-(-x+3)$. لدينا

$$h(x)=\frac{-x^2+4x}{x-1}-(-x+3)=\frac{-x^2+4x+x^2-x-3x+3}{x-1}=\frac{3}{x-1}$$

ولكن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x-1}=0$ بالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-(-x+3)\right)=0$ وبذلك يكون المستقيم D ذو المعادلة $y=-x+3$ مقارباً للمنحنى C_f.

رأينا أنّ $h(x)=\dfrac{3}{x-1}$ كما أنّ $x-1>0$ على المجال $]1,+\infty[$ إذن $\dfrac{3}{x-1}>0$ وبالتالي $h(x)$ موجب تماماً على المجال $]1,+\infty[$ والمنحني c_f يقع فوق المستقيم D.



ملاحظة: المسافة بين النقطة $M\left(x, f\left(x\right)\right)$ من C_f والنقطة $P\left(x, ax+b\right)$ من D هي $\left|f\left(x\right)-\left(ax+b\right)\right|$ ونقول عنها المسافة الشاقوليّة بين C_f و D. هذه المسافة تسعى إلى الصفر عندما تسعى x إلى $+\infty$.

كيف نجد المستقيم المقارب المائل في حال وجوده؟

لنفترض أنّ للمنحني C_f للتابع f مقارب مائل D معادلته $y = ax + b$ عند $+\infty$ مثلاً. عندها يكون $\lim_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-\left(ax+b\right)\right)=0$ وبالقسمة على x مع $x>0$ نجد $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f\left(x\right)}{x}-\left(a+\frac{b}{x}\right)\right)=0$

وباعتبار $\lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0$ نجد $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f\left(x\right)}{x}-a\right)=0$ وبالتالي $\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=a$.

أي أنّنا، لحساب الثابت a (ميل المقارب) نحسب النهاية $\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}$. فإذا ما حسبنا ميل المستقيم يبقى حساب فاصلة نقطة تقاطعه مع محور الفواصل b وهذه نحسبها من العلاقة $0=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(f\left(x\right)-ax\right)-b\right)$ وبالتالي $\lim_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-ax\right)=b$.

إذن بالنتيجة نحصل على a و b من العلاقتين التاليتين: $a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}$ و $b=\lim_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-ax\right)$.

مثال:

لإيجاد معادلة المقارب المائل $y = ax + b$ عند $+\infty$ لمنحني التابع $f\left(x\right)=\frac{3x^3+2x^2}{x^2+1}$. نلاحظ أنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+2x^2}{x\left(x^2+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+2x^2}{x^3+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3}{x^3}=3$ بالتالي $a=3$. من ثمّ نحسب b من العلاقة

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^3+2x^2}{x^2+1}-3x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2-3x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{x^2}\right)=2$$

أي أنّ معادلة المقارب للمنحني C_f هي $y=3x+2$.

تمرين15

ليكن التابع $f\left(x\right)=\dfrac{-x^2+3x}{x-2}$ المعرّف على المجال $\left]2,+\infty\right[$.

- عيّن نهاية f عند $+\infty$.
- عيّن الأعداد الحقيقيّة a,b,c التي تحقّق $f\left(x\right)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$ على المجال $\left]2,+\infty\right[$.

استنتج أنّ المنحني C_f يقبل المستقيم ذا المعادلة $y=-x+1$ كمقارب مائل عند $+\infty$.

- احسب نهاية f عند 2. ماذا تستنتج؟

تمرين16

أوجد معادلة المقارب المائل D عند $-\infty$ لمنحني التابع $f\left(x\right)=\dfrac{x\left(2x+1\right)}{x+1}$، وادرس وضع منحني التابع بالنسبة لهذا المقارب.

تمرين17

ليكن التابع $f\left(x\right)=\dfrac{x^3-x^2-4}{x^2+4}$

- أثبت أنّه يوجد مقارب مائل مشترك لمنحني التابع عند $-\infty$ وعند $+\infty$. ما هي معادلته؟
- ادرس وضع منحني التابع بالنسبة لهذا المقارب.

تمرين18

ادرس تغيّرات التابع $f\left(x\right)=\dfrac{x^3}{\left(x-1\right)^2}$ دراسة مفصّلة وارسم منحنيه البياني مع مقارباته.

المعهد العالي للعلوم التطبيقيّة والتكنولوجيا

التابعان الأسي واللوغاريتمي

خالد حلاوة

التابع الأسّي واللوغاريتمي وخواصهما

أوّلاً : التابع الأسّي

مبرهنة وتعريف :

يوجد تابع وحيد f يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ ويحقّق

$$\left(f(0)=1\right)\wedge\left(\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=f(x)\right)$$

نسمّي هذا التابع التابع الأسّي النيبيري ونرمز إليه بالرمز $\exp$.

تمرين

أثبت أنّ : $\forall x\in\mathbb{R}, \exp(-x)\exp(x)=1$ وبالتالي $\forall x\in\mathbb{R}, \exp(x)\neq 0$.

الحلّ

ليكن التابع المعرّف على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $g(x)=\exp(-x)\exp(x)$. إنّ g قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $\forall x\in\mathbb{R}, g'(x)=-\exp(-x)\exp(x)+\exp(-x)\exp(x)=0$ وبالتالي g ثابت ويحقّق $\forall x\in\mathbb{R}, g(x)=g(0)=\exp(-0)\exp(0)=1$.

الجزء الثاني من التمرين واضح.

مبرهنة

لدينا : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \exp(x+y)=\exp(x)\exp(y)$.

الإثبات

نثبّت y و $\mathbb{R}$، ونعرّف التابع g على $\mathbb{R}$ بالعلاقة $g(x)=\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}$. إنّ g قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنّ $x\to\exp(x+y)$ هو تركيب تابعين قابلين للاشتقاق والتابع $\exp(y)$ تابع ثابت غير معدوم.

و لدينا $\forall x\in\mathbb{R}, g'(x)=\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}=g(x)$، كما أنّ $g(0)=1$ وبالتالي $g=\exp$ لأنّ التابع $\exp$ هو الوحيد الذي يحقّق الخاصّتين السابقتين. ومنه $\forall x\in\mathbb{R}, g(x)=\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(y)}=\exp(x)$ وهذا يُكمل الإثبات.

نتائج

ليكن العدد الحقيقي x والعدد الطبيعي n. لدينا

1. $\exp(-x)=\dfrac{1}{\exp(x)}$.
2. $\exp(2x)=\exp(x)^2$.
3. $\exp(nx)=\exp(x)^n$.
4. $\exp(n)=\exp(1)^n$.

تمرين 1 : أثبت العلاقة (4.) عندما يكون n عدداً صحيحاً.

رمز جديد

سنرمز بالرمز $e = \exp(1)$ وإلى $\exp(x)$ بالرمز e^x. فيصبح التابع الأسّي معرّفاً بالشكل التالي :

$$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to e^x$$

نتائج

ليكن العددين الحقيقيين y, x والعدد الطبيعي n. لدينا :

1. $e^1 = e, \quad e^0 = 1$.
2. $e^{x+y} = e^x e^y$.
3. $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
4. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
5. $e^{2x} = \left(e^x\right)^2$.
6. $e^{nx} = \left(e^x\right)^n$.

تمرين 2

أثبت أنّ : $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$.

دراسة التابع الأسّي

التابع الأسّي تابع مستمرّ ويقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ وهو موجب تماماً ومتزايد تماماً ويحقّق أيضاً

1. $x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$.
3. $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.
4. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.
5. $\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$ و $\lim_{x \to \infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

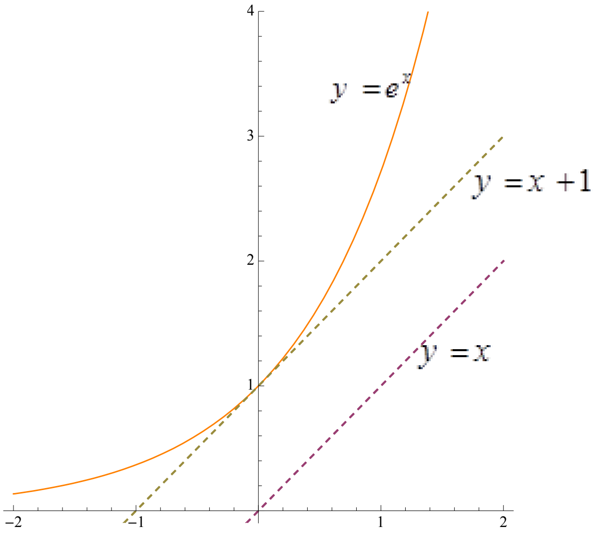
مبرهنة

إذا كان التابع $x \to u(x)$ قابلاً للاشتقاق كان التابع $x \to e^{u(x)}$ قابلاً للاشتقاق ومشتقّه هو التابع $x \to u'(x) e^{u(x)}$.

تدريب

ارسم المنحني البياني للتابع exp وارسم معه كلاً من المستقيمين $y = x$ و $y = x + 1$.

الإجابة



تمرين 3

حلّ المتراجحات التالية في $\mathbb{R}$:

$$e^{2x+3} < 1$$

$$\frac{e^x + 3}{e^x + 1} > 2$$

$$e^{2x+3} < e^{1-2x}$$

تمرين 4

عيّن النهايات التالية

$\lim_{x\to-\infty} e^{x^2+2x}$	$\lim_{x\to+\infty} e^{x^2+2x}$	$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2+2x}$
$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 5}{e^x + 2}$	$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 5}{e^x + 2}$	$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 5}{e^x + 2}$
$\lim_{x\to-\infty} (x+2)e^x$	$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x^2}$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x - 7}{x}$

تمرين 5

بيّن قابليّة التوابع التالية للاشتقاق واحسب مشتقّاتها.

$f_1(x) = e^{3x^2+2}$	$f_2(x) = (x + x^2)e^{3x^2+2}$
$f_3(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$f_4(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

تمرين 6

ليكن التابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:f\left(x\right)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$.

1. أثبت أنّ f قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$ واحسب مشتقه.
2. نظّم جدول تغيّرات f.
3. أوجد مقاربات المنحني البياني للتابع f في $\mp\infty$.
4. أثبت أنّ للمعادلة $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}$ حلاً وحيداً في $\mathbb{R}$.

ثانياً : التابع اللوغاريتمي

رأينا أنّ التابع الأسّي متزيد تماماً وأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$ ، وبالتالي فإنّه أيّاً كان العدد الموجب تماماً x فإنّ للمعادلة $e^{y}=x$ حلاً وحيداً نرمز له بالرمز $\ln x$ ونسمّيه اللوغاريتم النيبري للعدد x.

وعليه يمكننا تعريف التابع التالي :

تعريف

ندعو التابع $\ln:\left]0,+\infty\right[\to\mathbb{R}:x\to\ln x$ التابع اللوغارتمي النيبري.

خواصّ

لدينا

1. $\forall x\in\left]0,+\infty\right[,e^{\ln x}=x$.
2. $\forall x\in\mathbb{R},\ln\left(e^{x}\right)=x$.
3. $\ln 1=0,\ \ln e=1$.

مبرهنة

ليكن y,x عددين موجبين تماماً، و n عدد صحيح. لدينا :

1. $\ln\left(xy\right)=\ln x+\ln y$.
2. $\ln\dfrac{1}{x}=-\ln x$.
3. $\ln\dfrac{x}{y}=\ln x-\ln y$.
4. $\ln\sqrt{x}=\dfrac{1}{2}\ln x$.
5. $\ln x^{n}=n\ln x$.

تطبيق

إذا كان a عدداً موجباً تماماً، و b عدد حقيقيّ، فإنّنا نعرّف المقدار a^{b} بالشكل

$$a^{b}=e^{b\ln a}$$

تمرين7

بسّط ما يلي :

$\ln 10 - \ln 5$ ، $\ln\frac{5}{4} + \ln\frac{1}{5}$ ، $\frac{\ln 25}{\ln 5}$ ، $\ln\left(3-\sqrt{2}\right) + \ln\left(3+\sqrt{2}\right)$.

تمرين 8

حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلة التالية : $\ln x + \ln\left(x-1\right) = \ln 2 + \ln 3$

تمرين 9

أثبت أنّه أيّاً كان x في $\mathbb{R}$، فإنّ $\ln\left(1+e^{x}\right) = x + \ln\left(1+e^{-x}\right)$.

تمرين 10

حلّ في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية :

1. $\ln\left(x+x^{2}\right) = 2$.
2. $\ln x + \ln\left(x+2\right) = 1$.
3. $\ln x + \ln\left(4-x\right) = \ln\left(2x-1\right) + \ln 3$.
4. $\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1$.

دراسة التابع اللوغارتمي

خواصّ

1. التابع $\ln$ متزايد تماماً على $\left]0,+\infty\right[$.
2. $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
3. التابع $\ln$ قابل للاشتقاق على $\left]0,+\infty\right[$، ومشتقّه معطى بالعلاقة : $\ln' x = \frac{1}{x}$.
4. $\lim_{x\to 0^{+}} \ln x = -\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(x+1\right)}{x} = 1$.
6. $\lim_{x\to 0^{+}} x\ln x = 0$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

مبرهنة

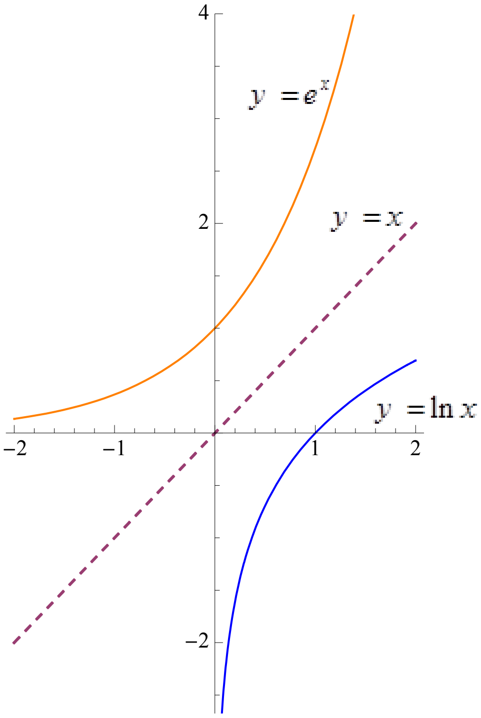
إذا كان التابع $x \to u\left(x\right)$ قابلاً للاشتقاق وموجباً تماماً، كان التابع $x \to \ln\left(u\left(x\right)\right)$ قابلاً للاشتقاق ومشتقّه هو $x \to \frac{u'\left(x\right)}{u\left(x\right)}$.

تدريب

ارسم المنحني البياني للتابع $\ln$ وارسم معه كلاً من المنحني البياني للتابع $\exp$ والمستقيم $y = x$.

ماذا تلاحظ ؟

الإجابة



تمرين 11

بيّن المجالات التي تكون التوابع التالية قابلة للاشتقاق عليها واحسب مشتقّاتها.

$$f_1(x) = \ln(2x+1) \qquad f_2(x) = \ln(x^2+x)$$

$$f_3(x) = \ln(2x-x^2) \qquad f_4(x) = \ln(3x-2-x^2)$$

$$f_5(x) = \frac{\ln(2x-x^2)}{2x} \qquad f_6(x) = \ln(1+\sqrt{x})$$

تمرين 12

حلّ في $\mathbb{R}$ كلاًّ من المتراجحات التالية :

1. $\ln x < 1$.
2. $3\ln x \geq 1$.
3. $\ln(2x-1)+1 \leq 0$.
4. $\ln x > \ln(2x-1)$.

5. $\ln\frac{1+e^x}{1-e^x} \geq 1$.

تمرين13

احسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x-\ln x\right)$ ، $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x}$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\ln\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to -\infty}\ln\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\sqrt{x^2+1}\right)$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x-\ln x\right)$ ، $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{x^2}$ ، $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x^2}$.

تمرين14

ادرس تغيّرات التابع f المعرّف على $\left]0,\infty\right[$ بالعلاقة $f\left(x\right)=\frac{1+\ln x}{x}$، وارسم المنحني البياني له.

تمرين15

أوجد مجموعة تعريف التابع f المعطى بالعلاقة $f\left(x\right)=\ln\frac{1+x}{1-x}$. ادرس تغيّرات التابع f، وارسم المنحني البياني له.

تمرين16

أوجد مجموعة تعريف التابع f المعطى بالعلاقة $f\left(x\right)=\ln\left(1+e^x\right)$. ادرس تغيّرات التابع f، وارسم المنحني البياني له وأوجد مقارباته وبيّنها على الرسم.

مقاربات منحني تابع

المستقيمات المقاربة الشاقوليّة

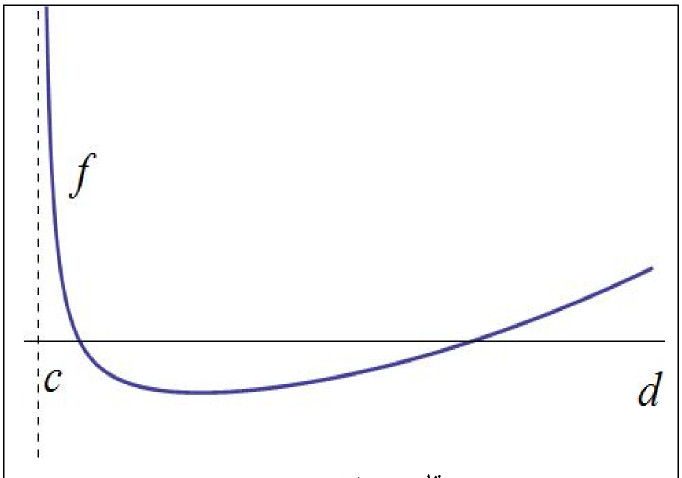
ليكن f تابعاً حقيقياً معرّفاً على المجال $]c,d[$ حيث $c<d$ عددين حقيقيين.

- نقول أنّ لمنحني التابع f مستقيم مقارب شاقولي معادلته $x=d$ إذا كان:

$$\lim_{\substack{x\to d\\x<d}} f(x) = +\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{\substack{x\to d\\x<d}} f(x) = -\infty$$

- نقول أنّ لمنحني التابع f مستقيم مقارب شاقولي معادلته $x=c$ إذا كان:

$$\lim_{\substack{x\to c\\x>c}} f(x) = +\infty \quad \text{أو} \quad \lim_{\substack{x\to c\\x>c}} f(x) = -\infty$$



مقارب شاقولي $x=c$

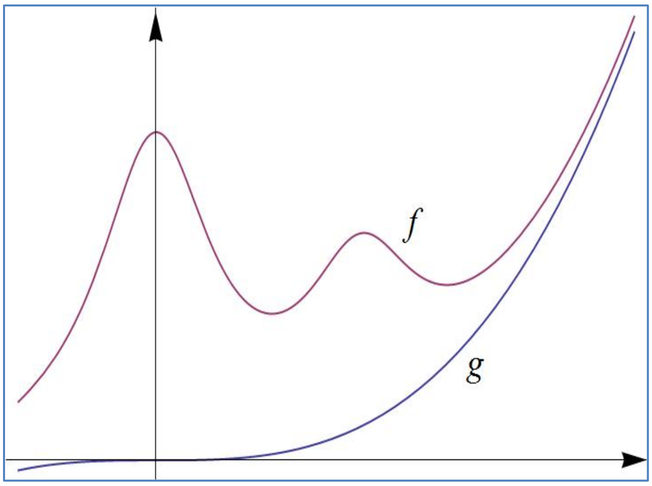
المقاربات في اللانهاية الموجبة

ليكن f و g تابعين حقيقيين معرّفين على المجال $]c,+\infty[$.

نقول أنّ منحني التابع f يقارب منحني التابع g في اللانهاية الموجبة إذا كان:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x)-g(x)\right) = 0$$

أي أنّ المقدارين $f(x)$ و $g(x)$ يصبحان قريبين من بعضهما البعض عندما يكون المتحول x كبيراً.



حالة خاصة:

إذا كان منحني التابع g مستقيماً مائلاً أو أفقياً أي:

$g(x) = ax+b$ حيث a,b ثابتان حقيقيان

وكان $\lim_{x\to+\infty} \left(f(x)-g(x)\right) = 0$ فنقول أنّ لمنحني التابع f مستقيم مقارب في $+\infty$.

مثال1:

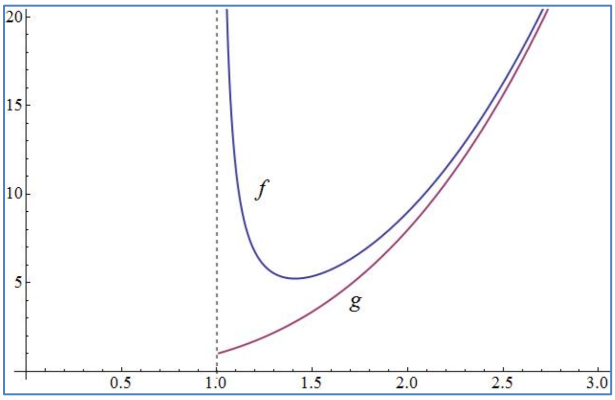
لنعرّف التابعين f و g على المجال $]1,+\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x^4-x^3+1}{x-1} \qquad \text{و} \qquad g(x) = x^3$$

لاحظ أنّ كلا التابعين يسعى إلى $+\infty$ عندما $x \to +\infty$. لندرس الفرق بينهما:

$$f(x)-g(x) = \frac{x^4-x^3+1}{x-1} - x^3 = \frac{1}{x-1}$$

إذاً لدينا $\lim_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)=0$. إذاً منحني التابع g يقارب منحني التابع f في اللانهاية الموجبة. لاحظ كذلك أنّ إشارة الفرق $f\left(x\right)-g\left(x\right)$ موجبة أي أنّ منحني التابع f يقع فوق منحني التابع g .



تدريب:

ادرس تحوات التابعين السابقين وارسمهما. قارن مع الرسم المجاور.

مثال2:

لنعرّف التابع f على المجال $\left]2,+\infty\right[$ كما يلي:

$$f\left(x\right)=\frac{x^2}{x-2}$$

بتقسيم البسط على المقام (أو بإضافة وطرح 4 من البسط) نلاحظ أنّ:

$$f\left(x\right)=x+2+\frac{4}{x-2}$$

لاحظ أنّ المقدار $\frac{4}{x-2}$ يسعى إلى 0 عندما $x\to+\infty$. أي أنّ منحني التابع f يكون قريباً من المستقيم $y=x+2$ عندما يكون المتحول x كبيراً. إذاً المستقيم $y=x+2$ مستقيم مقارب لمنحني التابع f في اللانهاية الموجبة.

المقاربات في اللانهاية السالبة

ليكن f و g تابعين حقيقيين معرّفان على المجال $\left]-\infty,c\right[$.

نقول أنّ منحني التابع f يقارب منحني التابع g في $-\infty$ إذا كان:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)=0$$

أي أنّ المقدارين $f\left(x\right)$ و $g\left(x\right)$ يصبحان قريبين من بعضهما البعض عندما يسعى المتحول x إلى $-\infty$.

حالة خاصة:

إذا كان منحني التابع g مستقيماً مائلاً أو أفقياً أي:

$g\left(x\right)=ax+b$ حيث a,b ثابتان حقيقيان

وكان $\lim_{x\to-\infty}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)=0$ فنقول أنّ لمنحني التابع f مستقيم مقارب في $-\infty$.

تعيين المستقيم المقارب في اللانهاية الموجبة أو السالبة

ليكن f تابعاً حقيقياً معرّفاً على المجال $\left]c,+\infty\right[$.

1. إذا كان التابع f يسعى إلى عدد حقيقي b $\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=b$ فيكون المستقيم الأفقي $y=b$ مقارباً لمنحني التابع.
2. أما إذا كان $\lim_{x\to\infty}f\left(x\right)=\pm\infty$ فندرس وجود مستقيم مقارب مائل كما يلي:

إذا كان المستقيم $y = ax + b$ مقارباً فيجب أنّ يكون $\lim_{x\to\infty} f(x) - (ax+b) = 0$. إذاً لتعيين الثابت a نقسم على على x ونجعل $x \to +\infty$ فنجد:

$$\boxed{a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}}$$

لتعيين الثابت b نحسب النهاية:

$$\boxed{b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax}$$

أخيراً نترك للطالب التحقق أنّ الطريقة السابقة تمكننا من تعيين المستقيم المقارب في اللانهاية السالبة في حال وجوده.

مثال1:

عيّن المستقيمات المقاربة في حال وجودها لمنحني التابع $f(x) = \dfrac{x^2 + e^{-x^2}}{x+1}$.

نلاحظ أولا أنّ $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. لندرس نهاية النسبة التالية:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x + \dfrac{e^{-x^2}}{x}}{x+1} = \frac{1 + \dfrac{e^{-x^2}}{x^2}}{1 + \dfrac{1}{x}}$$

أي أنّ $a = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$. ندرس الآن الفرق:

$$f(x) - ax = \frac{x^2 + e^{-x^2}}{x+1} - x = \frac{e^{-x^2} - x}{x+1} = \frac{\dfrac{e^{-x^2}}{x} - 1}{1 + \dfrac{1}{x}}$$

بالمرور إلى النهاية نجد: $b = \lim_{x\to\infty} f(x) - ax = -1$. أي أنّ لمنحني التابع f مقارباً مائلاً في $+\infty$ معادلته:

$$y = x - 1$$

نترك للطلاب تعيين المقاربات الأخرى (في $-\infty$ وعند $x = -1$) ودراسة وضع المنحني بالنسبة للمقاربات.

مثال2:

ليكن التابع $f(x) = \dfrac{x^3 + 5}{x+1}$. نلاحظ أولا أنّ $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. لندرس وجود مقارب مائل:

إنّ النهاية $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ إذا ليس للتابع مسقيم مقارب في $+\infty$.

تدريب: أثبت أنّ منحني التابع السابق يقارب قطعاً مكافئاً وعيّن معادلته.

تدريبات

تدريب 1

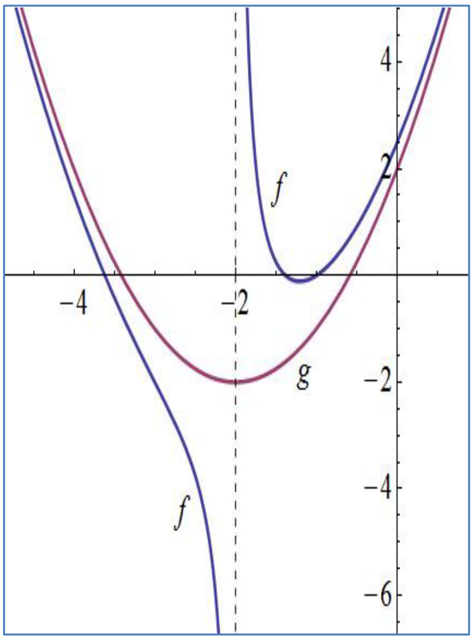
ليكن التابع $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+x+1}{x-2}$. عيّن مجموعة تعريفه وادرس تحولاته مبيناً مستقيماته المقاربة كلها.

تدريب 2

ليكن التابع $f\left(x\right)=\ln\left(e^{2x}-e^{x}\right)$. عيّن مجموعة تعريفه وادرس تحولاته وعيّن مقاربه العمودي.

باخراج e^{2x} عاملاً مشتركاً داخل اللغارتم أثبت أن: $f\left(x\right)=2x+\ln\left(1-e^{-x}\right)$ استنتج وجود مستقيم مقارب في $+\infty$.

ارسم منحني التابع مبيناً وضعه بالنسبة للمقارب المائل. عيّن نقطة تقاطع المنحني مع المحور OX .



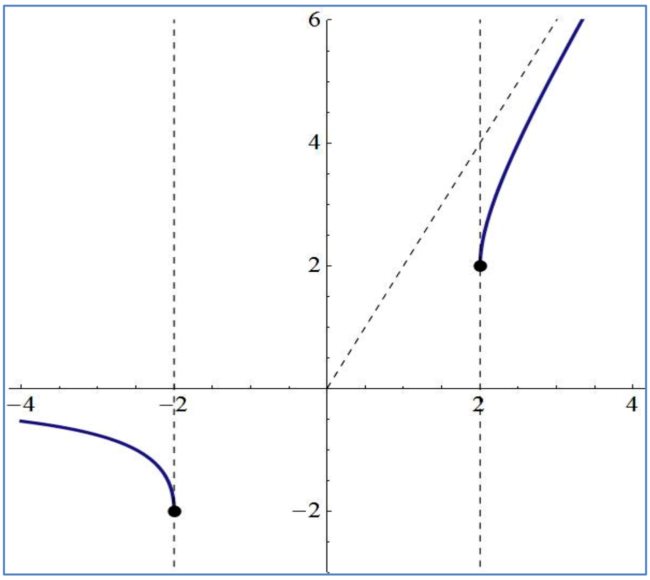
تدريب 3

ليكن التابع $f\left(x\right)=\dfrac{x^3+6x^2+10x+5}{x+2}$.

1. عيّن مجموعة تعريف f وعيّن المقارب العمودي لمنحني التابع.
2. أثبت عدم وجود مستقيمات مقاربات في اللانهاية.
3. بتقسيم البسط على المقام أثبت وجود قطع مكافئ:

   $$g\left(x\right)=ax^2+bx+c$$

   مقارب لمنحني التابع في $+\infty$ وفي $-\infty$. وادرس وضع منحني f بالنسبة للقطع في $+\infty$ وفي $-\infty$.
4. ادرس تحولات التابع وارسم منحنيه. قارن نتائجك مع الرسم المجاور.



تدريب 4

عيّن مجموعة تعريف التابع التالي وارسمه.

$$f\left(x\right)=x+\sqrt{x^2-4}$$

بيّن مقارباته في حال وجودها. قارن مع الرسم المجاور.

مقارنة تابعين

مقارنة تابعين في اللانهاية الموجبة

ليكن f و g تابعين حقيقيين معرّفين على المجال $]c,+\infty[$. نقول أنّ التابع f مهمل أمام g في اللانهاية الموجبة إذا أمكن كتابة f بالشكل: $f(x)=\varepsilon(x)g(x)$ حيث ε تابع حقيقي يسعى إلى الصفر في اللانهاية $\lim\limits_{x\to\infty}\varepsilon(x)=0$.

لاحظ أنّه في حال كون g لا ينعدم على $]c,+\infty[$ فإنّ الشرط السابق يكافئ:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

مثال1:

ليكن $f(x)=x^2$ و $g(x)=x^3$. بما أنّ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ إذاً f مهمل أمام g في اللانهاية الموجبة.

لاحظ أنّ كلا التابعين يسعى إلى $+\infty$ في اللانهاية الموجبة ولكن g يكبر "بسرعة أكبر" من f.

مثال2:

ليكن $f(x)=x$ و $g(x)=e^x$. نقبل أنّ النهاية $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$. إذاً x مهمل أمام التابع الأسي g.

مثال3:

ليكن $f(x)=x^4$ و $g(x)=e^x$. لاحظ أنّ كلا التابعين يسعى إلى $+\infty$ في اللانهاية الموجبة. لنقارن "سرعة" هذين التابعين في اللانهاية. نحسب إذاً النهاية:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{e^{\frac{x}{4}}}\right)^4=\lim_{x\to\infty}4^4\left(\frac{\frac{x}{4}}{e^{\frac{x}{4}}}\right)^4=\lim_{y\to\infty}4^4\left(\frac{y}{e^y}\right)^4$$

حيث $y=\frac{x}{4}$. إذاً $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$. ومنه f مهمل أمام g في اللانهاية الموجبة.

تدريب: أثبت بطريقة مشابهة لما سبق أنّ $f(x)=x^{10}$ مهمل أمام $g(x)=e^x$ في اللانهاية الموجبة. حاول تعميم هذه النتيجة؟

مثال4:

ليكن $f(x)=\ln x$ و $g(x)=x$. لاحظ أنّ كلا التابعين يسعى إلى $+\infty$ في اللانهاية الموجبة. لنقارن "سرعة" هذين التابعين بحساب النهاية:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{e^y}=0$$

حيث $y=\ln x$. إذاً التابع اللغاريتمي مهمل أمام التابع $g(x)=x$ في اللانهاية الموجبة.

مثال5:

ليكن $f(x)=x^2\sin x$ و $g(x)=x^3\sin x$. يمكننا أن نكتب: $f(x)=\varepsilon(x)\cdot g(x)$ حيث $\varepsilon(x)=\frac{1}{x}$ معرّف على $]0,+\infty[$ ويسعى إلى الصفر في اللانهاية الموجبة. إذاً f مهمل أمام g في اللانهاية الموجبة.

مقارنة تابعين في اللانهاية السالبة

ليكن f و g تابعين حقيقيين معرّفين على المجال $]-\infty,c[$. نقول أنّ التابع f مهمل أمام g في اللانهاية السالبة إذا أمكن كتابة f بالشكل: $f(x)=\varepsilon(x)g(x)$ حيث ε تابع حقيقي يسعى إلى الصفر في اللانهاية السالبة $\lim\limits_{x\to-\infty}\varepsilon(x)=0$.

لاحظ أنّه في حال كون g لا ينعدم على $]-\infty,c[$ فإنّ الشرط السابق يكافئ:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

مقارنة تابعين في جوار نقطة من اليمين

ليكن f و g تابعين حقيقيين معرّفين على المجال $]c,d[$ حيث $c<d$ عددين حقيقيين.

- نقول أنّ التابع f مهمل أمام g على يمين c إذا أمكن كتابة f بالشكل: $f(x)=\varepsilon(x)g(x)$ حيث ε تابع يحقق:

$$\lim_{\substack{x\to c\\x>c}}\varepsilon(x)=0$$

لاحظ أنّه في حال كون g لا ينعدم على $]c,d[$ فإنّ الشرط السابق يكافئ: $\lim\limits_{\substack{x\to c\\x>c}}\frac{f(x)}{g(x)}=0$.

- نقول أنّ التابع f مهمل أمام g على يسار d إذا أمكن كتابة f بالشكل: $f(x)=\varepsilon(x)g(x)$ حيث ε تابع يحقق:

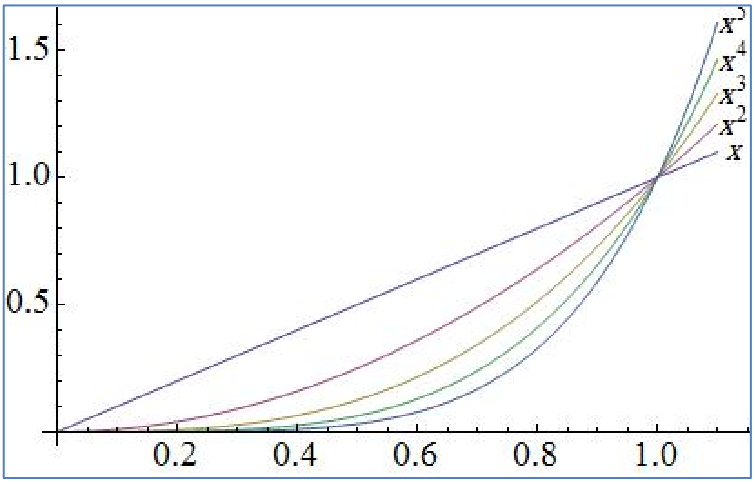
$$\lim_{\substack{x\to d\\x<d}}\varepsilon(x)=0$$

لاحظ أنّه في حال كون g لا ينعدم على $]c,d[$ فإنّ الشرط السابق يكافئ: $\lim\limits_{\substack{x\to d\\x<d}}\frac{f(x)}{g(x)}=0$.

مثال1:

التابع $f(x)=x^3$ مهمل أمام $g(x)=x^2$ في يمين النقطة 0 لأنّ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}x=0$.

بشكل أعم x^n مهمل أمام x^m في جوار الصفر إذا كان $n>m$. انظر الشكل.



مثال2:

التابع $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ مهمل أمام $g(x)=\frac{1}{(x-1)^3}$ في يمين النقطة 1 لأنّ: $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}(x-1)=0$

الحد المسيطر

ليكن f تابعاً معرّفاً على مجال I . ولنفترض أنّ f مكتوب بشكل مجموع توابع: $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$.

إذا كانت التوابع $f_2, f_3, \dots f_n$ مهملة أمام التابع f_1 عند أحد طرفي المجال I فنقول أنّ $f_1(x)$ هو الحد المسيطر في هذه الكتابة.

مثال1:

ليكن التابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. لاحظ أنّ الحدين 1 و $-3x^2$ كلاهما مهمل في اللانهاية أمام الحد x^3 . إذاً x^3 هو الحد المسيطر في هذه الكتابة. إنّ نهاية التابع f في اللانهاية يحددها الحد المسيطر لتوضيح هذا نخرج الحد المسيطر عاملاً:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$$

المقدار بين قوسين يسعى إلى 1 إذاً نهاية f هي من نهاية x^3 أي: $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

مثال2:

ليكن التابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x$. ولندرس هذا التابع في جوار الصفر. لاحظ أنّ الحدين x^3 و $-3x^2$ كلاهما مهمل على يمين ويسار الصفر أمام الحد $4x$. إذاً $4x$ هو الحد المسيطر في هذه الكتابة في جوار الصفر.

مثال3:

ليكن التابع $f(x) = 1 - 3x^{12} + e^x$. لاحظ أنّ الحدين 1 و $-3x^{12}$ كلاهما مهمل في اللانهاية أمام الحد e^x . إذاً e^x هو الحد المسيطر في هذه الكتابة. إنّ نهاية التابع f في اللانهاية يحددها الحد المسيطر لتوضيح هذا نخرج الحد المسيطر عاملاً:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = e^x\left(e^{-x} - 3x^{12}e^{-x} + 1\right)$$

المقدار بين قوسين يسعى إلى 1 إذاً نهاية f هي من نهاية e^x أي: $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

مثال4:

ليكن التابع $f(x) = \ln(x^2 + x^4)$ وليكن $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. لنقارنهما على يمين النقطة 0:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(x^2 + x^4)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x}\cdot\ln(x^2 + x^4)$$

إنّ الحد المسيطر داخل اللغارتم على يمين الصفر هو x^2 ، لنخرجه عاملاً مشتركاً:

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x}\cdot\ln\left(x^2(1+x^2)\right) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt{x}\cdot\left(\ln(x^2) + \ln(1+x^2)\right)\\ &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 4\sqrt{x}\cdot\ln\sqrt{x} + \sqrt{x}\cdot\ln(1+x^2)\\ &= 0\end{aligned}$$

إذاً f مهمل أمام g على يمين الصفر.

ملاحظة هامة

يمكن تعميم ما رأيناه في المثالين 1 و 2 السابقين كما يلي.

ليكن $f(x) = a\cdot x^n + b\cdot x^m$ حيث a, b عددين يختلفان عن 0 و $n < m$.

في اللانهاية الموجبة أو السالبة يكون الحد المسيطر هو الحد الأعلى درجة $b\cdot x^m$.

على يمين ويسار الصفر يكون الحد المسيطر هو الحد الأقل درجة $a\cdot x^n$.

تدريبات

تدريب 1

أثبت أنّ التابع $f(x)=\ln(x^4+x^2+1)$ مهمل أمام التابع $g(x)=2x+1$ وذلك في اللانهاية الموجبة.

تدريب 2

قارن التابعين $f(x)=xe^{2x}$ و $g(x)=x^2e^x$ في اللانهاية الموجبة ثمّ في اللانهاية السالبة.

تدريب 3

قارن التابعين $f(x)=\sqrt{x^2+x^5}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ في يمين الصفر.

تدريب 4

ليكن f و g تابعين حقيقيين موجبين تماماً معرّفين على المجال $]c,+\infty[$. نفترض أنّ التابع f مهمل أمام g في اللانهاية الموجبة. احسب النهاية:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{g(x)+f(x)}$$

تدريب 5

عيّن الحد المسيطر في اللانهاية الموجبة في كل مما يلي ثم احسب النهاية $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

$$f(x)=3x+x^5-4x^3\sqrt{x}$$

$$f(x)=\ln x+\sqrt{x}-4\cdot\sqrt[3]{x}$$

$$f(x)=e^x-50\cdot x^{100}-132\cdot x^{500}$$

تدريب 6

عيّن الحد المسيطر على يمين الصفر في كل مما يلي ثم احسب النهاية $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$.

$$f(x)=x-x^5-4x^3\sqrt{x}$$

$$f(x)=\ln x+\sqrt{x}-4\cdot\sqrt[3]{x}$$

$$f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x^3}$$

المعهد العالي للعلوم التطبيقيّة والتكنولوجيا

الـهندسة التحليليـة

فارس أبوصالح

استخدام الاحداثيات في المستوي

تذكير بمفهوم الجداء الديكارتي لمجموعتين أو أكثر

لتكن A و B مجموعتين غير خاليتين. يمكننا تعريف مجموعة جديدة مؤلفة من الثنائيات (a,b) حيث $a \in A$ و $b \in B$.
نسمي هذه المجموعة الجداء الديكارتي للمجموعتين A و B ونرمز لها $A \times B$. نكتب إذاً:

$$A \times B = \{(x,y) : x \in A \ \wedge \ y \in B\}$$

مثال1:

إذا كانت $A = \{1,2,5\}$ و $B = \{2,6\}$ فيكون الجداء الديكارتي:

$$A \times B = \{(1,2),(1,6),(2,2),(2,6),(5,2),(5,6)\}$$

مثال2:

إذا كانت $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$ و $A = \{3,4,5\}$ فيكون الجداء الديكارتي:

$$A \times \mathbb{N} = \begin{Bmatrix} (3,0),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),\dots \\ (4,0),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5)\dots \\ (5,0),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)\dots \end{Bmatrix}$$

لاحظ إنّه إذا كان عدد عناصر A يساوي n، وكان عدد عناصر B يساوي m فيكون عدد عناصر الجداء الديكارتي nm.
لاحظ كذلك أنّه إذا كانت إحدى المجموعتين A أو B غير منتهية يكون الجداء غير منتهٍ.
يمكننا تعريف الجداء الديكارتي لعدة مجموعات غير خالية بالاسلوب ذاته كما في المثال التالي.

مثال3:

لتكن المجموعات $A = \{1,2\}$، $B = \{a,b\}$، $C = \{\triangle,\square,\bigcirc\}$. لدينا:

$$A \times B \times C = \begin{Bmatrix} (1,a,\triangle),(1,a,\square),(1,a,\bigcirc), \\ (1,b,\triangle),(1,b,\square),(1,b,\bigcirc), \\ (2,a,\triangle),(2,a,\square),(2,a,\bigcirc), \\ (2,b,\triangle),(2,b,\square),(2,b,\bigcirc) \end{Bmatrix}$$

أي إنّ المجموعة $A \times B \times C$ مكونة من الثلاثيات (a,b,c) حيث $a \in A$ و $b \in B$ $c \in C$.

حالة خاصة

إذا كانت A مجموعة غير خالية فنعرّف $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ مرة}}$. أي إنّ A^n هي جداء n "نسخة" من المجموعة A.

بصياغة أخرى فإن المجموعة A^n مكونة من كافة الأقواس المرتبة $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ حيث $x_1 \in A$ و $x_2 \in A$ ....

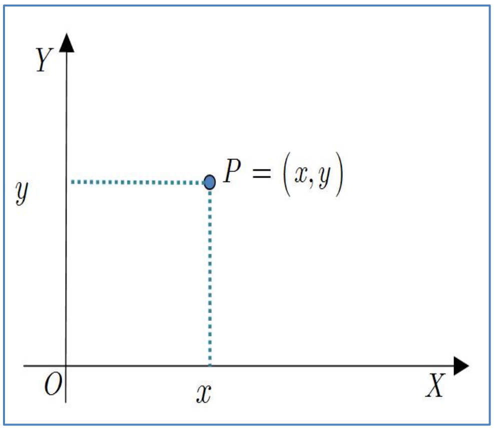
مثال1:

المجموعة $\mathbb{R}^2$ هي مجموعة الأزواج (x,y) حيث x و y أعداد حقيقية.

مثال2:

المجموعة $\mathbb{R}^3$ هي مجموعة الثلاثيات (x,y,z) حيث x و y و z أعداد حقيقية.

تمثيل نقطة في المستوي



ليكن المستقيمان الموجهان $\overrightarrow{OX}$ و $\overrightarrow{OY}$ المتعامدان ولنرمز O لنقطة تقاطعهما. انظر الشكل المجاور.

نربط بكل نقطة P من المستوي XOY ثنائية من الأعداد الحقيقية $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ كما يلي:

- يمثل العدد x المسافة الجبرية بين النقطة O والمسقط العمودي للنقطة P على المستقيم الموجه $\overrightarrow{OX}$.
- يمثل العدد y المسافة الجبرية بين النقطة O والمسقط العمودي للنقطة P على المستقيم الموجه $\overrightarrow{OY}$.

نسمي العددين x و y احداثيي النقطة P بالنسبة للمحورين المتعامدين $\overrightarrow{OX}$ و $\overrightarrow{OY}$.

لاحظ أنّ نقاط المحور $\overrightarrow{OX}$ هي النقاط التي احداثياتها $(x,0)$ حيث $x\in\mathbb{R}$.

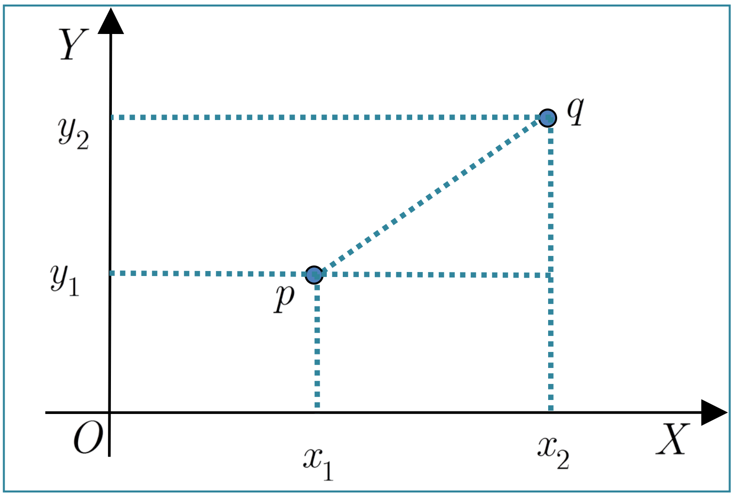
ولاحظ أنّ نقاط المحور $\overrightarrow{OX}$ هي النقاط التي احداثياتها $(0,y)$ حيث $y\in\mathbb{R}$.

المسافة بين نقطتين في المستوي

لتكن $p=(x_1,y_1)$ و $q=(x_2,y_2)$ نقطتين من المستوي. إنّ المسافة بين هاتين النقطتين تعطى بالصيغة:

$$L[pq]=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

تدريب: برر العلاقة السابقة بدراسة المثلث القائم في الرسم المجاور.



الدائرة والقرص

- تكن $p=(x_0,y_0)$ نقطة في المستوي. وليكن العدد الحقيقي الموجب تماماً $0<r$. إنّ الدائرة التي مركزها p ونصف قطرها r هي بالتعريف مجموعة النقاط (x,y) التي تبعد عن p مسافة تساوي r. نرمز لهذه الدائرة بالرمز $C(p,r)$.

بصياغة أخرى فإن الدائرة $C(p,r)$ هي مجموعة النقاط (x,y) التي تحقق العلاقة:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

نسمي هذه العلاقة المعادلة الديكارتية للدائرة $C(p,r)$.

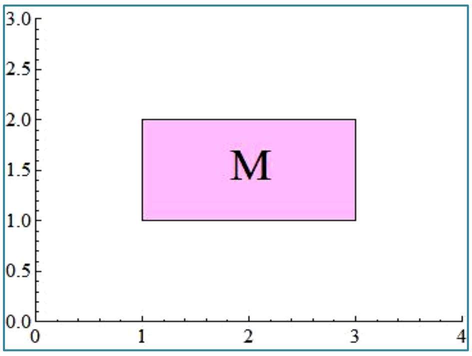
- نعرّف القرص المفتوح $D(p,r)$ على أنّه مجموعة النقاط التي تبعد عن النقطة p مسافة أقل تماماً من r. أي إنّ $D(p,r)$ هو مجموعة النقاط (x,y) التي تحقق المتراجحة:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2$$

نعرّف القرص المغلق $\overline{D}(p,r)$ على أنّه مجموعة النقاط التي تبعد عن p مسافة أقل أو تساوي r. أي إنّ $\overline{D}(p,r)$ هو مجموعة النقاط (x,y) التي تحقق المتراجحة:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le r^2$$

وصف مجموعة نقاط في المستوي



لوصف مجموعة M من نقاط المستوي غالباً ما نكتب العلاقات (معادلات أو متراجحات) التي تحققها احداثيات هذه النقاط.

مثال1: إذا أردنا وصف المستطيل M المرسوم في الشكل المجاور نقول إنّ M هو مجموعة النقاط (x,y) التي تحقق المتراجحات:

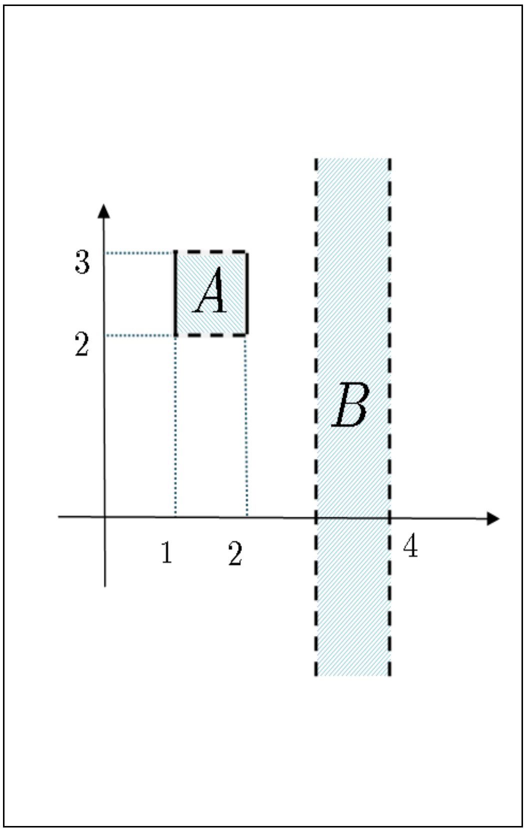
$$1\le y\le 2 \quad \text{و} \quad 1\le x\le 3$$

يمكننا كتابة ما سبق بالرموز:

$$M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x\le 3\ \wedge 1\le y\le 2\}$$

يمكننا أيضاً أن نكتب المجموعة السابقة بشكل جداء ديكارتي لمجموعتين كما يلي: $M=[1,3]\times[1,2]$

أي إنّ M هي مجموعة الأزواج (x,y) التي تحقق $x\in[1,3]$ و $y\in[1,2]$.



مثال2:

المجموعة A في الشكل المجاور تمثل مربعاً حذف منه ضلعيه الأفقيين. يمكننا وصف هذه المجموعة على أنها مجموعة النقاط (x,y) من المستوي التي تحقق المتراجحات:

$$2<y<3 \quad \text{و} \quad 1\le x\le 2$$

أو بصياغة أخرى: $A=[1,2]\times]2,3[$.

مثال3:

لنعرف المجموعة B بأنها مجموعة النقاط (x,y) من المستوي التي تحقق المتراجحات: $3<x<4$ أي:

$$B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 3<x<4\}$$

لاحظ أنّه لا يوجد أي شرط على الاحداثي الثاني $y\in\mathbb{R}$. إنّ المجموعة B تمثل الشريحة العامودية التي عرضها 1 وارتفاعها لانهائي وبدون المستقيمين $x=3$ و $x=4$ كما هو موضح بالشكل.

يمكننا أيضاً أن نكتب: $B=]3,4[\times\mathbb{R}$.

مثال4:

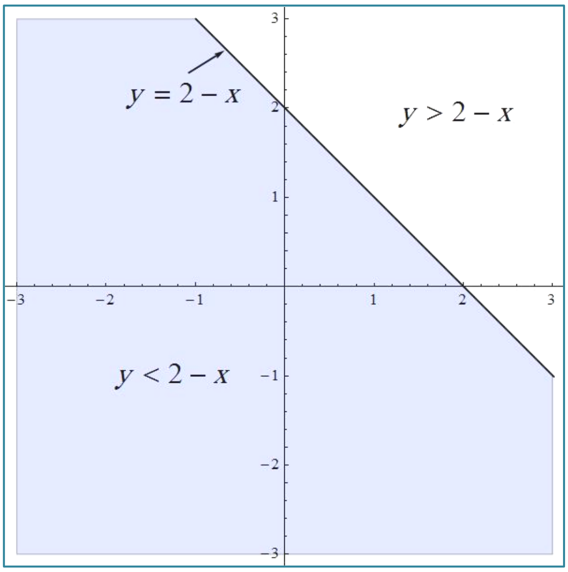
لنعرف المجموعة C بأنها $C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y<2\right\}$. لرسم هذه المجموعة نبدأ برسم المستقيم الذي معادلته:

$$x+y=2$$

ثم نلاحظ أنّ:

$$y<2-x \quad \Leftrightarrow \quad (x,y)\in C$$

أي أنّ المجموعة C هي نصف المستوي الواقع تحت المستقيم السابق. لاحظ أنّ نقاط المستقيم نفسه لا تنتمي إلى C.



مثال5:

لنعرف المجموعة D بأنها $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)\left(x^2+y^2-4\right)<0\right\}$. إنّ المجموعة D هي مجموعة نقاط المستوي التي يكون عندها المقدار $(x-1)\left(x^2+y^2-4\right)$ سالباً تماماً، وهذا يتحقق في حالتين:

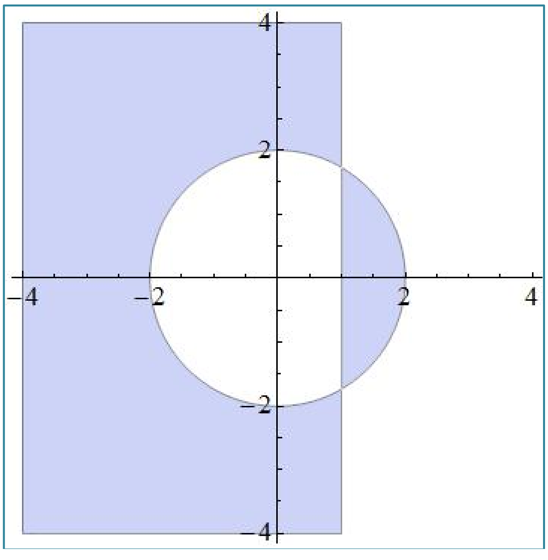
الحالة الأولى: $(x-1)<0$ و $\left(x^2+y^2-4\right)>0$

الحالة الثانية: $(x-1)>0$ و $\left(x^2+y^2-4\right)<0$

في الحالة الأولى تكون النقطة (x,y) على يسار المستقيم $x=1$ وخارج القرص المغلق $x^2+y^2\le 4$.

في الحالة الثانية تكون النقطة (x,y) على يمين المستقيم $x=1$ وداخل القرص المفتوح $x^2+y^2<4$.

أخيراً نمثل المجموعة D في الرسم التالي.



تدريبات

تدريب 1

في مستوٍ منسوب لمحورين متعامدين $\overrightarrow{OX}$ و $\overrightarrow{OY}$، ارسم كلاً من المجموعات التالية :

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1\} \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x\}$$

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \cdot (x^2 + y^2 - 1) \leq 0\}$$

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y - x < 1\}$$

$$H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x + y \leq 1\}$$

ارسم كذلك المجموعات: $A \cap B$ و $A \cap D$ و $B \cap D$ و $B \setminus A$ و $D \setminus A$ و $A \cap B \cap D$ و $G \cap H$

تدريب 2

في مستوٍ منسوب لمحورين متعامدين $\overrightarrow{OX}$ و $\overrightarrow{OY}$، ارسم كلاً من المجموعات التالية :

$$C =]-1,1[\times]2,3[\qquad B =]0,1] \times [2,3] \qquad A = [1,2] \times [2,3]$$

$$F = [0,3]^2 \setminus [1,2]^2 \qquad D =]0,\infty[\times [3,5] \qquad E =]0,5[\times \mathbb{R}$$

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (2x-3)^2 + (2y-3)^2 = 18\}$$

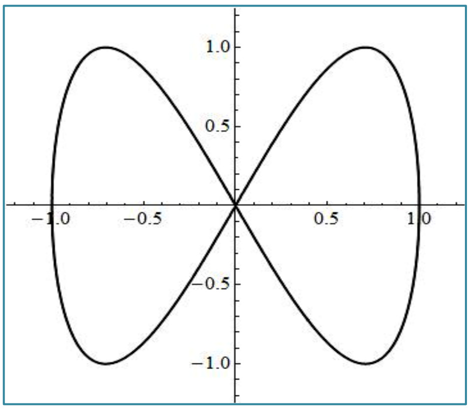
$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (2x-3)^2 + (2y-3)^2 = 1\}$$

ارسم كذلك المجموعات $A \cap B$ و $A \cap C$ و $B \cap C$ و $A \cap B \cap C$ و $E \cap D$ و $F \cap S$ و $F \cap L$.

تدريب 3

نعرّف المجموعة $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = 4x^2(1-x^2)\}$.

1. أثبت أنّ المجموعة A متناظرة بالنسبة للمحور OX أي أنّه إذا كانت $(x,y) \in A$ فإنّ $(x,-y) \in A$.
2. أثبت أنّ المجموعة A متناظرة بالنسبة للمحور OY.
3. إذا كانت (x,y) نقطة من A فأثبت أنّ $-1 \leq x \leq 1$.
4. لتكن النقطة $(x,y) \in A$ ولنفترض أنّ $x \geq 0$ و $y \geq 0$ أي أنّ النقطة (x,y) في الربع الأول. اعزل y بدلالة x ثمّ ادرس التابع الناتج $y(x)$ على المجال $[0,1]$ وارسمه.
5. باستخدام التناظرات المبينة سابقاً استنتج رسم المجموعة A كاملاً. قارن مع الرسم أدناه.



تدريب 4

ارسم المجموعة A مجموعة نقاط المستوي (x,y) التي تحقق المتراجحتين التاليتين معاً:

$$x^2 - 2x + y^2 < 0 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 > 1$$

تدريب 5

أثبت أنّ مجموعة نقاط المستوي (x,y) التي تحقق $2x^2 - 3xy + y^2 = 0$ هي اجتماع مستقيمين يطلب تعينهما.

ارشاد: أكمل المقدار $2x^2 - 3xy$ إلى مربع كامل أولاً.

تدريب 6

احسب مساحة المثلّث الذي إحداثيّات رؤوسه هي $(0,1),(1,1),(2,0)$ على التوالي.

تدريب 7

احسب مساحة الرباعي الذي إحداثيّات رؤوسه هي $(1,2),(2,3),(2,5),(0,3)$ على التوالي.

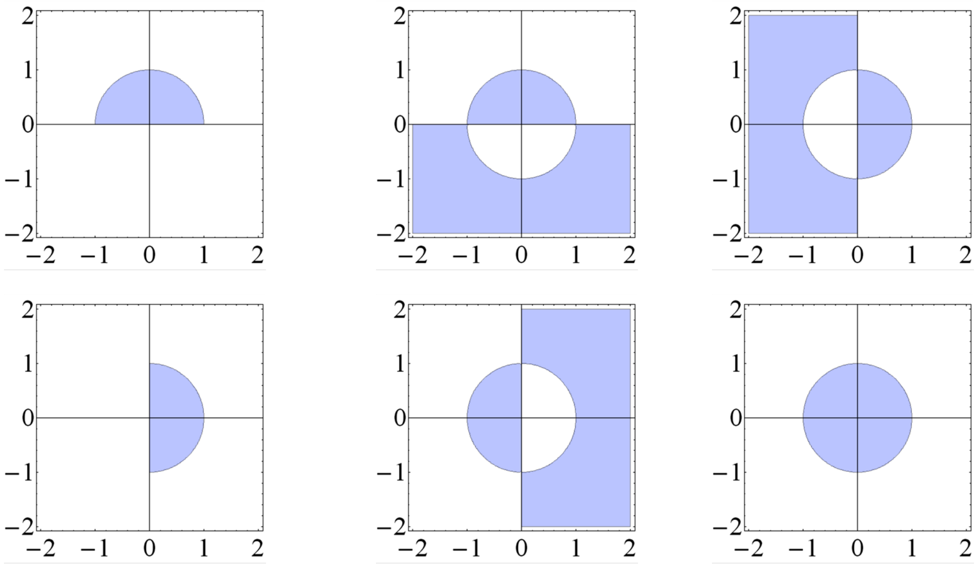
تدريب 8

ارسم المجموعة A مجموعة نقاط المستوي (x,y) التي تحقق المتراجحتين التاليتين معاً:

$x^2 + y^2 < 1$ و $x^2 + 2x + y^2 < 3$

تدريب 9

ما هو الشكل المظلل الذي يمثل مجموعة نقاط المستوي (x,y) التي تحقق المتراجحة $x^3 + xy^2 \geq x$



تدريب 10

ارسم مجموعة نقاط المستوي (x,y) التي تحقق المتراجحة $x^2y + y^3 \leq y$.

استخدام الاحداثيات في الفراغ

التمثيل الهندسي لنقطة من الفراغ

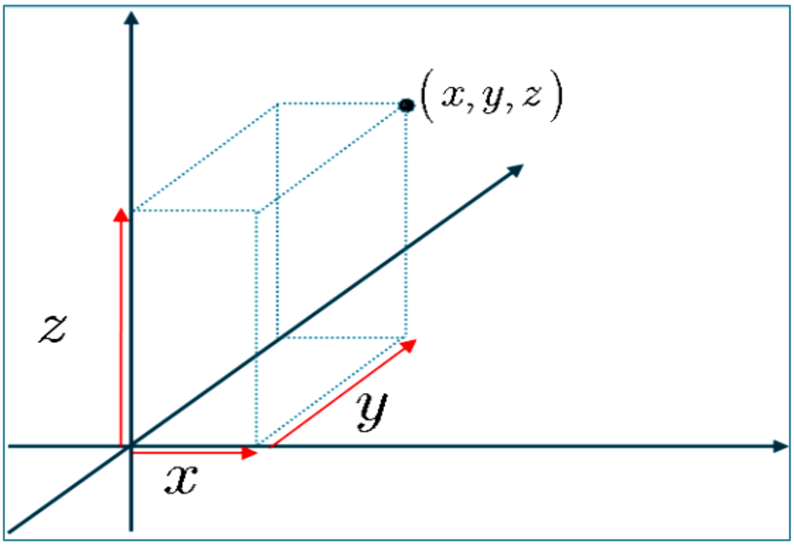
سوف نستخدم ثلاثة محاور متعامدة فيما بينها $\overrightarrow{OX}$ و $\overrightarrow{OY}$ و $\overrightarrow{OZ}$ كما هو موضح في الشكل.

بكل نقطة P من الفراغ نربط ثلاثية (x,y,z) من الأعداد الحقيقية، حيث:

يمثل العدد x المسافة الجبرية بين المسقط القائم للنقطة P على المحور $\overrightarrow{OX}$ والمبدأ O.

يمثل العدد y المسافة الجبرية بين المسقط القائم للنقطة P على المحور $\overrightarrow{OY}$ والمبدأ O.

يمثل العدد z المسافة الجبرية بين المسقط القائم للنقطة P على المحور $\overrightarrow{OZ}$ والمبدأ O.

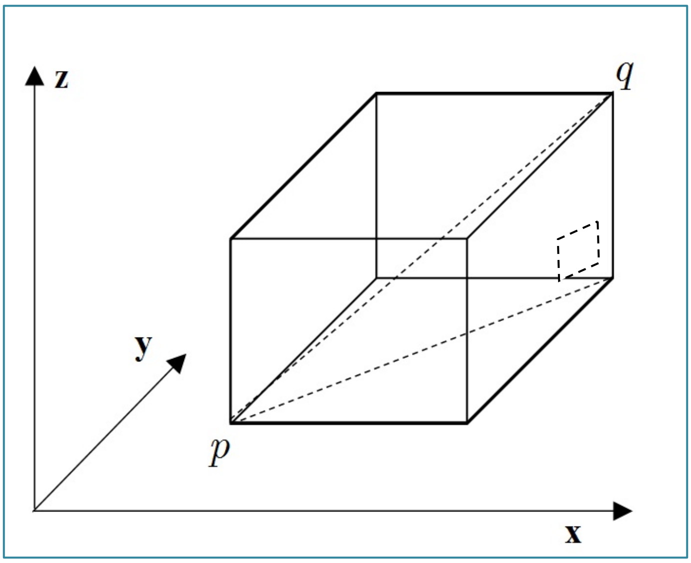


المسافة بين نقطتين في الفراغ

لتكن $p=(x_1,y_1,z_1)$ و $q=(x_2,y_2,z_2)$ نقطتين من الفراغ. إنّ المسافة بين هاتين النقطتين تعطى بالصيغة:

$$L[pq]=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

تدريب: برر العلاقة السابقة باستخدام مثلثين قائمين مناسبين كما في الرسم المجاور.



السطح الكروي والكرة

- لتكن $p=(x_0,y_0,z_0)$ نقطة من الفراغ. وليكن العدد الحقيقي الموجب تماماً $0<r$. إنّ السطح الكروي الذي مركزه p ونصف قطره r هو بالتعريف مجموعة نقاط الفراغ التي تبعد عن p مسافة تساوي r. نرمز للسطح الكروي السابق بالرمز $S(p,r)$. بصياغة أخرى إنّ المجموعة $S(p,r)$ هي مجموعة النقاط (x,y,z) التي تحقق المعادلة:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$$

والتي نسميها المعادلة الديكارتية للسطح الكروي.

- نعرّف الكرة المفتوحة التي مركزها p ونصف قطرها r على أنها مجموعة النقاط التي تبعد عن p مسافة أصغر تماماً من r ونرمز لهذه المجموعة $B(p,r)$. أي أنّ $B(p,r)$ هي مجموعة النقاط (x,y,z) التي تحقق المتراجحة:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<r^2$$

- نعرّف الكرة المغلقة التي مركزها p ونصف قطرها r على أنها مجموعة النقاط التي تبعد عن p مسافة أصغر أو تساوي r ونرمز لهذه المجموعة $\bar{B}(p,r)$. أي أنّ $\bar{B}(p,r)$ هي مجموعة النقاط (x,y,z) التي تحقق المتراجحة:

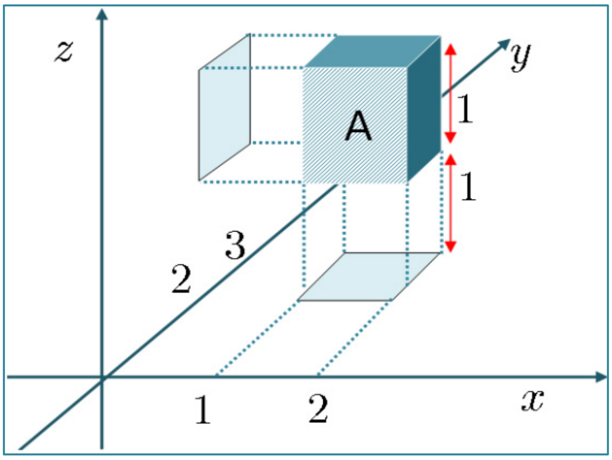
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\le r^2$$

وصف مجموعة نقاط في الفراغ

لوصف مجموعة M من نقاط الفراغ نكتب غالباً العلاقات (متراجحات أو معادلات) التي تحققها احداثيات نقاط هذه المجموعة.

مثال1:

ليكن A المكعب الممتلئ المبين في الشكل. إنّ هذا المكعب هو مجموعة النقاط (x,y,z) حيث $x\in[1,2]$ و $y\in[2,3]$ و $z\in[1,2]$. إنّ مسقط أي نقطة من A على المستوي الأفقي XOY يقع في المربع المظلل. وارتفاع أيٍ من نقاط A عن المستوي الأفقي يتراوح بين 1 و2. يمكننا أن نكتب A بشكل جداء ديكارتي لثلاثة مجموعات: $A=[1,2]\times[2,3]\times[1,2]$.



مثال2:

لنعرّف المجموعة B على أنها مجموعة النقاط من الشكل $(0,0,z)$ حيث $z\in\mathbb{R}$. أي:

$$B=\{(0,0,z):z\in\mathbb{R}\}$$

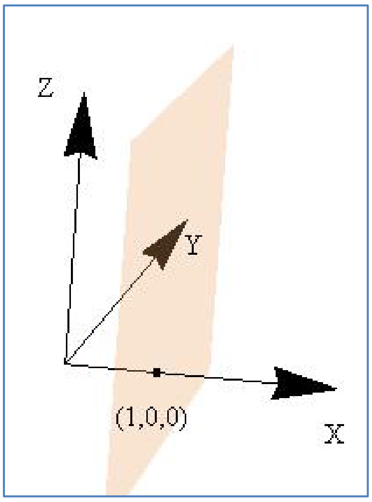
أي أن B هي المحور OZ المكون من النقاط التي احداثياتها x و y معدومة. بصياغة أخرى المجموعة B هي حلول جملة المعادلتين $x=0$ و $y=0$. لاحظ أنّه لا يوجد شرط على z.

مثال3:

لنعرّف H مجموعة النقاط (x,y,z) التي تحقق $x=1$. لاحظ أنّه لا يوجد شرط على الاحداثيين y,z. أي يمكننا أن نكتب:

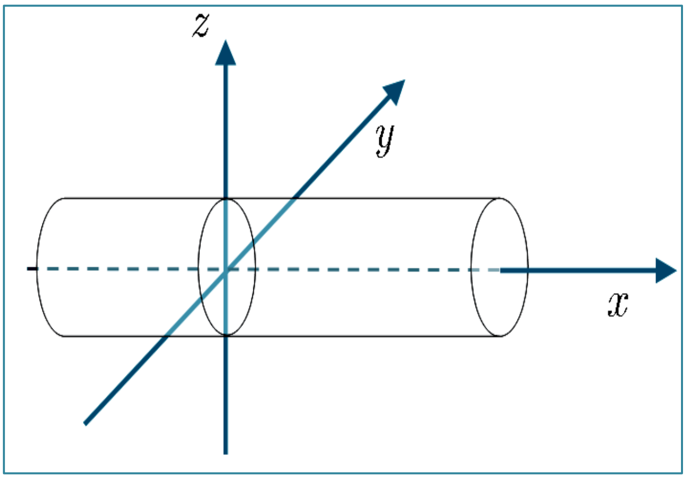
$$H=\{(1,y,z):y,z\in\mathbb{R}\}$$

أي أنّ المسقط القائم لأي نقطة من المجموعة H على المحور $\overrightarrow{OX}$ هو النقطة $(1,0,0)$، إذاً H تمثل المستوي المار في $(1,0,0)$ والموازي للمستوي YOZ. انظر الشكل.



مثال4:

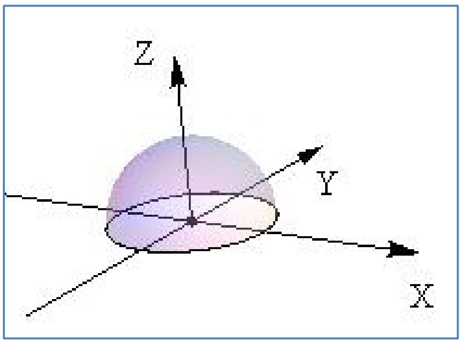
لنعرّف C مجموعة النقاط (x,y,z) التي تحقق $y^2+z^2\leq 1$. لاحظ أنّه لا يوجد شرط على الاحداثي x بينما نشترط أن تكون النقطة (x,y,z) ضمن القرص الذي مركزه $(x,0,0)$ ونصف قطره 1 والواقع في مستوٍ موازٍ للمستوي YOZ. أي أنّ المجموعة C تمثّل اسطوانة ممتلئة نصف قطرها 1 ومحورها OX كما هو موضّح في الشكل.



مثال5:

لنعرّف $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leq 1 \ \wedge \ z\geq 0\}$.

من الواضح أنّ D محتواة في الكرة التي مركزها O ونصف قطرها 1 لأنّ أي نقطة من D تبعد عن O مسافة أقل أو تساوي 1. ولكن D لا تضم نقاط الكرة السابقة كلها بل فقط النقاط التي تحقق $z\geq 0$، أي أنّ D هي نصف الكرة العلوي الواقع فوق المستوي الأفقي XOY.



تدريبات

تدريب 1

ارسم كلاً من المجموعات التالية:

$$C = [-1,1]^2 \times \mathbb{R}_+ \qquad B = \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\} \qquad A = [0,1]^3$$

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1\} \qquad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \le 1\}$$

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1 \quad \wedge \quad y \in [1,2]\}$$

$$M = H \cap E \qquad H = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

نعرّف التوابع $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ كما يلي $f(x,y,z) = (x,y,0)$ و $g(x,y,z) = (x,y,-z)$. ما التحويلات الهندسية التي تمثلها هذه التوابع؟ عيّن صورة كل من المجموعات السابقة وفق هذه التطبيقات مع الرسم.

تدريب 2

لتكن p,q نقطتين من الفراغ و $r,s \in \mathbb{R}_+^*$. بين الصحيح من الخطأ فيما يلي:

$$B(p,r) \subset \overline{B}(p,r)$$

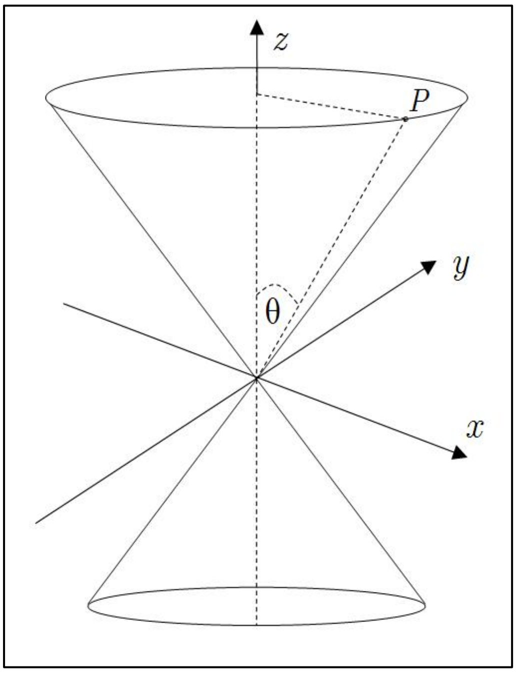
$$B(p,r) \subset S(p,r)$$

$$B(p,r) \cup S(p,r) = \overline{B}(p,r)$$

$$(B(p,r) \subset B(p,s)) \Rightarrow (r \le s)$$

$$(B(p,r) \cap B(q,s) \neq \varnothing) \Rightarrow (L[p,q] < r + s)$$

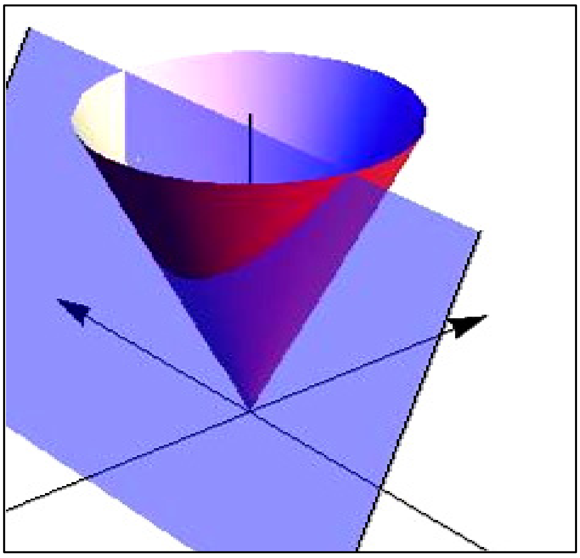
تدريب 3



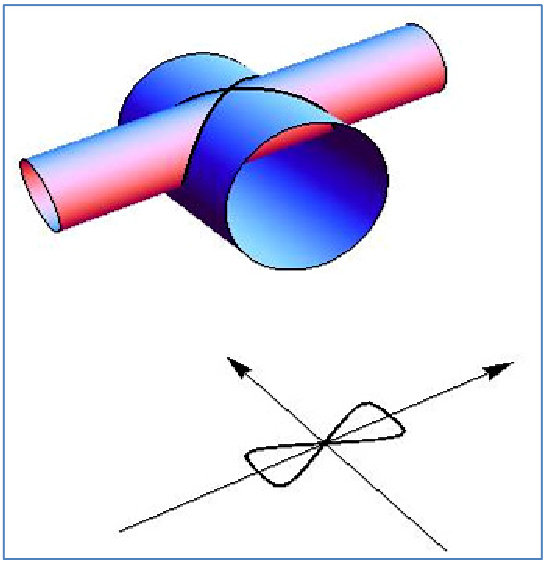
ليكن M السطح المخروطي الدوراني الذي محوره OZ ورأسه في O وزاوية الرأس θ كما هو موضح في الشكل المجاور. لتكن $P = (x,y,z)$ نقطة من M.

1. احسب المسافة بين P والمستوي الأفقي XOY.
2. احسب المسافة بين P والمحور OZ.
3. بكتابة العلاقة بين المسافتين السابقتين أثبت أنّ معادلة السطح المخروطي تكون $x^2 + y^2 = a^2 \cdot z^2$ حيث a ثابت.
4. أثبت أنّ تقاطع السطح M مع المستوي $y = cte \neq 0$ هو قطع زائد. بيّن ذلك على الرسم.
5. أثبت أنّ تقاطع السطح M مع المستوي $az = x + a$ هو قطع مكافئ. انظر الشكل التالي.

تقاطع السطح المخروطي الدوراني مع مستوي يوازي أحد مولدات السطح ولا يمر في مركزه هو قطع مكافئ.



تدريب 4



نعرّف السطحين الاسطوانيين:

$$A=\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3 : x^2+\left(z-5\right)^2=4\right\}$$

$$B=\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3 : y^2+\left(z-6\right)^2=1\right\}$$

عيّن محور ونصف قطر كل من A و B مع الرسم. لتكن $C=A\cap B$ تقاطع السطحين ولنعرّف D مسقط C على المستوي XOY. بحذف المتحول z من معادلتي A و B عين معادلة D.

تدريب 5

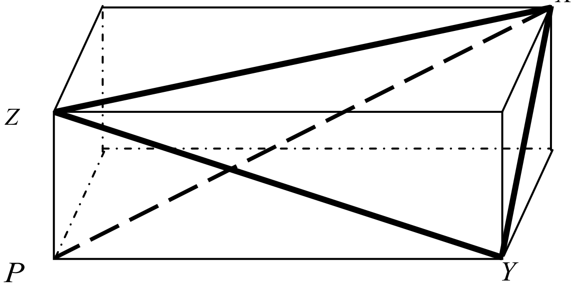
ليكن C مخروطاً دورانياً قائماً قاعدته دائرة نصف قطرها 1. رأس المخروط و قاعدته واقعان على سطح كرة نصف قطرها 2. احسب نسبة حجم المخروط إلى حجم الكرة.

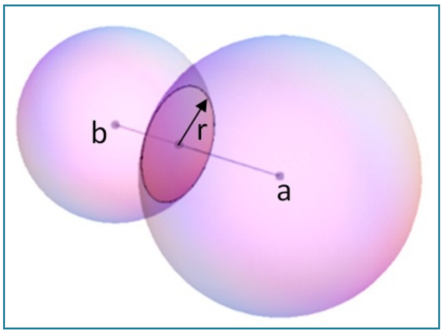
تدريب 6

ليكن C مكعباً رؤوسه واقعة على سطح كرة نصف قطرها r. احسب نسبة حجم المكعب إلى حجم الكرة.

تدريب 7

ليكن متوازي المستطيلات المبيّن في الشكل. نفترض أنّ أطوال أبعاد المثلّث XYZ هي $\sqrt{55}$، 8، 9. ما هو طول XP؟





تدريب 8

لتكن A كرة مركزها النقطة a ونصف قطرها 4. ولتكن B كرة مركزها النقطة b ونصف قطرها 3. نفترض أنّ المسافة بين a و b تساوي 6. عيّن نصف قطر الدائرة الناتجة عن تقاطع سطحي الكرتين.

استخدام الأشعة في المستوي

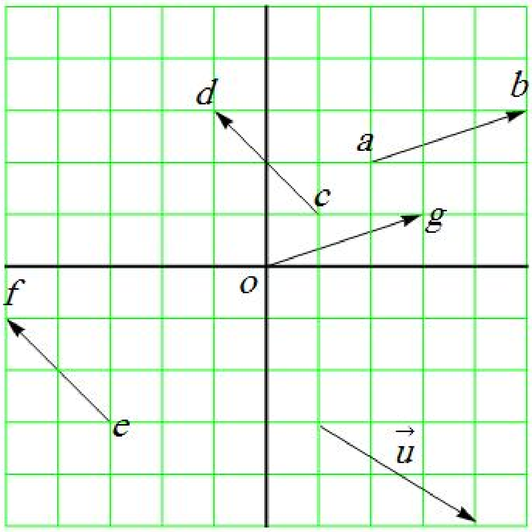
الأشعة في المستوي

- لتكن P و Q نقطتين في المستوي. نعرّف الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ على أنّه القطعة المستقيمة الموجهة الواصلة بين النقطتين P و Q.
- نسمي النقطة P مبدأ الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ ونسمي النقطة Q رأس هذا الشعاع. نسمي المسافة بين الرأس والمبدأ طولَ الشعاع.
- نسمي المستقيم $\overline{PQ}$ حامل الشعاع $\overrightarrow{PQ}$.

التمثيل الديكارتي لشعاع

إذا كانت $P=(x_1,y_1)$ و $Q=(x_2,y_2)$ نقطتين في المستوي فنمثل الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ كما يلي:

$$\overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$$



مثلاً في الشكل المجاور لدينا:

$$\overrightarrow{ab}=\overrightarrow{og}=(3,1)$$

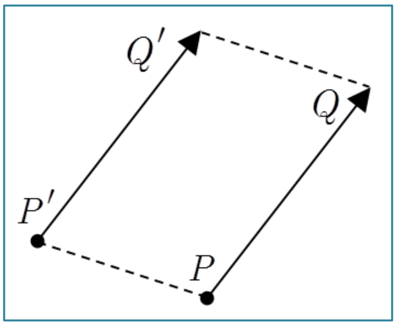
$$\overrightarrow{cd}=\overrightarrow{ef}=(-2,2)$$

بتعبير آخر: الكتابة $\overrightarrow{ab}=(3,1)$ تعني أنه للانتقال من النقطة a إلى النقطة b علينا السير 3 وحدات إلى اليمين ثم وحدة إلى الأعلى. كذلك فإن الكتابة $\overrightarrow{ef}=(-2,2)$ تعني أنه للانتقال من النقطة e إلى النقطة f علينا السير وحدتين إلى اليسار ثم وحدتين إلى الأعلى.

- أحياناً نرمز لشعاعٍ ما بحرفٍ دون تحديد نقطة المبدأ أو الرأس فنكتب مثلاً: $\vec{u}=(3,-2)$. نقول أنّ للشعاع $\vec{u}$ مركّبة أفقية تساوي 3 ومركبة عامودية تساوي -2.
- نعرّف الشعاع الصفري على أنّه $\vec{o}=(0,0)$. لاحظ أنّه إذا كانت P نقطة من المستوي فلدينا دوماً: $\overrightarrow{PP}=\vec{o}$.

تكافؤ أو تساير شعاعين

نقول عن شعاعين أنهما متكافئين أو متسايرين إذا كان لهما التمثيل الديكارتي ذاته. فمثلاً في الشكل أعلاه لدينا $\overrightarrow{ab}=\overrightarrow{og}=(3,1)$ إذاً الشعاعين $\overrightarrow{ab}$ و $\overrightarrow{og}$ متكافئان.



لتكن P، Q، P'، Q' أربعة نقاط في المستوي. يكون الرباعي $PQQ'P'$ متوازي أضلاع إذا وفقط إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{P'Q'}$ متكافئين ونكتب $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{P'Q'}$. انظر الشكل المجاور.

تدريب: أثبت ما سبق باستخدام تشابه مثلثين مناسبين.

طول شعاع أو طويلة شعاع أو نظيم شعاع

ليكن $\vec{u} = (x, y)$. نعرّف نظيم الشعاع $\vec{u}$ على أنّه العدد الحقيقي الموجب $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

أي أنّ نظيم شعاع هو المسافة بين رأسه ومبدئه: $\|\overrightarrow{PQ}\| = L[PQ]$.

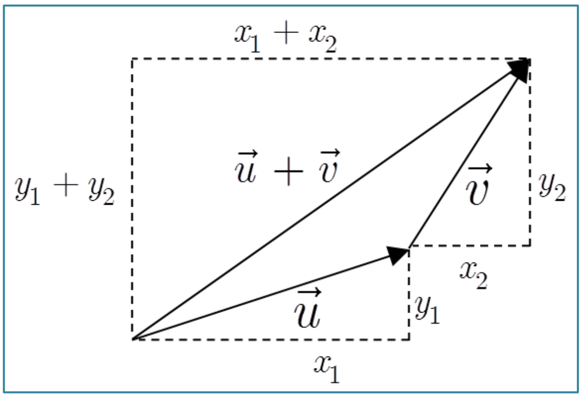
مجموع شعاعين

ليكن الشعاعان $\vec{u} = (x_1, y_1)$ و $\vec{v} = (x_2, y_2)$. نعرّف مجموع هذين الشعاعين على أنّه الشعاع:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

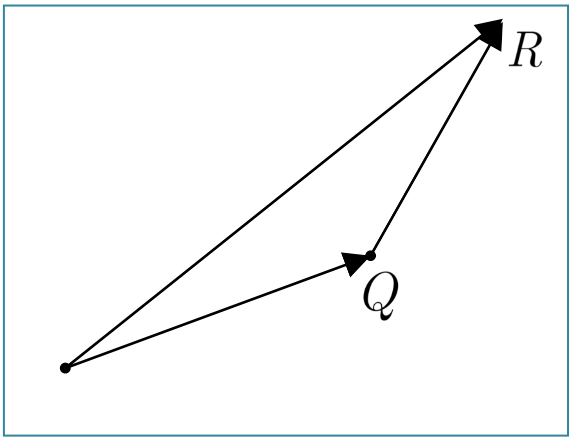
أي أننا نجمع كل مركبة مع المركبة المقابلة لها. مثلاً $(1,2) + (-2,3) = (-1,5)$.

هندسياً لجمع الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نجعل مبدأ الشعاع $\vec{v}$ منطبقاً على رأس الشعاع $\vec{u}$ فيكون الشعاع $\vec{u} + \vec{v}$ هو الشعاع الواصل بين مبدأ $\vec{u}$ ورأس $\vec{v}$ كما هو موضح في الرسم.



إذا كانت P, Q, R ثلاثة نقاط في المستوي فلدينا: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$

أي أنّ مجموع الشعاعين هو الشعاع الواصل بين مبدأ الشعاع الأول ورأس الشعاع الثاني.



إنّ عملية جمع الأشعة تبديلية أي $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

كذلك لاحظ أنّ الشعاع الصفري هو عنصر حيادي لعملية الجمع أي: $\vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$.

ضرب شعاع بعدد حقيقي

ليكن الشعاع $\vec{u} = (x, y)$ والعدد الحقيقي $\lambda \in \mathbb{R}$. نعرّف جداء العدد λ بالشعاع $\vec{u}$ على أنّه الشعاع:

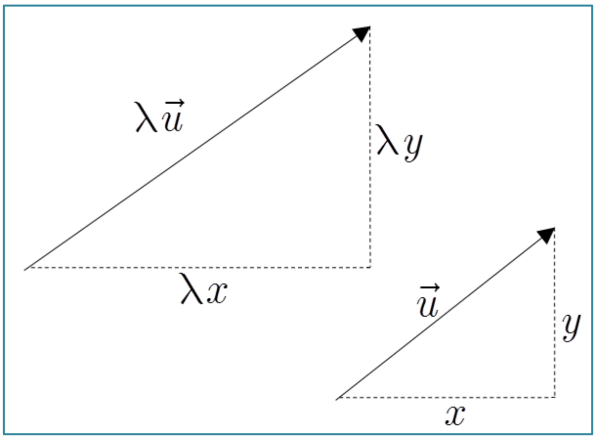
$$\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda x, \lambda y)$$

أي أننا نضرب العدد λ بمركبتي الشعاع.

أمثلة:

$$2\cdot(1,-3)=(2,-6)$$
$$-1\cdot(2,2)=(-2,-2)$$

هندسياً، الشعاع $\lambda\vec{u}$ هو شعاع موازٍ للشعاع $\vec{u}$. لإثبات ذلك ادرس تشابه المثلثين في الشكل المجاور.



إنّ نظيم الشعاع $\lambda\vec{u}$ يساوي جداء نظيم $\vec{u}$ بالعدد $|\lambda|$ لأنّ:

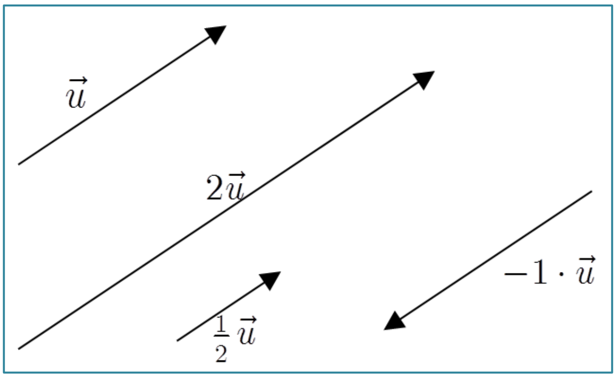
$$\|\lambda\vec{u}\|=\sqrt{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2}=|\lambda|\sqrt{x^2+y^2}=|\lambda|\|\vec{u}\|$$

ليكن $\vec{u}\neq\vec{0}$، لاحظ أنّه:

- إذا كان $|\lambda|>1$ يكون نظيم $\lambda\vec{u}$ أكبر تماماً من نظيم $\vec{u}$.
- أما إذا كان $|\lambda|<1$ يكون نظيم $\lambda\vec{u}$ أصغر تماماً من نظيم $\vec{u}$.

ليكن $\vec{u}\neq\vec{0}$، لاحظ كذلك أنّه:

- إذا كان $\lambda>0$ يكون للشعاعين $\vec{u}$ و $\lambda\vec{u}$ التوجيه نفسه.
- أما إذا كان $\lambda<0$ يكون لهما اتجاهين متعاكسين.
- إذا كانت P و Q نقطتين من المستوي فلدينا دوماً $\overrightarrow{QP}=-\overrightarrow{PQ}$.

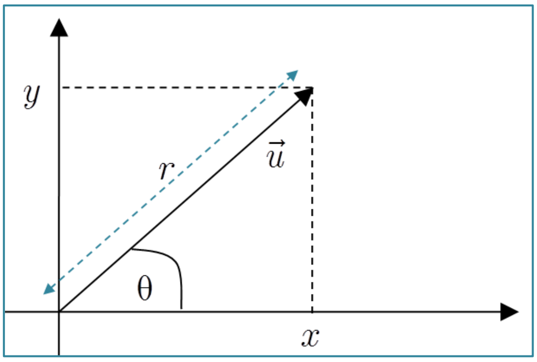


الشكل القطبي لشعاع

ليكن $\vec{u}=(x,y)$. ليكن $r=\|\vec{u}\|$ نظيم الشعاع $\vec{u}$ ونفترض أنّ $r\neq 0$. ولتكن θ قياس الزاوية التي يصنعها مع المحور $\overrightarrow{OX}$ كما هو مبين في الشكل التالي. بإخراج r عاملاً مشتركاً من مركبتي الشعاع $\vec{u}$ نجد:

$$\vec{u}=r(\cos\theta,\sin\theta)$$

الشكل السابق يسمى الشكل القطبي للشعاع $\vec{u}$.



الجداء السلمي لشعاعين

ليكن $\vec{u} = \left(x_1, y_1\right)$ و $\vec{v} = \left(x_2, y_2\right)$ شعاعين. نعرّف جداءهما السلمي على أنّه العدد الحقيقي:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

خواص الجداء السلمي

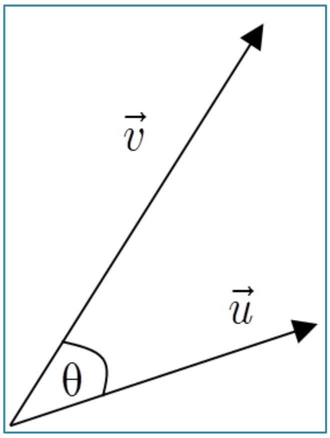
1. الخاصة التبديلية: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. مربع نظيم شعاع يساوي الجداء السلمي للشعاع بنفسه: $\vec{u} \cdot \vec{u} = \left\|\vec{u}\right\|^2$.
3. الجداء السلمي يتوزع على الجمع أي: $\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
4. إذا كان θ قياس الزاوية بين الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ فلدينا: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\cos\theta$

فمثلاً عندما يكون الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدين يكون $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

وعندما يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيين ولهما الإتجاه نفسه يكون $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|$.

وعندما يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيين ولهما اتجاهان متعاكسان يكون $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|$.

نترك اثبات الخواص الثلاث الأولى للطلاب ونثبت فقط الخاصة الرابعة.



لنكتب الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بالشكل القطبي:

$$\vec{u} = r_1\left(\cos\theta_1, \sin\theta_1\right) \text{ و } \vec{v} = r_2\left(\cos\theta_2, \sin\theta_2\right)$$

حيث θ_1 قياس الزاوية التي يصنعها $\vec{u}$ مع $\overrightarrow{OX}$ و θ_2 قياس الزاوية التي يصنعها $\vec{v}$ مع $\overrightarrow{OX}$. نعوض في صيغة الجداء السلمي:

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \left(r_1 \cos\theta_1\right)\left(r_2 \cos\theta_2\right) + \left(r_1 \sin\theta_1\right)\left(r_2 \sin\theta_2\right)\\ &= r_1 r_2\left(\cos\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \sin\theta_2\right)\\ &= r_1 r_2 \cos\left(\theta_2 - \theta_1\right)\\ &= r_1 r_2 \cos\theta\end{aligned}$$

معادلة مستقيم

ليكن M مستقيماً وليكن $\overrightarrow{N} = \left(\alpha, \beta\right)$ شعاعاً يعامد M ولتكن النقطة $P_0 = \left(x_0, y_0\right)$ من المستقيم M.

نريد تعيين معادلة المستقيم M الديكارتية. إنّ النقطة $P = \left(x, y\right)$ تنتمي إلى M إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{P_0P} \perp \overrightarrow{N}$ أي:

$$\overrightarrow{P_0P}\cdot\overrightarrow{N}=0$$

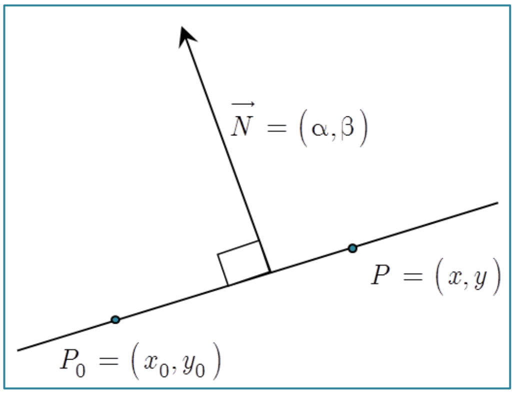
بالتعويض نجد $0=(\alpha,\beta)\cdot(x-x_0,y-y_0)$ ومنه:

$$\alpha x+\beta y=\alpha x_0+\beta y_0$$

أي أنّ معادلة المستقيم تكون من الشكل:

$$\boxed{\alpha x+\beta y=\delta}$$

حيث $\delta=\alpha x_0+\beta y_0$ ثابت.



مثال1:

عين معادلة المستقيم المار بالنقطة $(1,-1)$ والذي يعامد الشعاع $(1,1)$.

الحل: نعلم مما سبق أنّ المعادلة من الشكل $1\cdot x+1\cdot y=\delta$ بالتعويض باحداثيات النقطة $(1,-1)$ نجد قيمة الثابت δ أي أنّ المعادلة المطلوبة هي: $x+y=0$.

مثال2:

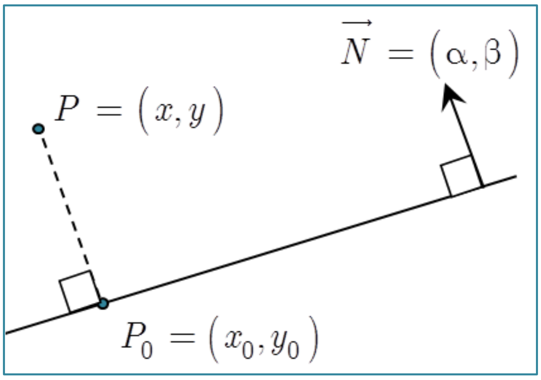
عين معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(1,2)$ و $(2,3)$.

الحل: نعلم مما سبق أنّ المعادلة من الشكل $\alpha\cdot x+\beta\cdot y=\delta$ بالتعويض باحداثيات النقطتين نجد:

$$\alpha+2\beta=\delta$$
$$2\alpha+3\beta=\delta$$

نحسب α,β بدلالة δ فنجد: $\alpha=-\delta$ و $\beta=\delta$. بالتعويض في معادلة المستقيم والاختصار نجد: $-x+y=1$.

المسافة بين نقطة ومستقيم



ليكن M مستقيماً معادلته $\alpha x+\beta y=\delta$. أي أنّ الشعاع $N=(\alpha,\beta)$ عمودي على M. ولتكن $P=(x,y)$ نقطة من المستوي. ولتكن النقطة $P_0=(x_0,y_0)$ المسقط القائم للنقطة P على المستقيم M كما هو موضح في الرسم.

بالطبع يكون الشعاع $\overrightarrow{P_0P}$ موازياً للشعاع $\overrightarrow{N}$ أي يوجد $\lambda\in\mathbb{R}$ بحيث $\overrightarrow{PP_0}=\lambda\cdot\overrightarrow{N}$. أي أنّ: $(x_0-x,y_0-y)=\lambda\cdot(\alpha,\beta)$

أي إنّ المجاهيل x_0,y_0 تحقق جملة المعادلات:

$$x_0-x=\lambda\alpha$$
$$y_0-y=\lambda\beta$$

وبما أنّ $(x_0,y_0)\in M$ فلدينا المعادلة:

$$\alpha x_0+\beta y_0=\delta$$

من المعادلات الثلاثة السابقة نستنتج:

$$\lambda=\frac{\delta-(\alpha x+\beta y)}{\alpha^2+\beta^2}$$

ثم نجد:

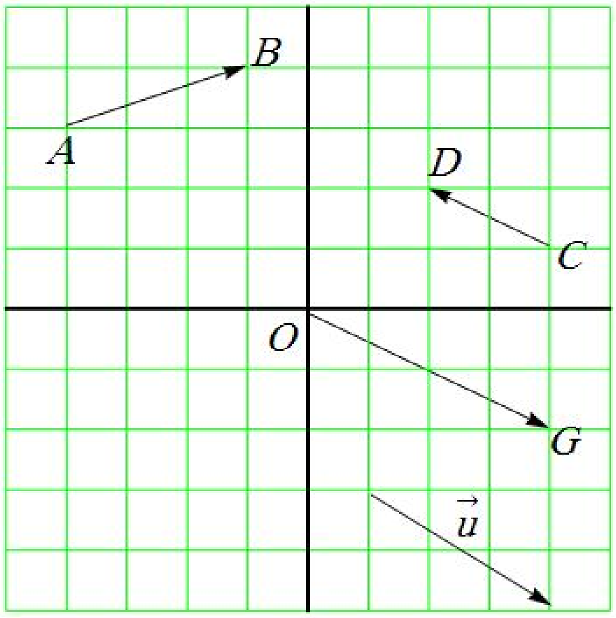
$$\sqrt{(x_0-x)^2+(y_0-y)^2}=|\lambda|\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

ومنه نستنتج المسافة بين النقطة P والمستقيم M :

$$\boxed{L\left[P_0P\right] = \frac{\left|\alpha x + \beta y - \delta\right|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}$$

تدريبات

تدريب 1



انظر إلى الشكل المجاور ثم أكمل ما يلي:

$\overrightarrow{CD} =$

$\overrightarrow{DC} =$

$\overrightarrow{AB} =$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} =$

$\overrightarrow{OG} + \vec{u} =$

$2\overrightarrow{AB} - 3\vec{u} =$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} =$

$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} =$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} =$

$\left\| \overrightarrow{AG} \right\| =$

باستخدام الجداء السلمي احسب تمام جيب كلٍ من الزوايا التالية: $\widehat{GOD}$ $\widehat{OAB}$ $\widehat{OGC}$

ما العدد الحقيقي λ الذي يحقق $\overrightarrow{OG} = \lambda \cdot \overrightarrow{DC}$؟

هل يوجد عدد حقيقي λ يحقق $\overrightarrow{OG} = \lambda \cdot \vec{u}$؟

تدريب 2

لتكن O, A, B, C, D نقاط في المستوي. بسط المقادير التالية:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$

تدريب 3

ليكن $\vec{u} = (1,2)$ و $\vec{v} = (3,-1)$. ليكن $\vec{w} = (x,y)$. أوجد عددين $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ بحيث: $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

تدريب 4

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين متعامدين ونظيم كل منهما 1 أي:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{و} \quad \left\|\vec{u}\right\| = 1 \quad \text{و} \quad \left\|\vec{v}\right\| = 1$$

وليكن $\vec{w} = (x,y)$. أثبت أنّ $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ حيث $\alpha = \vec{u} \cdot \vec{w}$ و $\beta = \vec{v} \cdot \vec{w}$.

تدريب 5

ليكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعين نظيم كل منهما 1 أي $\left\|\vec{u}\right\| = 1$ و $\left\|\vec{v}\right\| = 1$.

احسب الجداء السلمي $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$ واستنتج أنّ الشعاعين $\vec{u}+\vec{v}$ و $\vec{u}-\vec{v}$ متعامدان. ارسم.

تدريب 6

ليكن المستقيم D_1 الذي معادلته: $2x+y-2=0$.

ليكن المستقيم D_2 الذي معادلته: $x-y-1=0$.

لتكن $P=\left(x,y\right)$ نقطة من المستوي. احسب بدلالة x,y بعد النقطة P عن D_1 وعن D_2.

اكتب المعادلة الديكارتية لمجموعة النقاط E التي تبعد المسافة ذاتها عن D_1 وعن D_2.

أثبت E اجتماع مستقيمين وعيّن معادلتهما مع الرسم.

تدريب 7 اثبات مبرهنة الارتفاعات الثلاثة باستخدام الأشعة

لتكن النقاط A,B,C رؤوس مثلث أي أنها لاتقع على استقامة واحدة.

لتكن النقطة A' المسقط القائم للنقطة A على المستقيم BC. ولتكن النقطة B' مسقط B على المستقيم AC.

أخيراً لتكن M نقطة تقاطع الارتفاعين AA' و BB'.

ما قيمة الجداء السلمي $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}$؟ ما قيمة الجداء السلمي $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{AC}$؟ استنتج أنّ $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

استنتج أنّ الارتفاعات الثلاثة لمثلث تمر كلها في النقطة M.

تدريب 8 اثبات مبرهنة المتوسطات الثلاثة باستخدام الأشعة

1. لتكن A و B و P نقاطاً في المستوي. أثبت التكافؤ:

(P تقع على القطعة المستقيمة AB)

$$\Leftrightarrow$$

(يمكن كتابة الشعاع $\vec{P}$ بالشكل $\vec{P}=\lambda\vec{A}+\left(1-\lambda\right)\vec{B}$ حيث $\lambda\in\left[0,1\right]$)

ما قيمة λ عندما تكون P في منتصف القطعة المستقيمة $\overline{AB}$؟

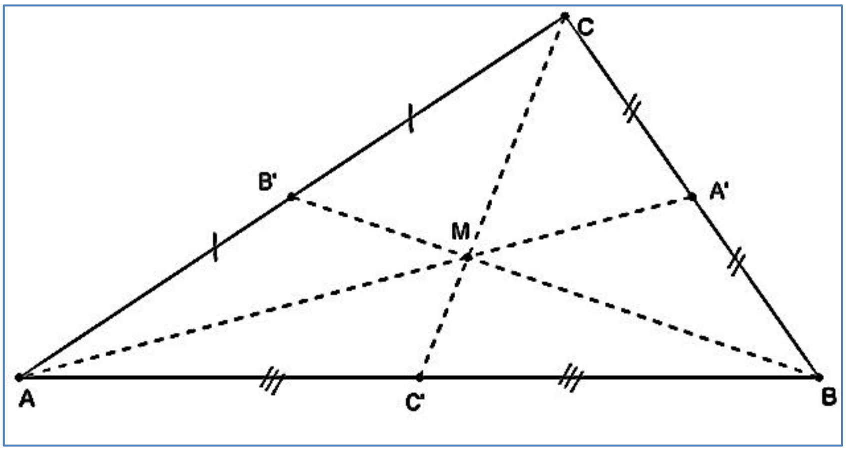
2. لتكن النقاط A,B,C رؤوس مثلث أي أنها لاتقع على استقامة واحدة. لتكن النقطة A' منتصف القطعة BC. أثبت أنّ $\vec{A'}=\frac{1}{2}\left(\vec{B}+\vec{C}\right)$. اكتب علاقات مشابهة للضلعين الآخرين في المثلث.

3. نعرّف النقطة M حيث $\vec{M}=\frac{1}{3}\left(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}\right)$. أثبت أنّ $\vec{M}=\frac{2}{3}A'+\frac{1}{3}A$.

اكتب علاقات مشابهة للضلعين الآخرين.

استنتج أخيراً أنّ M تقع على كلٍ من متوسطات المثلث أي أنّ متوسطات المثلث تتقاطع في M.

4. ما نسبة طول $\overline{MA}$ إلى طول $\overline{MA'}$؟


C
B'
A'
M
A
C'
B

استخدام الأشعة في الفراغ

الأشعة في الفراغ

- لتكن P وQ نقطتين في الفراغ. نعرّف الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ على أنّه القطعة المستقيمة الموجهة الواصلة بين النقطتين P وQ.
- نسمي المستقيم $\overline{PQ}$ حامل الشعاع $\overrightarrow{PQ}$.
- نسمي النقطة P مبدأ الشعاع $\overrightarrow{PQ}$ ونسمي النقطة Q رأس هذا الشعاع.

التمثيل الديكارتي لشعاع

إذا كانت $P=\left(x_1,y_1,z_1\right)$ و $Q=\left(x_2,y_2,z_2\right)$ نقطتين في الفراغ فنكتب $\overrightarrow{PQ}=\left(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\right)$.
نسمي الكتابة السابقة التمثيل الديكارتي للشعاع $\overrightarrow{PQ}$.
نعرّف الشعاع الصفري على أنّه $\vec{o}=\left(0,0,0\right)$. لاحظ أنّه إذا كانت P نقطة من الفراغ فلدينا: $\overrightarrow{PP}=\vec{o}$.

تكافؤ أو تساير شعاعين

نقول عن شعاعين أنهما متكافئان أو متسايران إذا كان لهما التمثيل الديكارتي ذاته.
مثال: لتكن النقاط $A=\left(0,0,0\right)$ و $B=\left(1,1,0\right)$ و $A'=\left(1,1,1\right)$ و $B'=\left(2,2,1\right)$ لدينا هنا:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}=\left(1,1,0\right)$$

إذاً الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{A'B'}$ متكافئان.
بشكل أعم لدينا التكافؤ التالي: لتكن P و Q و P' و Q' أربعة نقاط في الفراغ. يتكافأ الشعاعان $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{P'Q'}$ إذا وفقط إذا كان الرباعي $PQQ'P'$ متوازي أضلاع، أي إذا كانت القطعتين $\overline{PQ}$ و $\overline{P'Q'}$ متوازيتين وكان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه.

نظيم شعاع أو طول شعاع أو طويلة شعاع

ليكن $\vec{u}=\left(x,y,z\right)$. نعرّف نظيم الشعاع $\vec{u}$ على أنّه العدد الحقيقي الموجب $\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
أي أنّ نظيم شعاع هو المسافة بين رأسه ومبدئه: $\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|=L\left[PQ\right]$.

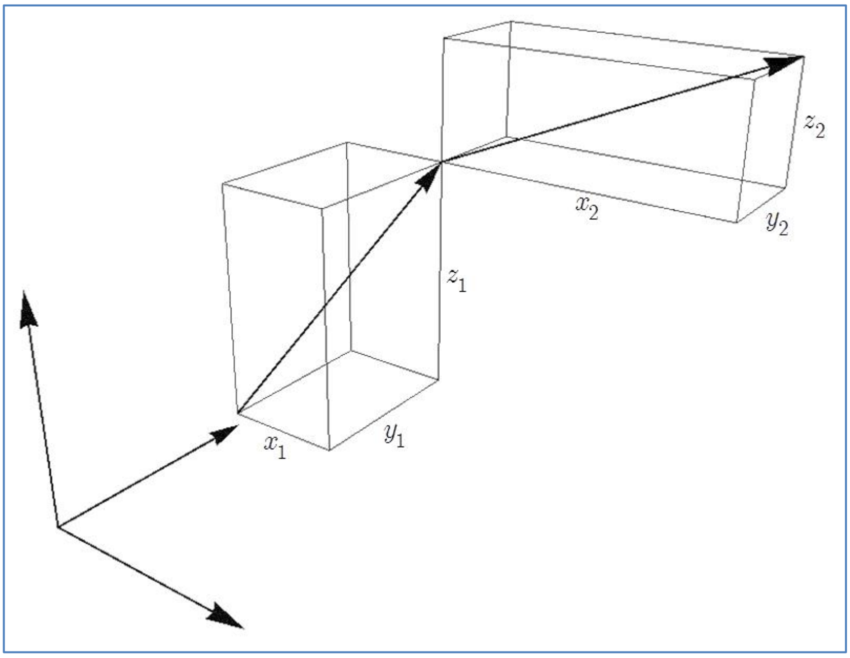
مجموع شعاعين

ليكن الشعاعان $\vec{u}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$ و $\vec{v}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$. نعرّف مجموع هذين الشعاعين على أنّه الشعاع:

$$\vec{u}+\vec{v}=\left(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2\right)$$

أي أننا نجمع كل مركبة مع المركبة المقابلة لها. مثلاً $\left(1,2,4\right)+\left(-2,3,6\right)=\left(-1,5,10\right)$.
هندسياً لجمع الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نجعل مبدأ الشعاع $\vec{v}$ منطبقاً على رأس الشعاع $\vec{u}$ فيكون الشعاع $\vec{u}+\vec{v}$ هو الشعاع الواصل بين مبدأ $\vec{u}$ ورأس $\vec{v}$ كما هو موضح في الرسم التالي.

- إذا كانت P,Q,R ثلاثة نقاط في الفراغ فلدينا: $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$ أي أنّ مجموع الشعاعين هو الشعاع الواصل بين مبدأ الشعاع الأول ورأس الشعاع الثاني.
- إنّ عملية جمع الأشعة تبديلية أي $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.
- كذلك لاحظ أنّ الشعاع الصفري هو عنصر حيادي لعملية الجمع أي: $\vec{u}+\vec{o}=\vec{u}$.



ضرب شعاع بعدد حقيقي

ليكن الشعاع $\vec{u} = (x,y,z)$ والعدد الحقيقي $\lambda \in \mathbb{R}$. نعرّف جداء العدد λ بالشعاع $\vec{u}$ على أنّه الشعاع:

$$\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$$

أي أننا نضرب العدد λ بمركبات الشعاع كلها.

أمثلة:

$$2 \cdot (1,-3,5) = (2,-6,10)$$
$$-1 \cdot (2,2,3) = (-2,-2,-3)$$

هندسياً، الشعاع $\lambda\vec{u}$ هو شعاع موازٍ للشعاع $\vec{u}$.

إنّ نظيم الشعاع $\lambda\vec{u}$ يساوي جداء نظيم $\vec{u}$ بالعدد $|\lambda|$ لأنّ:

$$\|\lambda\vec{u}\| = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 + (\lambda z)^2} = |\lambda|\sqrt{x^2+y^2+z^2} = |\lambda|\|\vec{u}\|$$

لاحظ أنّه:

- إذا كان $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $|\lambda| > 1$ يكون نظيم $\lambda\vec{u}$ أكبر تماماً من نظيم $\vec{u}$.
- أما إذا كان $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $|\lambda| < 1$ يكون نظيم $\lambda\vec{u}$ أصغر تماماً من نظيم $\vec{u}$.

ليكن $\vec{u} \neq \vec{0}$ لاحظ أنّه :

- إذا كان $\lambda > 0$ يكون للشعاعين $\vec{u}$ و $\lambda\vec{u}$ التوجيه نفسه.
- أما إذا كان $\lambda < 0$ يكون لهما اتجاهين متعاكسين.
- إذا كانت P و Q نقطتين من الفراغ فيكون $\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$.

الجداء السلمي لشعاعين

ليكن $\vec{u} = (x_1,y_1,z_1)$ و $\vec{v} = (x_2,y_2,z_2)$ شعاعين. نعرّف جداءهما السلمي على أنّه العدد الحقيقي:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

خواص الجداء السلمي:

1. الخاصة التبديلية: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

2. مربع نظيم شعاع يساوي جداء الشعاع بنفسه: $\vec{u}\cdot\vec{u}=\left\|\vec{u}\right\|^2$.

3. الجداء السلمي يتوزع على جمع الأشعة: $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$

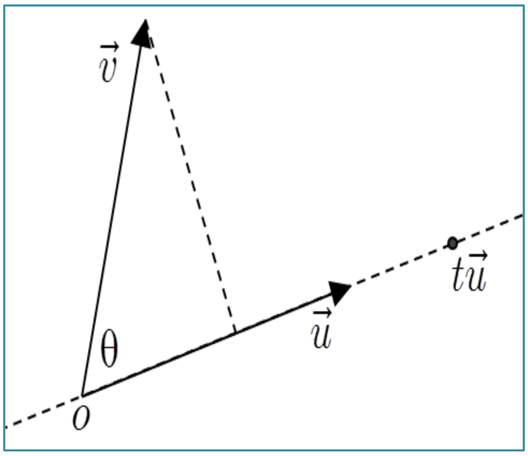
4. إذا كان θ قياس الزاوية بين الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ فلدينا: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\cos\theta$

فمثلاً يتعامد الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ إذا وفقط إذا كان $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

وعندما يكون الشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيين ولهما الإتجاه نفسه يكون $\vec{u}\cdot\vec{v}=\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|$.

وعندما يكون الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيين ولهما اتجاهين متعاكسين يكون $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|$.

نترك اثبات الخواص الثلاثة الأولى للطلاب ونثبت فقط الخاصة الرابعة.



لنجعل مبدأ كلٍ من الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في النقطة o.

نعرّف التابع $f(t)=\left\|\vec{v}-t\vec{u}\right\|^2$ حيث $t\in\mathbb{R}$.

إنّ $f(t)$ يمثل مربع المسافة بين رأس $\vec{v}$ و النقطة $t\vec{u}$ من المستقيم الحامل للشعاع $\vec{u}$ كما هو موضح في الشكل. من الواضح أنّ أصغر قيمة للتابع f تكون عندما تكون:

$$t\left\|\vec{u}\right\|=\left\|\vec{v}\right\|\cos\theta \qquad (1)\cdots$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\begin{aligned} f(t)&=\left(\vec{v}-t\vec{u}\right)\cdot\left(\vec{v}-t\vec{u}\right)\\ &=\left\|\vec{v}\right\|^2+t^2\left\|\vec{u}\right\|^2-2t\,\vec{v}\cdot\vec{u}\end{aligned}$$

وهذه عبارة تربيعية في المتحول t تبلغ أصغر قيمة لها عندما $t=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|^2}$. بالتعويض في (1) نجد:

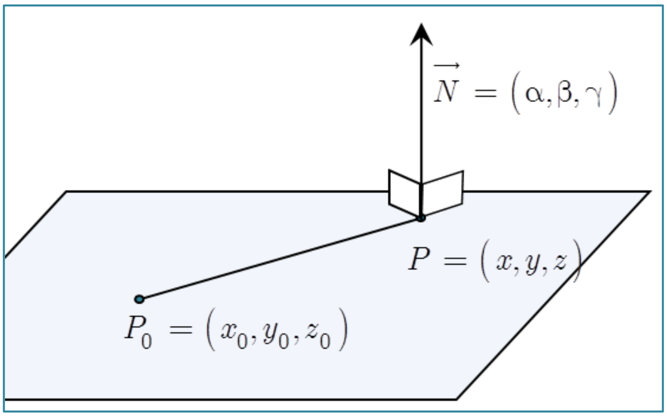
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\cos\theta$$

معادلة مستوي

ليكن M مستوياً وليكن الشعاع $\overrightarrow{N}=\left(\alpha,\beta,\gamma\right)$ عمودياً على M ولتكن النقطة $P_0=\left(x_0,y_0,z_0\right)$ من المستوي M.

نريد تعيين معادلة المستوي M الديكارتية. إنّ النقطة $P=\left(x,y,z\right)$ تنتمي إلى M إذا وفقط إذا كان $\overrightarrow{P_0P}\perp\overrightarrow{N}$ أي:

$$\overrightarrow{P_0P}\cdot\overrightarrow{N}=0$$



بالتعويض نجد $\left(x-x_0, y-y_0, z-z_0\right)\cdot\left(\alpha,\beta,\gamma\right)=0$ ومنه: $\alpha x+\beta y+\gamma z=\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0$ أي أنّ معادلة المستوي تكون من الشكل:

$$\boxed{\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta}$$

حيث $\delta=\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0$ ثابت.

<u>مثال1</u>:

عين معادلة المستوي المار بالنقطة $\left(1,-1,2\right)$ والذي يعامد الشعاع $\left(1,1,4\right)$.

الحل: نعلم مما سبق أنّ المعادلة من الشكل $1\cdot x+1\cdot y+4\cdot z=\delta$ بالتعويض باحداثيات النقطة $\left(1,-1,2\right)$ نجد قيمة الثابت δ أي أنّ المعادلة المطلوبة هي: $x+y+4z=8$.

<u>مثال2</u>:

عين معادلة المستوي المار بالنقاط $\left(1,-1,2\right)$ و $\left(1,1,0\right)$ و $\left(-2,0,3\right)$.

الحل: نعلم مما سبق أنّ المعادلة من الشكل $\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\gamma\cdot z=\delta$ بالتعويض باحداثيات النقاط المعطاة نجد:

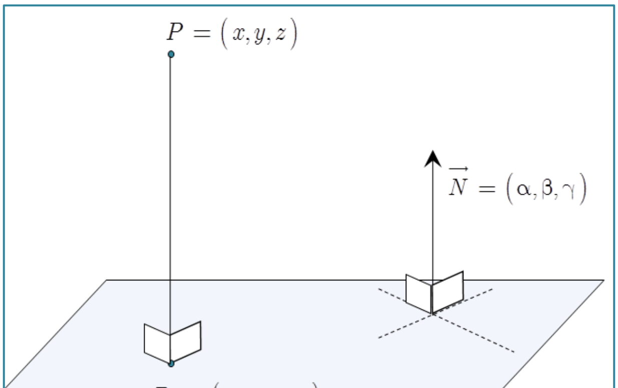
$$\alpha-\beta+2\gamma=\delta$$
$$\alpha+\beta=\delta$$
$$-2\alpha+3\gamma=\delta$$

نحسب α,β,γ بدلالة δ فنجد: $\gamma=\frac{3}{5}\delta \quad \beta=\frac{3}{5}\delta \quad \alpha=\frac{2}{5}\delta$.

بالتعويض في معادلة المستوي والاختصار نجد المعادلة المطلوبة: $2x+3y+3z=5$.

<u>المسافة بين نقطة ومستوي</u>

ليكن M مستوياً معادلته $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$. أي أنّ الشعاع $N=\left(\alpha,\beta,\gamma\right)$ عمودي على M. ولتكن النقطة $P=\left(x,y,z\right)$ في الفراغ. ولتكن النقطة $P_0=\left(x_0,y_0,z_0\right)$ المسقط القائم للنقطة P على المستوي M كما هو موضح في الرسم.



بالطبع يكون الشعاع $\overrightarrow{PP_0}$ موازياً للشعاع $\vec{N}$ أي يوجد $\lambda\in\mathbb{R}$ بحيث: $\overrightarrow{PP_0}=\lambda\cdot\vec{N}$. أي أنّ:

$$\left(x_0-x, y_0-y, z_0-z\right)=\lambda\cdot\left(\alpha,\beta,\gamma\right)$$

أي أنّ المجاهيل x_0,y_0,z_0 تحقق جملة المعادلات:

$$x_0-x=\lambda\alpha$$
$$y_0-y=\lambda\beta$$
$$z_0-z=\lambda\gamma$$

وبما أنّ $\left(x_0, y_0, z_0\right) \in M$ فلدينا المعادلة:

$$\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 = \delta$$

من المعادلات الأربعة السابقة نستنتج:

$$\lambda = \frac{\delta - \left(\alpha x + \beta y + \gamma z\right)}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

كذلك نجد:

$$\sqrt{\left(x_0 - x\right)^2 + \left(y_0 - y\right)^2 + \left(z_0 - z\right)^2} = \left|\lambda\right| \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

ومنه نستنتج المسافة بين النقطة P والمستوي M:

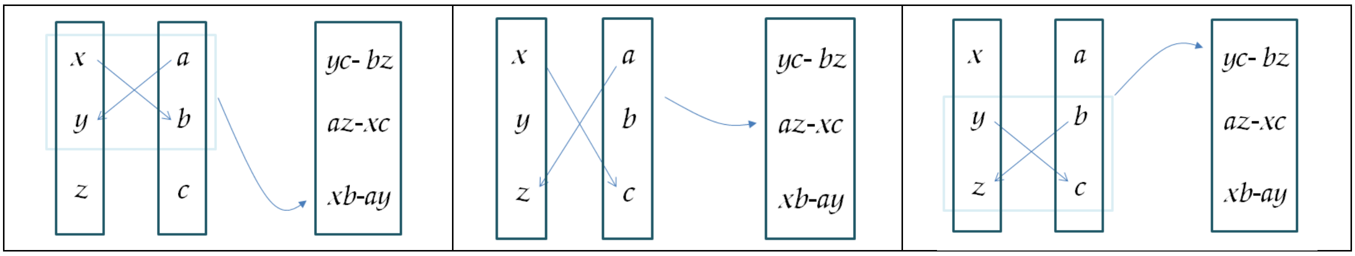
$$\boxed{L\left[PP_0\right] = \frac{\left|\alpha x + \beta y + \gamma z - \delta\right|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}}$$

الجداء الخارجي لشعاعين

ليكن $\vec{u} = \left(x, y, z\right)$ و $\vec{v} = \left(a, b, c\right)$. نعرّف الجداء الخارجي لهذين الشعاعين على أنّه الشعاع:

$$\boxed{\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\ yc - bz,\ \ az - xc,\ \ xb - ay\right)}$$

لتذكر كيفية حساب الجداء الخارجي نستخدم الرسوم التالية:



نترك للطلاب كذلك التحقق من الخواص التالية:

- إذا كان $\lambda \in \mathbb{R}$ عدداً حقيقياً فلدينا:

$$\vec{u} \wedge \left(\lambda \vec{v}\right) = \lambda \cdot \vec{u} \wedge \vec{v}$$
$$\left(\lambda \vec{u}\right) \wedge \vec{v} = \lambda \cdot \vec{u} \wedge \vec{v}$$

أي يمكننا "إخراج العدد λ من الجداء".

- إذا كان $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ثلاثة أشعة فلدينا:

$$\vec{u} \wedge \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) + \left(\vec{u} \wedge \vec{w}\right)$$

أي أنّ الجداء الخارجي يتوزع على جمع الأشعة.

- الجداء الخارجي غير تبديلي، في الواقع لدينا: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- لدينا كذلك: $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{o}$ و $\vec{o} \wedge \vec{u} = \vec{o}$

- إنّ $\vec{v} \wedge \vec{u}$ شعاع يعامد كلاً من الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ للتحقق من ذلك احسب مثلاً الجداء السلمي التالي وتأكد أن معدوم:

$$\vec{u} \cdot \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right)$$

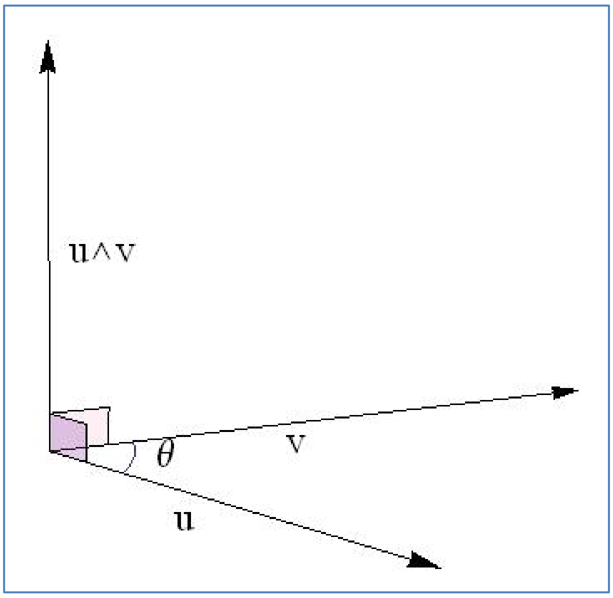
- لدينا العلاقة $\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2 \cdot \left\|\vec{u}\right\|^2 = \left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\|^2$.

إنّ إثبات هذه العلاقة يتطلب بعض الصبر على الحسابات الطويلة، ولكننا نشجع الطلاب على القيام بها.

- نظيم الشعاع $\vec{u} \wedge \vec{v}$ يساوي جداء نظميي $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بجيب الزاوية θ بينهما:

$$\left\|\vec{u} \wedge \vec{v}\right\| = \left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\| \cdot \sin\theta$$

تنتج هذه العلاقة عن الخاصة السابقة، أثبت ذلك.



تدريبات

تدريب 1

احسب نظيم كلٍ من الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ وجيب تمام الزاوية بينهما في كل من الحالات التالية:

$\vec{u}=(2,3,1)$ $\quad$ $\vec{v}=(1,1,-1)$

$\vec{u}=(1,0,-1)$ $\quad$ $\vec{v}=(3,5,3)$

$\vec{u}=(1,0,-1)$ $\quad$ $\vec{v}=(3,0,-3)$

$\vec{u}=(2,3,1)$ $\quad$ $\vec{v}=(-4,-6,-2)$

تدريب 2

احسب الجداء الخارجي الشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ وجيب الزاوية بينهما في كل من الحالات التالية:

$\vec{u}=(2,3,1)$ $\quad$ $\vec{v}=(1,1,-1)$

$\vec{u}=(1,0,-1)$ $\quad$ $\vec{v}=(3,5,3)$

$\vec{u}=(1,0,-1)$ $\quad$ $\vec{v}=(2,0,-2)$

تدريب 3

عيّن معادلة المستوي M في كل من الحالات التالية:

- M يمر بالنقاط $(1,1,1)$ و $(2,0,1)$ و $(-1,0,2)$.
- M يمر بالنقطة $(2,0,1)$ ويعامد الشعاع $\vec{N}=(1,2,2)$.
- M يوازي المستوي XOZ ويمر بالنقطة $(2,2,3)$.

تدريب 4

ليكن M المستوي الذي معادلته $x-2y+3z=1$. عيّن شعاعاً $\vec{N}$ عامودياً على هذا المستوي.

لتكن النقطة $P=(1,2,3)$. ليكن P_0 المسقط القائم للنقطة P على المستوي M. ما العلاقة بين الشعاعين $\overrightarrow{P_0P}$ و $\vec{N}$؟

استنتج احداثيات P_0.

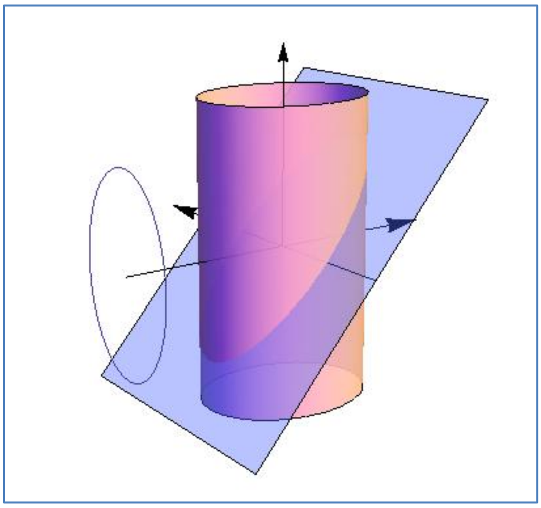
تدريب 5

ليكن D المستقيم الموازي للشعاع $\vec{u}=(1,1,1)$ والمار بالنقطة $P_0=(2,0,1)$. ولتكن $P=(x,y,z)$ نقطة من الفراغ.

لنرمز $P_1=(x_1,y_1,z_1)$ للمسقط القائم للنقطة P على المستقيم D.

1. ما العلاقة بين الشعاعين $\vec{u}$ و $\overrightarrow{P_0P_1}$؟
2. ما العلاقة بين الشعاعين $\vec{u}$ و $\overrightarrow{PP_1}$؟
3. احسب احداثيات P_1 بدلالة x,y,z.
4. استنتج بعد النقطة P عن المستقيم M بدلالة x,y,z.
5. أخيراً اكتب معادلة السطح الاسطواني الذي محوره D ونصف قطره 1.

تدريب 6



اكتب معادلة M السطح الاسطواني الذي محوره OZ ونصف قطره 1. نقطع السطح بالمستوي $z = 2x$ ولنرمز E لمجموعة نقاط التقاطع ولنرمز E' لمسقط E على المستوي YOZ. اكتب معادلة E' وبيّن أنّه قطع ناقص.

تدريب 7

ليكن M_1 المستوي الذي معادلته $2x+y+z=1$. وليكن M_2 المستوي الذي معادلته $-x-y+2z=1$. لنرمز D للمستقيم الناتج عن تقاطع المستويين السابقين.

1. عيّن نقطتين مختلفتين P_1 و P_2 من المستقيم D.
2. لتكن $P=\left(x,y,z\right)$ نقطة من الفراغ و P_0 مسقطها القائم على المستقيم D. ما قيمة الجداء السلمي:

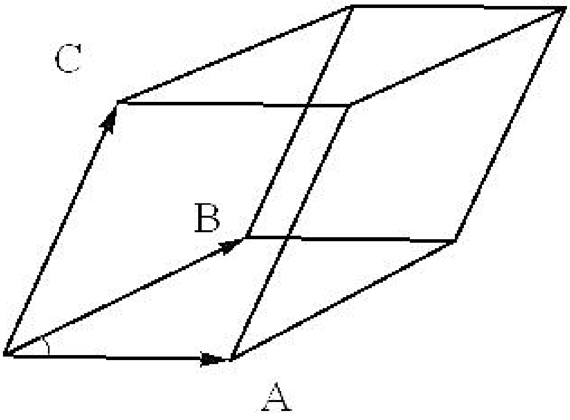
$$\left(P-P_0\right)\cdot\left(P_2-P_1\right)$$

3. استنتج احداثيات المسقط P_0 بدلالة المتحولات x,y,z.

تدريب 8

لتكن A,B,C ثلاثة نقاط في الفراغ. ولتكن النقطة D بحيث $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.

1. أثبت أنّ مساحة متوازي الأضلاع $OADB$ تعطى بالعلاقة: $S=\left\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|$.
2. اكتب رؤوس متوازي السطوح المرسوم في الشكل بشكل مجموع أشعة.
3. أثبت أنّ حجم متوازي السطوح هذا يساوي: $V=\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{OC}$.



تدريب 9

لتكن $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ ثلاثة أشعة في الفراغ. أثبت العلاقة:

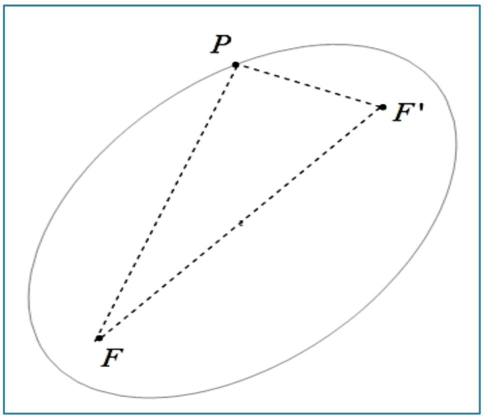
$$\vec{w}\wedge\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)=\left(\vec{w}\cdot\vec{v}\right)\vec{u}-\left(\vec{w}\cdot\vec{u}\right)\vec{v}$$

القطع الناقص

لتكن F و F' نقطتين مختلفتين في المستوي ولتكن المسافة بينهما $L[FF'] = 2c$. وليكن العدد الحقيقي الموجب a $c < a$.

نسمي قطعاً ناقصاً محرقيه F و F' ونصف قطره الرئيسي a مجموعة النقاط P من المستوي التي تحقق:

$$L[PF] + L[PF'] = 2a$$



نسمي المستقيم المار بالمحرقين $\overline{FF'}$ المحور المحرقي أو المحور الرئيسي للقطع الناقص.

نسمي محور القطعة $\overline{FF'}$ المحور اللامحرقي أو المحور الثانوي للقطع الناقص.

نسمي النقطة M_0 منتصف القطعة $\overline{FF'}$ مركز القطع.

نسمي العدد c البعد المحرقي للقطع وهو البعد بين أحد المحرقين والمركز M_0 .

نسمي العدد a نصف القطر الرئيسي للقطع ونسمي العدد $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ نصف القطر الثانوي للقطع.

نسمي نقاط تقاطع القطع مع محوريه ذرى القطع الناقص.

حالة خاصة: معادلة قطع ناقص محوراه يوازيان محاور الاحداثيات

ليكن E قطعاً ناقصاً محوراه يوازيان محاور الاحداثيات ومركزه $M_0 = (x_0, y_0)$. إنّ معادلة E الديكارتية تكون من الشكل:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{r_1^2} + \frac{(y - y_0)^2}{r_2^2} = 1}$$

حيث r_1 و r_2 عددان موجبان تماماً.

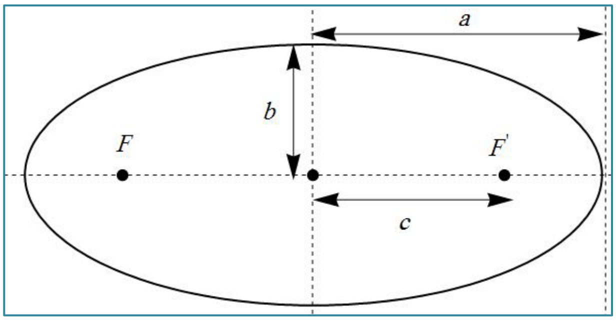
إذا كان $r_1 > r_2$ فإنّ المحور الرئيسي للقطع يكون أفقياً ويكون r_1 نصف القطر الرئيسي و r_2 نصف القطر الثانوي.

إذا كان $r_2 > r_1$ فإنّ المحور الرئيسي للقطع يكون عامودياً ويكون r_2 نصف القطر الرئيسي و r_1 نصف القطر الثانوي.

أي بشكل عام لدينا $a = \max(r_1, r_2)$ و $b = \min(r_1, r_2)$.

ويكون لدينا $a^2 = b^2 + c^2$ حيث c يمثل البعد المحرقي.

قطع ناقص محوره الرئيسي أفقي



التمثيل الوسيطي للقطع الناقص

ليكن E قطعاً ناقصاً محوراه يوازيان محاور الاحداثيات ومركزه $M_0 = \left(x_0, y_0\right)$ ومعادلته الديكارتية:

$$\frac{\left(x - x_0\right)^2}{r_1^2} + \frac{\left(y - y_0\right)^2}{r_2^2} = 1$$

حيث r_1 و r_2 عددان موجبان تماماً.

لتكن $P = \left(x, y\right)$ نقطة من القطع. نعلم أنّه يوجد عدد وحيد $\theta \in \left[0, 2\pi\right[$ يحقق:

$$\frac{x - x_0}{r_1} = \cos\theta \qquad \text{و} \qquad \frac{y - y_0}{r_2} = \sin\theta$$

ومنه نجد:

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x_0 + r_1\cos\theta \\ y = y_0 + r_2\sin\theta \end{array}}$$

لاحظ أنّه عندما يعبر المتحول θ المجال $\left[0, 2\pi\right]$ فإنّ النقطة P تعبر القطع مرة واحدة بعكس عقارب الساعة.

نسمي الكتابة السابقة التمثيل الوسيطي للقطع الناقص ونسمي المتحول θ وسيطاً.

مساحة القطع الناقص

ليكن E قطعاً ناقصاً نصفا قطريه aو b. إنّ مساحة القطع E تعطى بالعلاقة $\boxed{S = \pi \cdot a \cdot b}$.

تدريبات

تدريب1

اكتب معادلة القطع الناقص الذي مركزه $(2,-1)$ ومحوره الرئيسي أفقي ونصفا قطريه 3 و 1.

عيّن معادلة كلٍ من محوريه وعيّن الذرى.

تدريب2

اكتب معادلة القطع الناقص الذي محرقيه $(2,-1)$ و $(2,4)$ ونصف قطره الرئيسي 6.

عيّن معادلة كلٍ من محوريه وعيّن الذرى والمركز.

تدريب3

اكتب معادلة القطع الناقص الذي محرقيه $(1,1)$ و $(3,1)$ والمار بالنقطة $\left(\frac{5}{2},1+\sqrt{\frac{7}{8}}\right)$.

عيّن معادلة كلٍ من محوريه وعيّن الذرى والمركز.

تدريب4

لتكن E مجموعة نقاط المستوي (x,y) التي تحقق $x^2-4x+2y^2+4y=3$.

بالاتمام إلى مربعات كاملة أثبت أنّ E قطع ناقص وعيّن عناصره.

تدريب5

1. ليكن D_1 المستقيم الذي معادلته $3x+y=1$ و D_2 المستقيم الذي معادلته $x-3y=0$. بيّن تعامد هذين المستقيمين.
2. لتكن $P=(x,y)$ نقطة من المستوي. عيّن المسافة بين P و D_1 بدلالة المتحولين x و y. كذلك عيّن المسافة بين P و D_2 بدلالة المتحولين x و y.
3. ليكن E القطع الناقص الذي محوره الرئيسي D_1 ومحوره الثانوي D_2 ونصفا قطريه 2 و 1. بالاستعانة بالطلب السابق اكتب معادلة E.

تدريب6

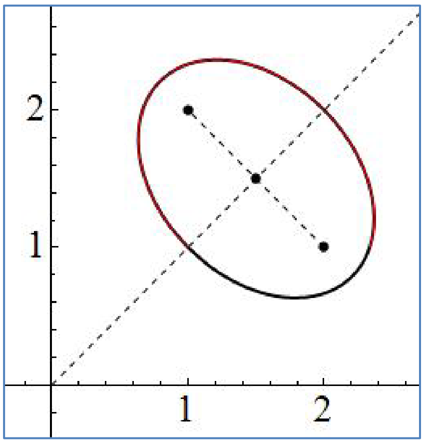
لتكن النقطتان $F=(1,2)$ و $F'=(2,1)$. نعرّف القطع الناقص E المكون من النقاط P حيث:

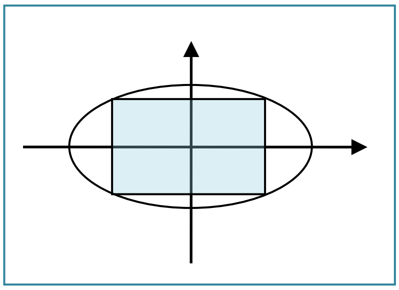
$$L[PF]+L[PF']=1$$

اكتب المعادلة الديكارتية للقطع E وعيّن نصفي قطريه ثم ارسمه.

عيّن معادلة كلٍ من المحورين ثم عيّن ذرى القطع E وذلك بدراسة تقاطعه مع المحورين. قارن مع الرسم المجاور.

عيّن معادلة المماسين الأفقيين للقطع E.





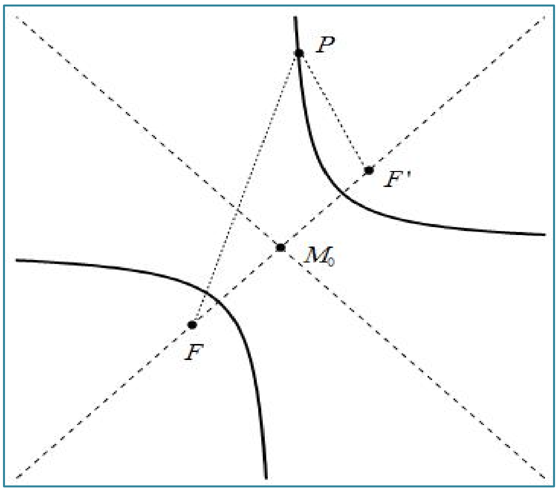
تدريب 7

في الشكل المجاور قطع ناقص معادلته $x^2 + 2y^2 = 1$.

ما مساحة أكبر مستطيل رؤوسه واقعة على القطع وأضلاعه موازية للمحاور؟

القطع الزائد

لتكن F و F' نقطتين مختلفتين في المستوي. وليكن $L\left[FF'\right]=2c$. وليكن العدد الحقيقي الموجب a حيث $0<a<c$.



نعرّف القطع الزائد الذي محرقاه F و F' ونصف قطره الرئيسي a على أنّه مجموعة النقاط P من المستوي التي تحقق:

$$\left|L\left[PF\right]-L\left[PF'\right]\right|=2a$$

أي أنّ الفرق بين بعدي النقطة P عن كلٍ من المحرقين ثابت.

نسمي المستقيم المار بالمحرقين $\overline{FF'}$ المحور الرئيسي أو المحور المحرقي للقطع الزائد.

نسمي محور القطعة $\overline{FF'}$ المحور الثانوي أو اللامحرقي للقطع الزائد.

نسمي النقطة M_0 منتصف القطعة $\overline{FF'}$ مركز القطع.

نسمي c البعد المحرقي للقطع.

نسمي نقطتي تقاطع المحور الرئيسي مع القطع ذروتي القطع الزائد وتكون المسافة بين الذروتين $2a$.

نسمي المسافة a بين المركز وإحدى الذروتين نصفَ القطر الرئيسي للقطع.

أخيراً نعرّف العدد $b=\sqrt{c^2-a^2}$ أي أنّ $a^2+b^2=c^2$.

حالة خاصة: معادلة قطع زائد محوراه يوازيان محاور الاحداثيات

- ليكن E قطعاً زائداً محوره الرئيسي أفقي ومركزه $M_0=\left(x_0,y_0\right)$ وبعده المحرقي c ونصف قطره الرئيسي a .

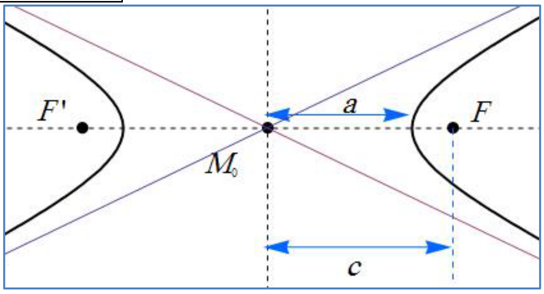
إنّ معادلة E الديكارتية تكون من الشكل:

$$\boxed{\frac{\left(x-x_0\right)^2}{a^2}-\frac{\left(y-y_0\right)^2}{b^2}=1}$$

لهذا القطع مستقيمان مقاربان نحصل على معادلتيهما بحذف الطرف الأيمن من المعادلة السابقة:

$$\boxed{b\left(x-x_0\right)=\pm a\left(y-y_0\right)}$$

في الشكل المجاور: قطع زائد محوره الرئيسي أفقي



- ليكن E قطعاً زائداً محوره الرئيسي عامودي ومركزه $M_0=\left(x_0,y_0\right)$ وبعده المحرقي c ونصف قطره الرئيسي a .

إنّ معادلة E الديكارتية تكون من الشكل:

$$\boxed{\frac{\left(y-y_0\right)^2}{a^2}-\frac{\left(x-x_0\right)^2}{b^2}=1}$$

لهذا القطع مقاربان نحصل على معادلتيهما بحذف الطرف الأيمن من المعادلة السابقة:

$$\boxed{a\left(x-x_0\right)=\pm b\left(y-y_0\right)}$$

تدريب1

اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه $\left(2,-1\right)$ ومحوره الرئيسي أفقي ونصف قطره الرئيسي $a=3$ وبعده المحرقي $c=4$.
عيّن معادلة كلٍ من محوريه وعيّن الذروتين. اكتب معادلة كلٍ من مقاربيه.

تدريب2

اكتب معادلة القطع الزائد الذي محرقيه $\left(2,-1\right)$ و $\left(2,4\right)$ نصف قطره الرئيسي $a=2$.
عيّن معادلة كلٍ من محوريه وعيّن الذروتين والمركز. اكتب معادلة كلٍ من مقاربيه.

تدريب3

اكتب معادلة القطع الزائد الذي محرقيه $\left(1,1\right)$ و $\left(3,1\right)$ والمار بالنقطة $\left(3,1+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)$.
عيّن معادلة كلٍ من محوريه وعيّن الذروتين والمركز. اكتب معادلة كلٍ من مقاربيه.

تدريب4

لتكن H مجموعة نقاط المستوي $\left(x,y\right)$ التي تحقق $x^2-4x-4y^2+8y=3$.
بالاتمام إلى مربعات كاملة أثبت أنّ H قطع زائد وعيّن عناصره. اكتب معادلة كلٍ من مقاربيه.

تدريب5

اكتب معادلة القطع الزائد الذي محوره الرئيسي أفقي ومقاربيه $y=2x-1$ و $y=-2x+3$ ونصف قطره الرئيسي $a=2$.

تدريب6

1. ليكن D_1 المستقيم الذي معادلته $3x+2y=1$ و D_2 المستقيم الذي معادلته $2x-3y=0$. بيّن تعامد هذين المستقيمين.
2. لتكن $P=\left(x,y\right)$ نقطة من المستوي. عيّن المسافة بين P و D_1 بدلالة المتحولين x و y. كذلك عيّن المسافة بين P و D_2 بدلالة المتحولين x و y.
3. ليكن H القطع الزائد الذي محوره الرئيسي D_1 ومحوره الثانوي D_2 ونصف قطره الرئيسي 2 وبعده الحرقي 3.
بالاستعانة بالطلب السابق اكتب معادلة H.

تدريب7

لتكن F و F' نقطتين مختلفتين في المستوي. وليكن $L\left[FF'\right]=2c$. وليكن العدد الحقيقي الموجب a حيث $0<a<c$.
ليكن H القطع الزائد الذي محرقاه F و F' ونصف قطره الرئيسي A. أي أنّ H هو مجموعة النقاط P من المستوي التي تحقق:

$$\left|L\left[PF\right]-L\left[PF'\right]\right|=2a$$

نعرّف H_1 مجموعة النقاط P من المستوي التي تحقق:

$$L\left[PF\right]-L\left[PF'\right]=2a$$

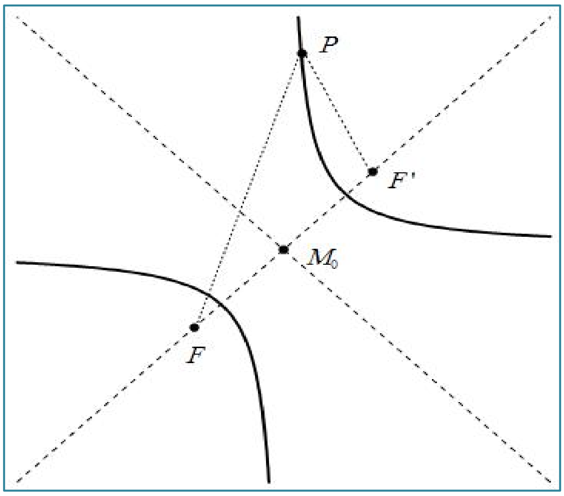
ونعرّف H_2 مجموعة النقاط P من المستوي التي تحقق:

$$L\left[PF\right]-L\left[PF'\right]=-2a$$

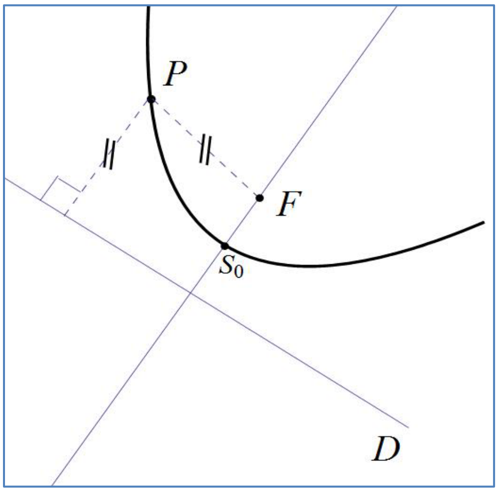
ونعرّف H_0 مجموعة النقاط P من المستوي التي تحقق:

$$L\left[PF\right] - L\left[PF'\right] = 0$$

ما التمثيل الهندسي لكلٍّ من المجوعات H_1 و H_2و H_0 ؟



القطع المكافئ



لتكن F نقطة في المستوي. وليكن D مستقيماً لا يمر بـ F. نعرّف القطع المكافئ الذي محرقه F ودليله D على أنّه مجموعة النقاط P من المستوي التي يتساوى بعدها عن D مع بعدها عن F.

نسمي المستقيم المار بالمحرق F والعمودي على الدليل D محور القطع المكافئ.

لتكن $2c$ المسافة بين المحرق F والدليل D. نسمي العدد c البعد المحرقي للقطع المكافئ.

النقطة S_0 حيث يتقاطع المحور مع القطع المكافئ تسمى ذروة القطع .

نعرّف جهة تقعر القطع المكافئ على أنها جهة الشعاع $\overrightarrow{S_0F}$.

حالة خاصة: معادلة قطع مكافئ محوره عمودي

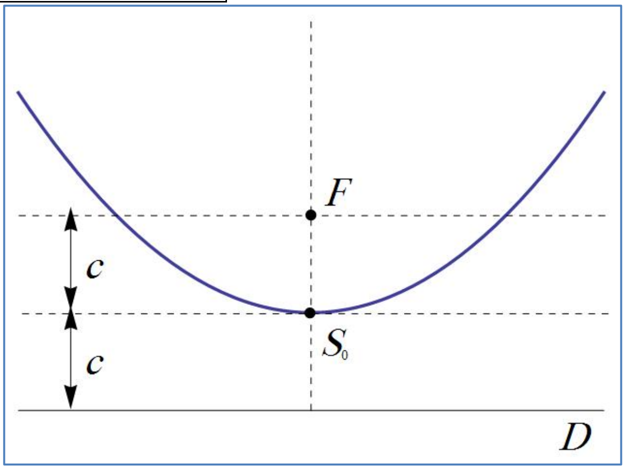
- ليكن E قطعاً مكافئاً محوره عمودي وذروته $S_0 = \left(x_0, y_0\right)$ وبعده المحرقي c وجهة تقعره نحو الأعلى.

إنّ معادلة E الديكارتية تكون من الشكل:

$$\boxed{4c\left(y - y_0\right) = \left(x - x_0\right)^2}$$

أما إذا كان التقعر نحو الأسفل فتكون المعادلة:

$$\boxed{-4c\left(y - y_0\right) = \left(x - x_0\right)^2}$$



في الشكل المجاور :

قطع مكافئ محوره عمودي وتقعره نحو الأعلى

- ليكن E قطعاً مكافئاً محوره أفقي وذروته $S_0 = \left(x_0, y_0\right)$ وبعده المحرقي c وجهة تقعره نحو اليمين.

إنّ معادلة E الديكارتية تكون من الشكل:

$$\boxed{4c\left(x - x_0\right) = \left(y - y_0\right)^2}$$

أما إذا كان التقعر نحو اليسار فتكون المعادلة:

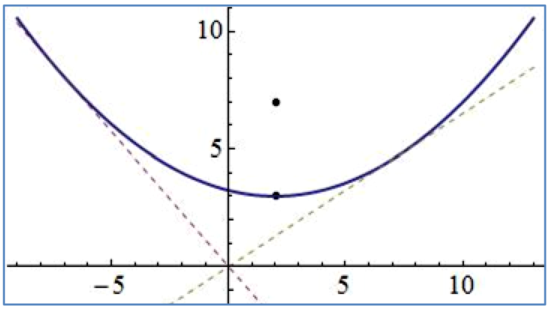
$$\boxed{-4c\left(x - x_0\right) = \left(y - y_0\right)^2}$$

تدريبات

تدريب 1

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي محرقه $\left(2,-1\right)$ ودليله هو المستقيم $x=-1$.
عيّن معادلة المماس لهذا القطع في النقطة التي فاصلتها 3.

تدريب 2

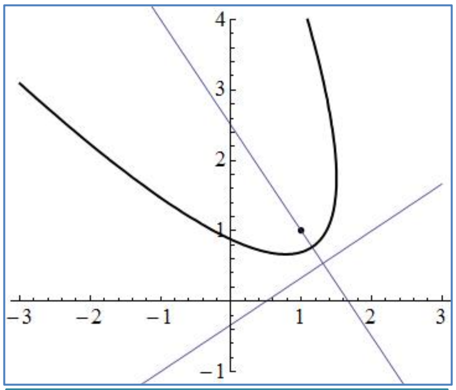


اكتب معادلة القطع المكافئ الذي ذروته $\left(2,3\right)$ ومحوره شاقوليّ وتقعره نحو الأعلى وبعده المحرقي 4 .
عيّن معادلتي المماسين للقطع السابق الذين يمران في النقطة $\left(0,0\right)$.
ارسم القطع والمماسين ثم قارن مع الشكل المجاور.

تدريب 3

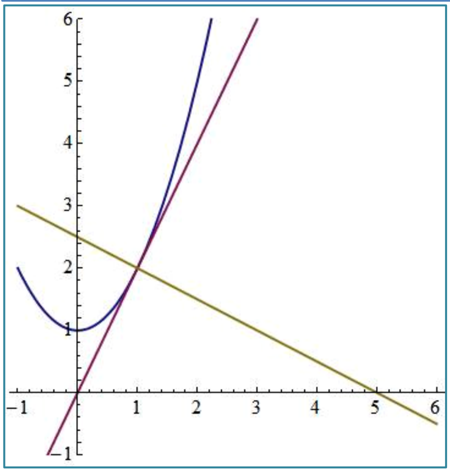
لتكن H مجموعة نقاط المستوي $\left(x,y\right)$ التي تحقق $4x^2-4x+2y=3$.
بالاتمام إلى مربعات كاملة أثبت أنّ H قطع مكافئ وعيّن عناصره.

تدريب 4



ليكن D المستقيم الذي معادلته $2x-3y=1$ ولتكن F النقطة $\left(1,1\right)$.
اكتب المسافة بين نقطة $P=\left(x,y\right)$ من المستوي وكلٍ من المستقيم D والنقطة F وذلك بدلالة المتحولين x,y . استنتج معادلة القطع المكافئ الذي محرقه F ودليله D . عينّ ذروة ومحور القطع. ارسم وقارن مع الرسم المجاور.

تدريب 5



ليكن A القطع المكافئ الذي معادلته $y=x^2+1$. ولتكن النقطة $a=\left(5,0\right)$. عيّن النقطة b من القطع A التي تبعد أصغر مسافة عن a .
اكتب معادلة المماس في b وأثبت أنّه يعامد المستقيم $\overline{ab}$. ارسم وقارن نتائجك مع الرسم المجاور.

تدريب 6

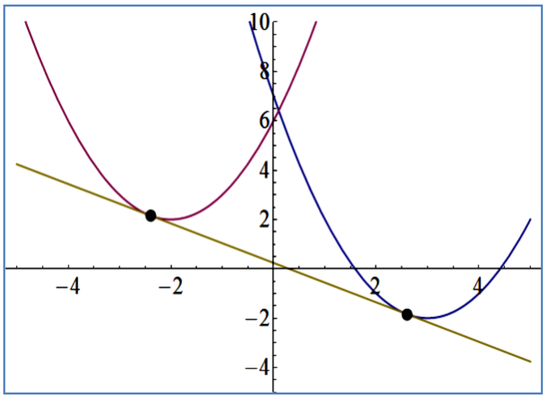
عيّن المسافة بين النقطة $a=\left(2,1\right)$ وأقرب نقطة إليها من نقاط القطع المكافئ $y=x^2+\frac{1}{2}$.

تدريب 7

أوجد معادلة المماس المشترك للقطعين المكافئين التاليين:

$$y = x^2 - 6x + 7$$
$$y = x^2 + 4x + 6$$

قارن إجاباتك مع الرسم المجاور.

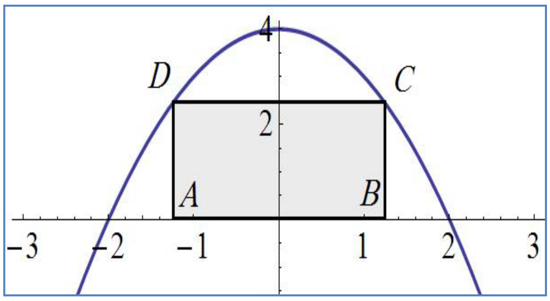


تدريب 8

ليكن E القطع المكافئ الذي معادلته: $y = 4 - x^2$.

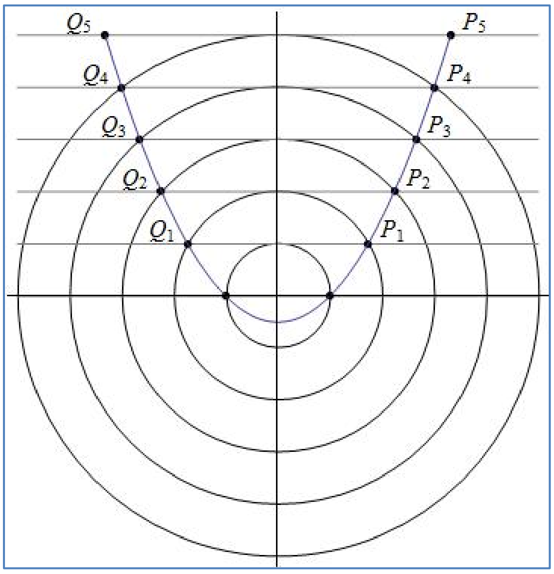
عيّن مساحة أكبر مستطيل $ABCD$ضلعه AB على المحور OX ورأساه C و D واقعان على القطع E نفسه وفوق المحور OX.

انظر الشكل.



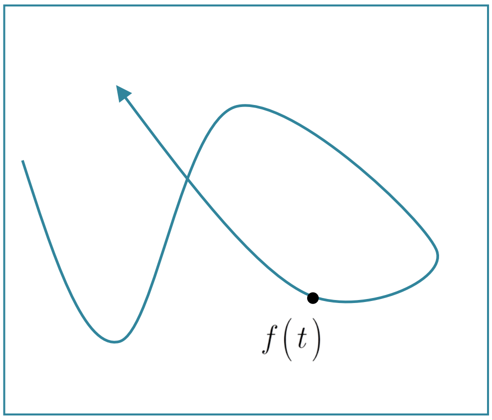
تدريب 9 انشاء نقاط من قطع مكافئ

ليكن $0 < a$. نرسم دوائراً مركزها المبدأ O وأنصاف أقطارها $a, 2a, 3a, 4a$... كما هو مبيّن في الشكل. من نقطة تلاقي الدائرة رقم k مع المحور $\overrightarrow{OY}$ ننشئ مماساً لهذه الدائرة أي مستقيماً يوازي $\overrightarrow{OX}$. لتكن P_k و Q_k نقطتي تقاطع المماس السابق مع الدائرة التالية أي رقم $k+1$. أثبت أنّ النقاط P_1, P_2, P_3... و $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ تقع على قطع مكافئ محوره OY وتقعره نحو الأعلى. عيّن معادلة هذا القطع ومحرقه وذروته ودليله.



المسارات أو المنحنيات الوسيطية

المسارات في المستوي



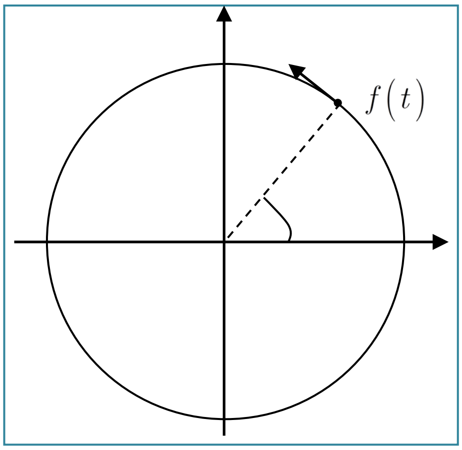
بشكل عام، نسمي مساراً (أو منحنياً وسيطياً) في المستوي أي تابع من الشكل:

$$f(t)=\big(X(t),Y(t)\big)$$

حيث t متحول حقيقي نسميه الوسيط أما X و Y فهما تابعان حقيقيان مستمران.

إنّ المسار f يربط بكل عدد t نقطةً $f(t)$ من المستوي.

بصياغة أخرى: إنّ إحداثيي النقطة $f(t)$ يتعلقان بالمتحول t. يمكننا إذاً تخيل المسار f على أنّه وصف لحركة نقطة مادية حيث يمثل المتحول t الزمن ويمثل الشعاع $f(t)$ موقع النقطة المادية في اللحظة t.

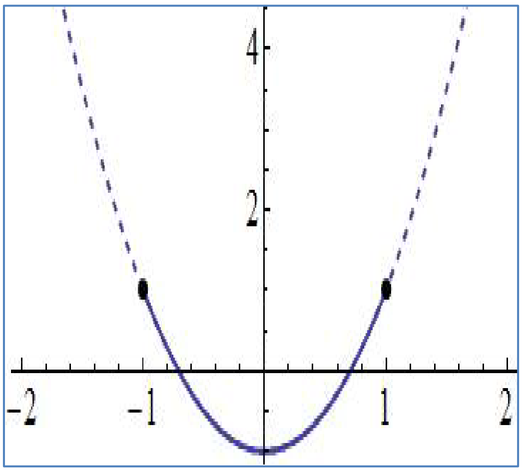


مثال1:

لنضع $f(t)=(\cos t,\sin t)$ حيث $t\in\mathbb{R}$. أي أنّ:

$$Y(t)=\sin t \qquad \text{و} \qquad X(t)=\cos t$$

من الواضح أنّ $X^2(t)+Y^2(t)=1$ وذلك أياً كان t. أي أنّ النقطة $f(t)$ تقع على الدائرة التي مركزها المبدأ ونصف قطرها 1. لاحظ أنّ النقطة $f(t)$ تتحرك على محيط الدائرة السابقة بالاتجاه الموجب للدوران وتُتِم دورةً كاملة كلما عبر المتحول t مجالاً طوله 2π.



مثال2:

لنضع $f(t)=(\cos t,\cos 2t)$ حيث $t\in\mathbb{R}$. أي أنّ:

$$Y(t)=\cos 2t \qquad \text{و} \qquad X(t)=\cos t$$

من الواضح أنّ $Y(t)=2X^2(t)-1$ وذلك أياً كان t. أي أنّ النقطة $f(t)$ تقع على القطع المكافئ الذي معادلته $y=2x^2-1$.

ولكن النقطة $f(t)$ لا تمسح القطع السابق كله لأنّ قيمة الاحداثي $X(t)$ تبقى محصورة بين -1 و $+1$:

$$-1\le X(t)=\cos t\le 1$$

إنّ النقطة $f(t)$ تتحرك جيئة وذهاباً على القطع المكافئ السابق بين النقطتين $(1,1)$ و $(-1,1)$ كما هو موضّح في الرسم.

مثال3:

لنضع $f(t)=\left(t+1,\sqrt{4-t^2}\right)$. إنّ هذا المسار معرف فقط عندما $t\in[-2,2]$. ولدينا:

$$Y(t)=\sqrt{4-t^2} \qquad \text{و} \qquad X(t)=t+1$$

لنبحث عن علاقة تربط الإحداثيين $X(t)$ و $Y(t)$ وذلك بحذف الوسيط t. لهذا الغرض نعزل t بدلالة $X(t)$ مثلاً فنجد:

$$t = X(t) - 1$$

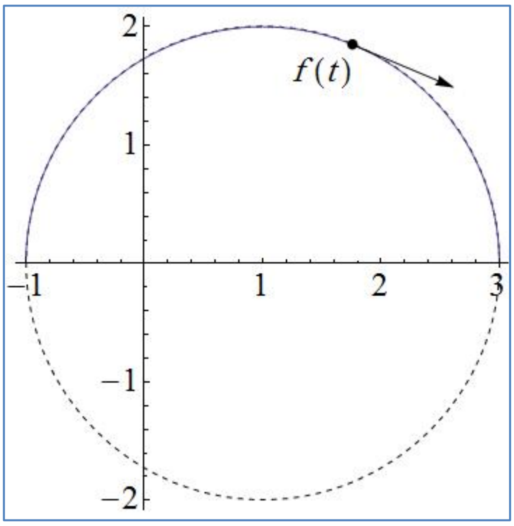
ثمّ نعوّض في صيغة $Y(t)$ فنجد:

$$Y(t) = \sqrt{4 - (X(t)-1)^2}$$

بالتربيع نحصل على العلاقة المطلوبة:

$$Y^2(t) + (X(t)-1)^2 = 4$$

أي أنّ النقطة $f(t)$ تقع على محيط الدائرة التي معادلتها $(x-1)^2 + y^2 = 4$. لكن هل تمسح النقطة $f(t)$ الدائرة كلها؟ إذا نظرنا إلى صيغة الإحداثي $Y(t) = \sqrt{4-t^2}$ نجد أنّ قيمه موجبة دوماً بينما يمسح الإحداثي $X(t) = t+1$ كل القيم في المجال $[-1,3]$. إذاً نستنتج أنّ $f(t)$ يمسح النصف العلوي من الدائرة السابقة فقط وذلك من اليسار إلى اليمين مرةً واحدة.



مثال4:

لنضع $f(t) = (e^t + e^{-t}, e^t - e^{-t})$. هنا $t \in \mathbb{R}$. ولدينا: $X(t) = e^t + e^{-t}$ و $Y(t) = e^t - e^{-t}$.

لنبحث عن علاقة تربط الإحداثيين $X(t)$ و $Y(t)$ وذلك بحذف الوسيط t. لاحظ أنّ مجموع الاحداثيين يساوي:

$$X(t) + Y(t) = 2e^t$$

لاحظ كذلك أنّ الفرق بين الاحداثيين يساوي:

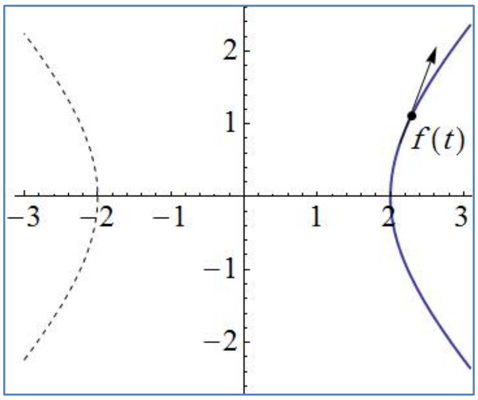
$$X(t) - Y(t) = 2e^{-t}$$

بضرب العلاقتين السابقتين نجد:

$$X^2(t) - Y^2(t) = 4$$

أي أنّ النقطة $f(t)$ تتحرك على قطع زائد معادلته $x^2 - y^2 = 4$. ولكن هل تمسح النقطة $f(t)$ كامل القطع؟ الإجابة بالنفي لأن قيم الاحداثي $X(t) = e^t + e^{-t}$ موجبة تماماً وذلك أياً كانت قيمة المتحول t. بينما يتحول $Y(t)$ من $-\infty$ إلى $+\infty$.

إذاً نستنتج أنّ النقطة $f(t)$ تمسح فرعاً واحداً من فرعي القطع الزائد وهو الفرع الواقع في النصف الأيمن من المستوي.



المسارات في الفراغ

يمكننا تعريف المسارات في الفراغ مثلما عرّفنا المسارات في المستوي، فنسمي مساراً أي تابع من الشكل:

$$f(t) = \big(X(t), Y(t), Z(t)\big)$$

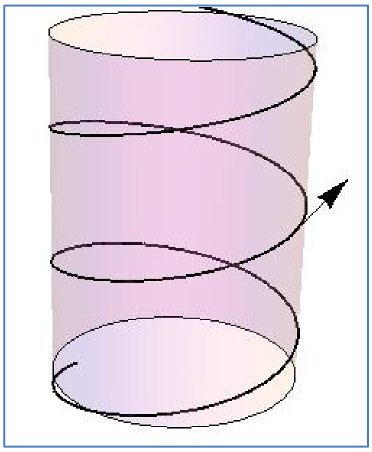
حيث t متحول حقيقي نسميه الوسيط أما X و Y و Z فهي توابع مستمرة. أي أنّنا نربط بكل عدد t نقطةً $f(t)$ من الفراغ.

إنّ إحداثيات النقطة $f(t)$ تتعلق بالمتحول t. يمكننا إذاً تخيل المسار f على أنّه تمثيلٌ لحركة نقطة مادية في الفراغ حيث يمثل المتحول t الزمن ويمثل الشعاع $f(t)$ موقع النقطة المادية في اللحظة t.

مثال1:

لنضع $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$ حيث $t \in \mathbb{R}$. أي أنّ:

$$X(t) = \cos t \qquad Y(t) = \sin t \qquad Z(t) = t$$



من الواضح أنّ $X^2(t) + Y^2(t) = 1$ وذلك أياً كان t. أي أنّ النقطة $f(t)$ تقع على السطح الاسطواني الذي محوره OZ ونصف قطره 1.

لاحظ أنّ مسقط النقطة $f(t)$ على المستوي XOY يعطى بالصيغة:

$$g(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

يتحرك هذا المسقط على محيط الدائرة الواحدية في المستوي XOY وبالاتجاه الموجب للدوران ويُتِم دورةً كاملة كلما عبر المتحول t مجالاً طوله 2π. بينما يزداد الارتفاع بشكل دائم $Z(t) = t$. أي أنّ النقطة $f(t)$ تتحرك بمسار حلزوني على السطح الاسطواني وباتجاه الأعلى كما هو موضّح في الشكل المجاور.

تدريبات

تدريب 1

نعرّف المسار $f(t)=\left(t^2+1,2t^2\right)$ حيث $t\in\mathbb{R}$.

بيّن أنّ النقطة $f(t)$ تتحرك على مستقيم وعيّن معادلة هذا المستقيم. هل تمسح النقطة $f(t)$ المستقيم كله؟

تدريب 2

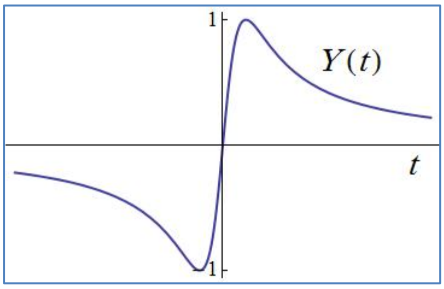
نعرّف المسار $f(t)=\left(\cos t,\cos 3t\right)$ حيث $t\in\mathbb{R}$.

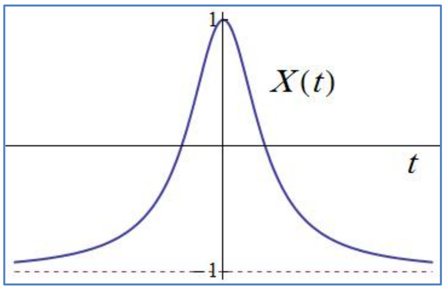
عيّن معادلة المنحني الذي تتحرك عليه النقطة $f(t)$. هل تمسح النقطة $f(t)$ المنحني السابق كله؟ ارسم.

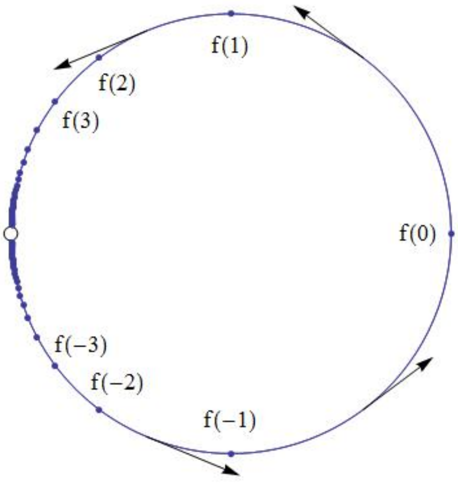
تدريب 3

لنضع $f(t)=\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\dfrac{2t}{1+t^2}\right)$. هنا $t\in\mathbb{R}$. لدينا إذاً: $X(t)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ و $Y(t)=\dfrac{2t}{1+t^2}$.

1. أثبت أنّ النقطة $f(t)$ تتحرّك على الدائرة التي مركزها المبدأ ونصف قطرها 1.
2. ادرس تحولات التابعين X و Y ونظم جدولاً مشتركاً بتحولاتهما. ارسم هذين التابعين. قارن مع الرسمين التاليين.
3. استنتج أنّ $f(t)$ تعبر الدائرة الواحدية باستثناء النقطة $(-1,0)$ وذلك مرة واحدة بالاتجاه الموجب للدوران. في الرسم الأخير مثلنا حركة النقطة $f(t)$ وأشرنا بنقاط إلى الموقع في اللحظات $t=-3,-2,\ldots,2,3$. لاحظ أنّه عندما يسعى الزمن t إلى $\pm\infty$ تكون السرعة صغيرة وتقترب النقطة $f(t)$ من $(-1,0)$.







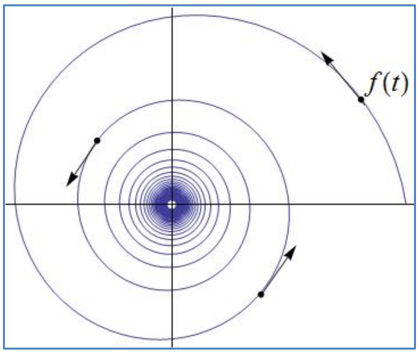
تدريب 4

نعرّف المسار $f(t)=\left(X(t),Y(t)\right)$ حيث: $Y(t)=\sin 2t$ $\quad$ $X(t)=\cos t$

وحيث $t \in [0,2\pi]$. لنرمز M للمجموعة التي تمسحها النقطة $f(t)$.

1. أثبت أنّ M متناظرة بالنسبة للمحور OY أي أنّه إذا كانت $(x,y) \in M$ فإنّ $(-x,y) \in M$.
2. أثبت أنّ M متناظرة بالنسبة للمحور OX أي أنّه إذا كانت $(x,y) \in M$ فإنّ $(x,-y) \in M$.
3. اعزل $Y(t)$ بدلالة $X(t)$ عندما تكون النقطة $(X(t),Y(t)) \in M$ في الربع الأول.
4. استنتج رسم المجموعة M.

تدريب 5



نعرّف المسار $f(t) = \frac{1}{t}(\cos t, \sin t)$ حيث $t \in [2\pi, +\infty[$.

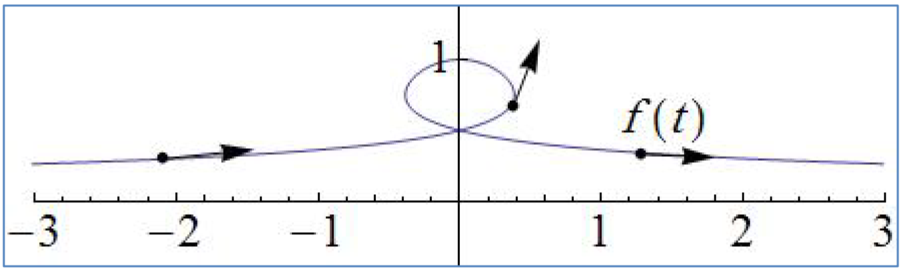
احسب نظيم الشعاع $f(t)$ بدلالة t وبيّن أنّه يتناقص مع الزمن. عيّن زاوية الشعاع $f(t)$ مع المحور $\overrightarrow{OX}$ بدلالة الزمن.

فسّر لماذا يمثّل الرسم التالي المسار f.

تدريب 6

نعرّف المسار $f(t) = \left(t^3 - t, \frac{1}{1+t^2}\right)$ حيث $t \in \mathbb{R}$.

1. ادرس تحولات التابع $X(t)$ وتحولات التابع $Y(t)$ ونظّم جدولاً مشتركاً لهما.
2. حاول توقع مسار النقطة $f(t)$ من الجدول السابق. قارن مع الرسم التالي.
3. اعط معادلة تربط بين $X(t)$ و $Y(t)$ بحذف الوسيط t.

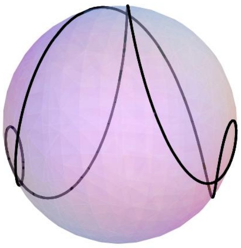


تدريب 7

نعرّف المسار $f(t) = (\sin t \cos 3t,\ \sin t \sin 3t,\ \cos t)$ حيث $t \in \mathbb{R}$.

أثبت أنّ هذا المسار يقع على سطح الكرة التي مركزها $(0,0,0)$ ونصف قطرها 1.

لا يطلب رسم المسار!

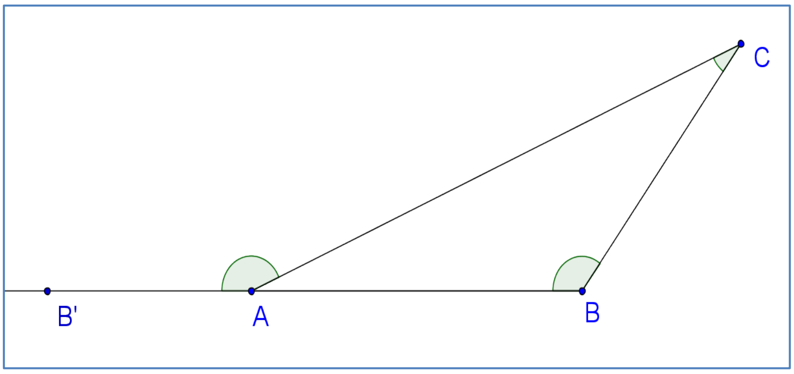


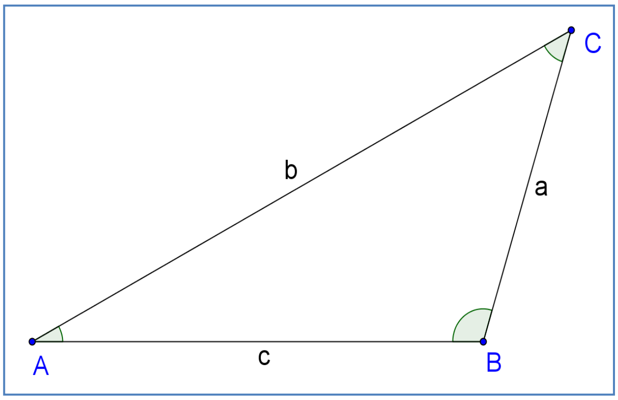
ملحقات

فارس أبوصالح

حقائق متعلقة بالمثلث

1. مجموع زوايا المثلث يساوي π.
2. الزاوية الخارجية $\widehat{CAB'}$ تساوي مجموع الزاويتين الداخليتين في الرأسين الآخرين $\widehat{CBA}$ و $\widehat{ACB}$.

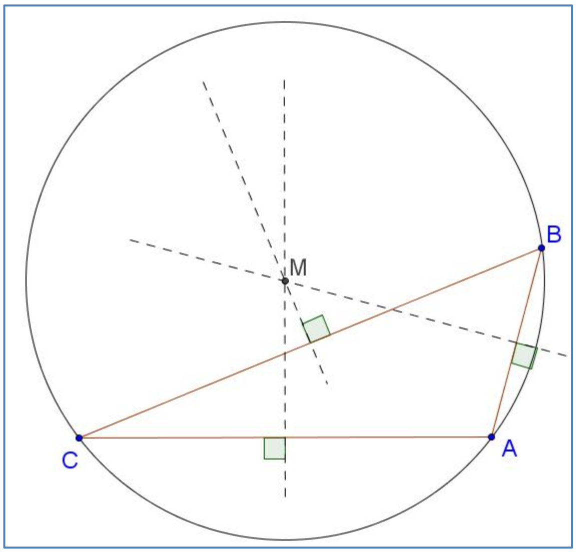




3. نرمز فيما يلي A, B, C لقياسات زوايا المثلث ونرمز a, b, c لأطوال أضلاعه كما هو مبين في الشكل. لدينا العلاقات:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos B$$

حالة خاصة: إذا كانت إحدى زوايا المثلث قائمة ولتكن مثلاً $C = \frac{\pi}{2}$ نجد علاقة فيثاغورس: $c^2 = a^2 + b^2$

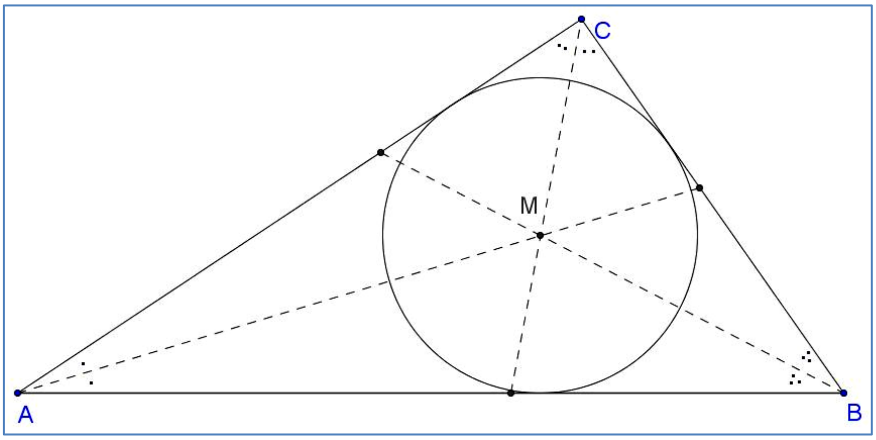


4. تمر برؤوس المثلث دائرة وحيدة، ومركز هذه الدائرة هو نقطة تلاقي محاور أضلاع المثلث. انظر الشكل المجاور.

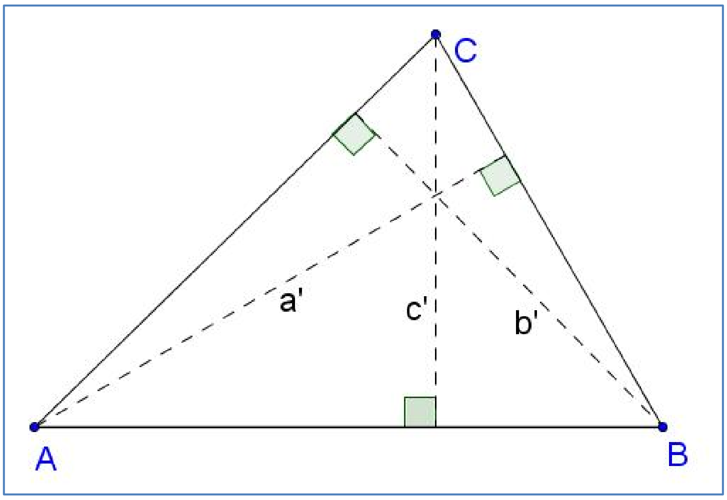
5. ليكن R نصف قطر الدائرة المارة برؤوس المثلث ABC. لدينا:

$$a = 2R \sin A$$
$$b = 2R \sin B$$
$$c = 2R \sin C$$

6. يوجد دائرة وحيدة تمس أضلاع مثلث من الداخل، ويكون مركزها في نقطة تلاقي منصفات زوايا المثلث. انظر الشكل التالي.



7. تتلاقى الارتفاعات الثلاثة في المثلث في نقطة واحدة. (يوجد اثبات لهذه الخاصة في تدريبات درس الأشعة في المستوي)



8. يمكن حساب مساحة المثلث بإحدى العلاقات التالية:

- المساحة= نصف طول أحد الأضلاع × طول الارتفاع النازل على هذا الضلع أي:

$S = \frac{1}{2}a \cdot a' = \frac{1}{2}b \cdot b' = \frac{1}{2}c \cdot c'$ (انظر الشكل أعلاه)

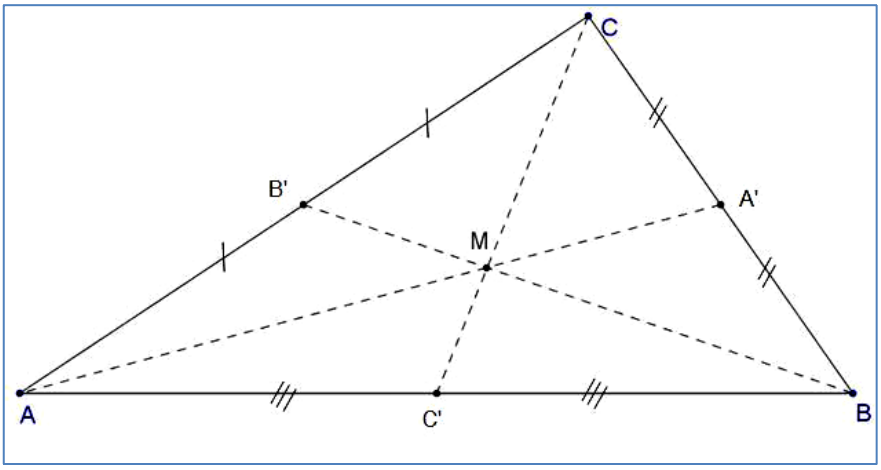
- المساحة= نصف جداء ضلعين بجيب الزاوية بينهما أي:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$$

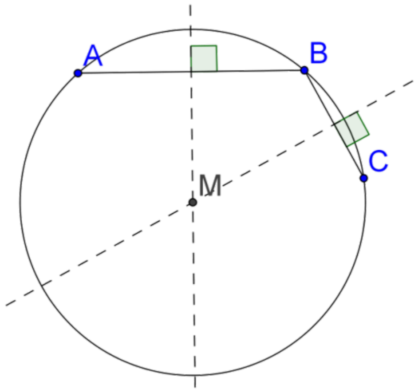
9. تتقاطع المتوسطات في المثلث في نقطة واحدة M . انظر الشكل التالي. (الاثبات في تدريبات درس الأشعة في المستوي)

تقسم النقطة M أي متوسط بنسبة $2:1$ أي لدينا

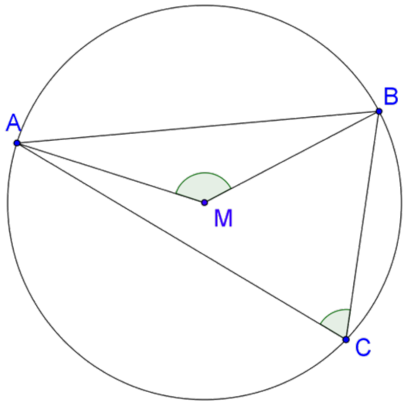
$L[MA] = 2 \cdot L[MA']$ $\qquad$ $L[MB] = 2 \cdot L[MB']$ $\qquad$ $L[MC] = 2 \cdot L[MC']$



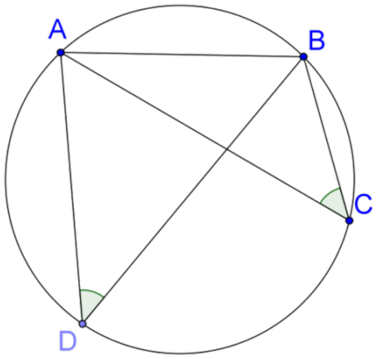
حقائق متعلقة بالدائرة



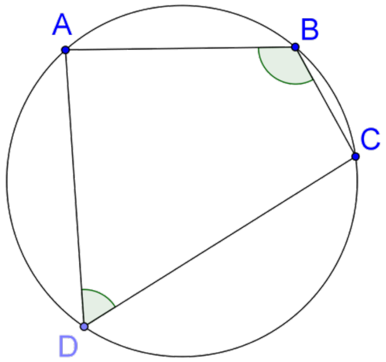
1. إذا كانت A, B, C ثلاث نقاط في المستوي ليست على استقامة واحدة فيوجد دائرة وحيدة تمر بهذه النقاط.
   لإنشاء هذه الدائرة نرسم محوري القطعتين $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ فتكون نقطة تقاطع المحورين هي مركز الدائرة.



2. إذا كانت $\widehat{BCA}$ زاوية محيطية في الدائرة وكانت $\widehat{BMA}$ زاوية مركزية وكانتا تقابلان القوس $\overset{\frown}{BA}$ نفسه فلدينا:
   $$\widehat{BMA} = 2 \cdot \widehat{BCA}$$



3. أي زاويتين محيطيتين تقابلان القوس ذاته يكون لهما القياس نفسه.



4. ليكن الرباعي $ADCB$. لدينا التكافؤ:

   (تمر دائرة في رؤوس الرباعي $ADCB$)

   $\Leftrightarrow$

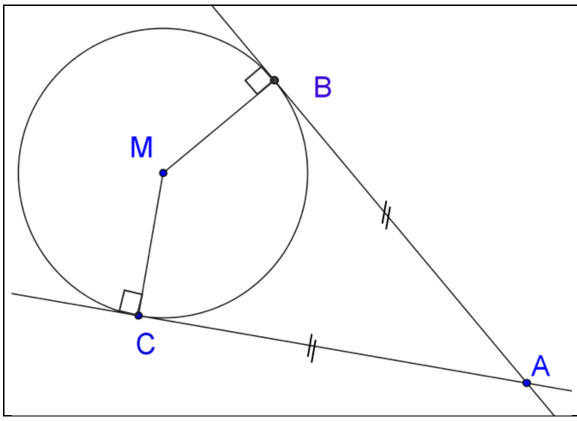
   (مجموع زاويتين متقابلتين يساوي π)

5. من كل نقطة A خارج قرص الدائرة يمر مماسان للدائرة. وتبعد النقطة A عن نقطتي التماس المسافة ذاتها.

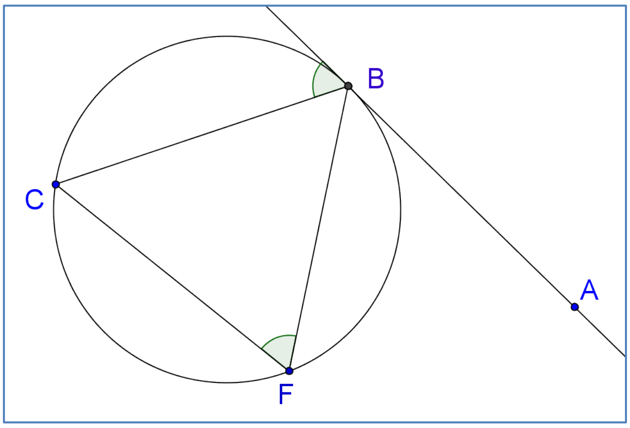
من كل نقطة على الدائرة نفسها يمر مماس وحيد للدائرة.

من كل نقطة داخل القرص لا يمر أي مماس للدائرة.

المماس للدائرة في نقطة B من الدائرة يتعامد مع القطر المار بهذه النقطة.



6. قياس الزاوية بين المماس في النقطة B والوتر CB تساوي قياس الزاوية المحيطية التي تقابل الوتر CB من الجهة الأخرى كما في الشكل.

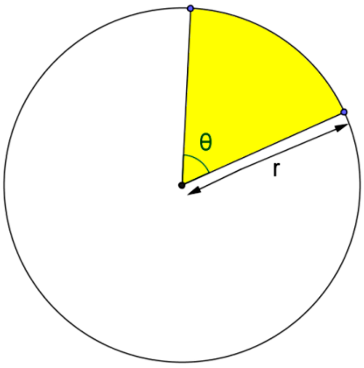


7. مساحة القرص تساوي πr^2 حيث r يمثل نصف قطر الدائرة.

مساحة قطاع زاوي تساوي $S = \frac{\theta}{2} r^2$ حيث θ تمثل قياس زاوية القطاع.

طول محيط الدائرة يساوي $2\pi r$.

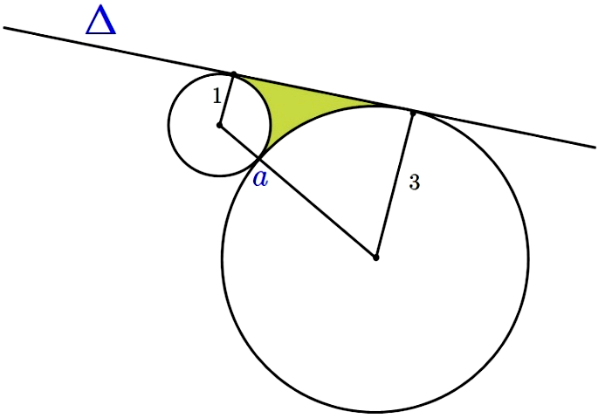
طول قوس من الدائرة يساوي $r\theta$ حيث θ تمثل قياس زاوية القوس.



تدريبات

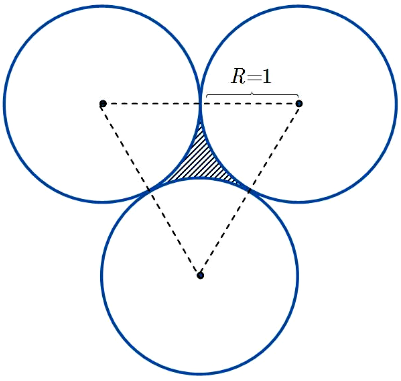
تدريب 1

يمثل الشكل المجاور دائرتين متماستين في a، نصف قطر الأولى 3 والثانية 1. والمستقيم Δ مماس مشترك للدائرتين. احسب مساحة المنطقة المظللة.



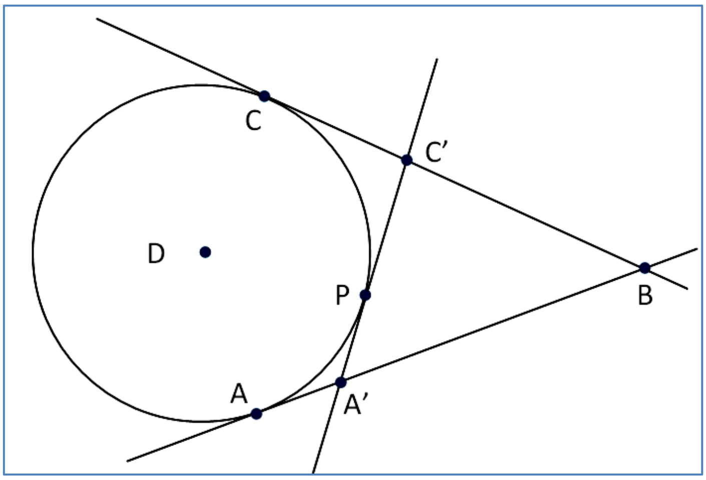
تدريب 2

ثلاث دوائر متماثلة، نصف قطر كل منها 1، متماسة كما هو موضح في الشكل. احسب مساحة المنطقة المظللة المحصورة بينها.



تدريب 3

انظر إلى الشكل أدناه والذي يمثل دائرة مركزها D ونصف قطرها r وثلاثة مماسات: $\overline{AB}$ يمس الدائرة في A و $\overline{CB}$ يمس الدائرة في C و $\overline{A'C'}$ يمس الدائرة في P. اذا علمت أنّ $L[AB] = \ell$ فاحسب محيط المثلث $BC'A'$.

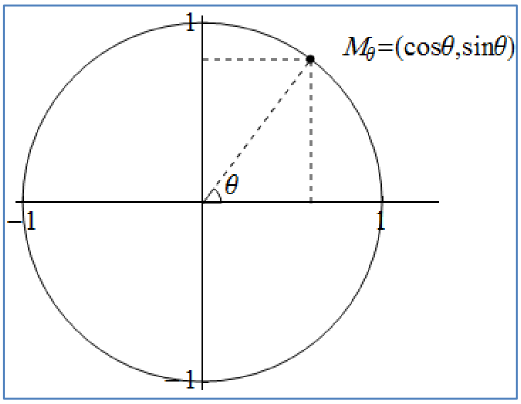


تذكير سريع بالنسب المثلثية

النسب المثلثية

في مستوٍ منسوب إلى محورين متعامدين $\overrightarrow{OX}$ و $\overrightarrow{OY}$، نعرّف الدائرة الواحدية على أنها الدائرة التي مركزها المبدأ $O=(0,0)$ ونصف قطرها 1. لنعرّف أيضاً النقطة $A=(1,0)$.

ليكن θ عدداً حقيقياً. نرمز M_θ للنقطة من الدائرة الواحدية حيث $\widehat{AOM_\theta}=\theta$. لاحظ أنّ النقطة M_θ تمسح الدائرة كلها مرةً واحدةً عندما يمسح المتحول θ المجال $[0,2\pi[$. كذلك لاحظ أنّ $M_\theta = M_{\theta+2\pi k}$ وذلك أياً كان العدد الصحيح $k\in\mathbb{Z}$.

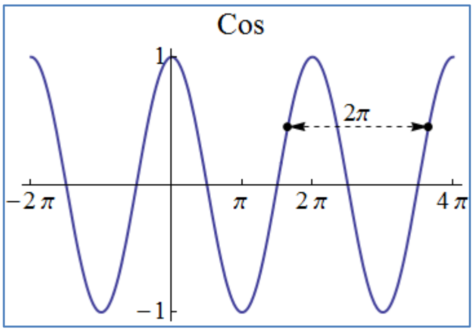


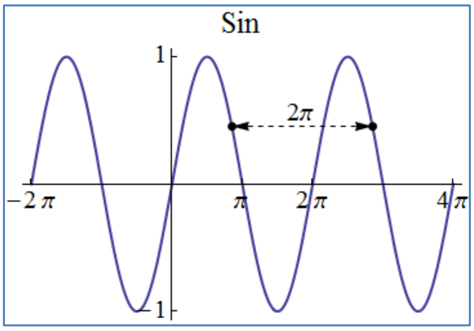
- نعرّف جيب تمام الزاوية θ على أنّه الاحداثي الأول للنقطة M_θ ونرمز له $\cos\theta$.
- نعرّف جيب الزاوية θ على أنّه الاحداثي الثاني للنقطة M_θ ونرمز له $\sin\theta$.
- أي لدينا: $M_\theta=(\cos\theta,\sin\theta)$.
- لاحظ أنّ قيم الجيب وجيب التمام تقع في المجال $[-1,1]$ وتغطي هذا المجال كله.
- لاحظ كذلك أنّ $(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2=1$.
- إذا لم تكن الزاوية θ من الشكل $\frac{\pi}{2}+k\pi$ حيث $k\in\mathbb{Z}$ فنعرّف ظل الزاوية θ كما يلي: $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$.

خواص النسب المثلثية

ليكن $t\in\mathbb{R}$ و $k\in\mathbb{Z}$. لدينا:

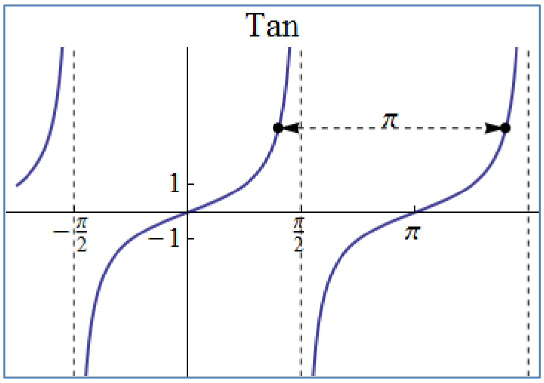
1. الدورية: $\cos(t+2\pi k)=\cos(t)$ و $\sin(t+2\pi k)=\sin(t)$. انظر الشكلين التاليين.





2. دورية الظل: إذا كان $t\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+j\pi : j\in\mathbb{Z}\}$ فلدينا $\tan(t+k\pi)=\tan(t)$. انظر الشكل.

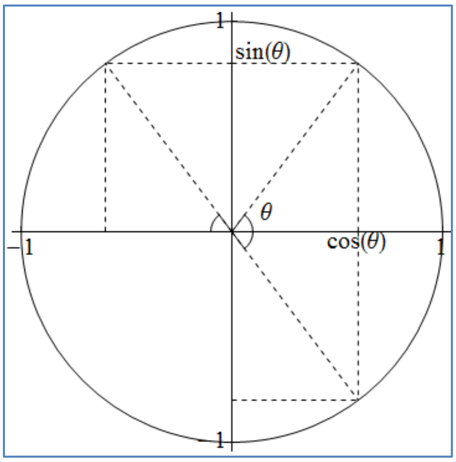
لاحظ كذلك أنّ قيم الظل تعبر $\mathbb{R}$ كلها عندما يعبر المتحول t المجال $]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[$.



3. مقاربات تابع الظل:

لدينا $\lim\limits_{\substack{\theta\to\frac{\pi}{2}\\ \theta<\frac{\pi}{2}}} \tan\theta = +\infty$ و $\lim\limits_{\substack{\theta\to\frac{\pi}{2}\\ \theta>\frac{\pi}{2}}} \tan\theta = -\infty$

أي أنّ المستقيمات $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ مقاربات عامودية لمنحني تابع الظل.



4. التناظر:

التابع cos زوجي أي أنّه يحقق: $\cos(-t) = \cos(t)$.

التابع sin فردي أي أنّه يحقق: $\sin(-t) = -\sin(t)$

انظر الشكل المجاور.

5. الزوايا المتكاملة:

$\sin(\pi - t) = \sin(t)$ و $\cos(\pi - t) = -\cos(t)$

6. الزوايا المتتامة:

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t)$

حل معادلة مثلثية

$\sin x = \sin a \quad \Leftrightarrow \quad$ (يوجد عدد صحيح k بحيث: $x = a + 2\pi k$ أو $x = \pi - a + 2\pi k$)

$\cos x = \cos a \quad \Leftrightarrow \quad$ (يوجد عدد صحيح k بحيث: $x = a + 2\pi k$ أو $x = -a + 2\pi k$)

$\tan x = \tan a \quad \Leftrightarrow \quad$ (يوجد عدد صحيح k بحيث: $x = a + \pi k$)

نسب مجموع زاويتين

ليكن a و b عددين حقيقيين.

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

نسب ضعف ونصف زاوية

ليكن a عدداً حقيقياً.

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$$

$$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$$

$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

التحويل من جداء إلى مجموع

ليكن a و b عددين حقيقيين.

$$\begin{aligned} 2\cos a\cos b &= \cos\left(a+b\right)+\cos\left(a-b\right) \\ -2\sin a\sin b &= \cos\left(a+b\right)-\cos\left(a-b\right) \\ 2\sin a\cos b &= \sin\left(a+b\right)+\sin\left(a-b\right) \end{aligned}$$

التحويل من مجموع إلى جداء

ليكن a و b عددين حقيقيين.

$$\begin{aligned} \cos\left(a\right)+\cos\left(b\right) &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin\left(a\right)+\sin\left(b\right) &= 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \cos\left(a\right)-\cos\left(b\right) &= -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin\left(a\right)-\sin\left(b\right) &= 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \end{aligned}$$

تحويل العبارة

ليكن α و β و t أعداداً حقيقيية. يوجد عدد حقيقي θ يحقق:

$$\alpha\cos\left(t\right)+\beta\sin\left(t\right)=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos\left(t-\theta\right)$$

و $\cos\theta=\dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ و $\sin\theta=\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

اشتقاق التوابع مثلثية

التوابع $\sin$ و $\cos$ و $\tan$ كلها تقبل الاشتقاق على مجموعات تعريفها. ولدينا:

$$\begin{aligned} \sin' x &= \cos x \\ \cos' x &= -\sin x \\ \tan' x = 1+\left(\tan x\right)^2 &= \frac{1}{\left(\cos x\right)^2} \end{aligned}$$

تدريبات

تدريب 1 حساب النسب المثلثية لبعض الزوايا الشهيرة

1. لنضع $a = \cos\frac{\pi}{3}$ و $b = \cos\frac{\pi}{6}$. باستخدام دستور ضعف الزاوية أثبت أنّ $a = 2b^2 - 1$.

باستخدام دستور الزوايا المتتامة أثبت أنّ $b^2 + a^2 = 1$. استنتج مما سبق أنّ:

$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$	$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

2. لنضع $a = \cos\frac{\pi}{4}$. باستخدام دستور الزوايا المتتامة أثبت أنّ $\sin\frac{\pi}{4} = a$. استنتج أنّ $2a^2 = 1$ ومنه:

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

3. احسب كلاً من النسب التالية: $\cos\frac{\pi}{12}$ $\quad\sin\frac{\pi}{8}$ $\quad\sin\frac{2\pi}{3}$ $\quad\sin\frac{3\pi}{4}$ $\quad\cos\frac{3\pi}{2}$

تدريب 2

حل كلاً من المعادلات التالية:

$$\cos t = \cos 4t$$
$$\sin 2t = \cos 3t$$
$$\sqrt{3}\cos t + \sin t = 1$$

تدريب 3

إذا كان $k \in \mathbb{Z}$ عدداً صحيحاً فبيّن أنّ $\cos(k\pi) = (-1)^k$. بسّط المقدار التالي $\cos(t + k\pi)$.

تدريب 4

احسب المقادير التالية $\cos\left(\frac{237}{4}\pi\right)$ $\quad\cos\left(\frac{-204}{8}\pi\right)$ $\quad\cos\left(\frac{2014}{3}\pi\right)$

تدريب 5

1. اكتب المقدار $\cos^3 t$ بالشكل $a + b\cos t + c\cos 2t + d\cos 3t$ حيث $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.
2. احسب التكامل $\int_0^\pi (\cos t)^3\,dt$.

تدريب 6

احسب التكامل $\int_0^\pi (\sin t)^4\,dt$.

تدريب 7

إذا كان $k,n \in \mathbb{N}$ نعرّف المقدار $I(k,n) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt)\cdot\cos(nt)\,dt$.

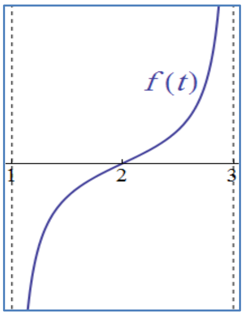
إذا كان $k \neq n$ فأثبت أنّ $I(k,n) = 0$.

إذا كان $k = n$ فأثبت أنّ $I(k,n) = \pi$.

تدريب 8

1. ليكن $f(t) = t\cos t$. ابحث عن تابع أصلي للتابع f من الشكل: $F(t) = (at+b)\cos t + (ct+d)\sin t$.
2. استنتج قيمة التكامل $\int_0^{\pi} t\cos(t)\,dt$.
3. ليكن $g(t) = t\sin t$. ابحث عن تابع أصلي G للتابع g من الشكل السابق ذاته.
4. استنتج قيمة التكامل $\int_0^{\pi} t\sin(t)\,dt$.
5. بسّط المقدار $J(\alpha,\beta) = \int_0^{\pi} (\alpha\cos t + \beta\sin t - t)^2\,dt$ حيث $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.
6. عيّن قيم α,β التي تجعل J أصغر ما يمكن.

تدريب 9



عيّن قيم الثوابت $a,b \in \mathbb{R}$ بحيث يكون منحني التابع $f(t) = \tan(at+b)$ هو المنحني الممثل في الشكل المجاور. ارشاد: لاحظ أنّ المستقيمين $x=1$ و $x=3$ مقاربان لهذا المنحني.

تدريب 10

أوجد إعداداً صحيحة a_0, a_1, a_2, a_3 بحيث تتحقق العلاقة التالية أياً كان $t \in \mathbb{R}$:

$$\cos 3t = a_3\cos^3 t + a_2\cos^2 t + a_1\cos t + a_0$$

تدريب 11 حساب قيمة $\cos(\pi/5)$

1. أوجد أعداداً صحيحة $b_0,\ldots,b_4$ بحيث تتحقق العلاقة التالية أياً كان $t \in \mathbb{R}$:

$$\cos 4t = b_4\cos^4 t + b_3\cos^3 t + b_2\cos^2 t + +b_1\cos\ t + b_0$$

2. لنضع $x = \cos\frac{\pi}{5}$. أثبت باستخدام العلاقة السابقة أنّ $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = 0$.
3. بملاحظة أنّ -1 و $\frac{1}{2}$ حلان للمعادلة السابقة أوجد الحلين الآخرين. استنتج قيمة $\cos\frac{\pi}{5}$.

فرق قوتين

ليكن a و b عددين حقيقيين، وليكن $n \geq 2$ عدداً طبيعياً. يمكننا تحليل فرق القوتين $b^n - a^n$ كما يلي:

$$\boxed{b^n - a^n = (b-a) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}}$$

لاحظ أنّ المجموع في الطرف الأيمن مكون من الجداءات من الشكل $a^i b^j$ حيث مجموع القوتين $i + j = n - 1$.

فيما يلي نعيد كتابة هذه المتطابقة في بعض الحالات الخاصة:

$n = 2$	$b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$
$n = 3$	$b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2)$
$n = 4$	$b^4 - a^4 = (b-a)(b^3 + ab^2 + a^2b + a^3)$

لإثبات المتطابقة السابقة نبدأ من الطرف الأيمن

$$\begin{aligned}(b-a) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} &= (b-a) \cdot \left(b^{n-1} + ab^{n-2} + a^2b^{n-3} + \cdots + a^{n-2}b + a^{n-1}\right) \\ &= b^n + ab^{n-1} + a^2b^{n-2} + \cdots + a^{n-2}b^2 + a^{n-1}b \\ &\quad - ab^{n-1} - a^2b^{n-2} - a^3b^{n-3} - \cdots - a^{n-1}b - a^n \\ &= b^n - a^n\end{aligned}$$

مجموع قوى عدد حقيقي

ليكن a عدداً حقيقياً. وليكن n عدداً طبيعياً. إذا كان $a \neq 1$ لدينا:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \frac{1-a^n}{1-a}}$$

أما إذا كان $a = 1$ فلدينا وضوحاً $\sum_{k=0}^{n-1} a^k = n$.

لإثبات هذه المتطابقة يكفي أن نعوض $b = 1$ في متطابقة فرق قوتين السابقة:

$$\begin{aligned}(b^n - a^n) &= (b-a) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} \\ (1-a^n) &= (1-a) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} a^k \\ \frac{1-a^n}{1-a} &= \sum_{k=0}^{n-1} a^k\end{aligned}$$

مثال:

لنحسب المجموع $S = 1 + 3 + 9 + 27 + \cdots + 3^6$. هنا $a = 3$ و $n = 7$ إذاً:

$$S = \frac{1-3^7}{1-3} = \frac{3^7-1}{2} = \frac{2186}{2} = 1093$$

مجموع أعداد طبيعية متتالية

ليكن $n \geq 1$ عدداً طبيعياً. لدينا:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}$$

لإثبات هذه العلاقة نكتب المجموع $S = \sum_{k=1}^{n} k$ بطريقتين مختلفتين ثم نجمعهما:

$$\begin{array}{rccccccccccccc} S = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ S = & n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

إذاً نجد: $2S = n(n+1)$ ومنه العلاقة المطلوبة.

تدريب:

أثبت بطريقة مشابهة لما سبق أنّه إذا كان $n < m$ عددين طبيعيين فلدينا:

$$\sum_{k=n}^{m} k = \frac{(m-n+1)(n+m)}{2}$$

التوافيق

نعرّف أياً كان العددان الطبيعيان $n, k \in \mathbb{N}$ العدد C_n^k كما يلي:

إذ كان $n \geq k$ فنضع $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

أما إذا كان $n < k$ فنضع $C_n^k = 0$

في الجدول التالي نبيّن قيم الأعداد C_n^k عندما تكون $0 \leq n \leq 9$ و $0 \leq k \leq 9$.

k (الأعمدة)، **n** (الأسطر)

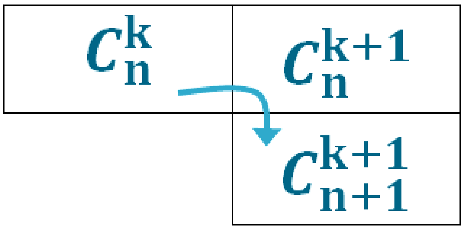
n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

خواص التوافيق

ليكن $n, k \in \mathbb{N}$.

- $C_n^0 = 1$ انظر إلى العمود الأيسر من الجدول السابق.
- $C_n^n = 1$ انظر إلى قطر الجدول أعلاه.

- انظر إلى العمود الثاني من اليسار من الجدول السابق. $C_n^1 = n$
- لاحظ أنّ كل سطر في الجدول أعلاه متناظر حول "منتصفه". $C_n^k = C_n^{n-k}$
- علاقة باسكال: $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.
أي أنّ مجموع خانتين متجاورتين في سطر من الجدول السابق يساوي الخانة اليمنى في السطر التالي كما هو موضح في الشكل المجاور.
- التوافيق كلها أعداد طبيعية $C_n^k \in \mathbb{N}$.



منشور ثنائي الحد

ليكن العددان $a,b \in \mathbb{R}$ و $n \in \mathbb{N}$. لدينا:

$$\left(b+a\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

فيما يلي نعيد كتابة هذه المتطابقة في بعض الحالات الخاصة:

$n = 2$	$\left(b+a\right)^2 = b^2 + 2ab + a^2$
$n = 3$	$\left(b+a\right)^3 = b^3 + 3b^2a + 3ba^2 + a^3$
$n = 4$	$\left(b+a\right)^4 = b^4 + 4b^3a + 6b^2a^2 + 4ba^3 + a^4$

تدريبات

تدريب 1

أثبت أنّ العدد 5 يقسم العدد $m = 8^{20} - 3^{20}$.

تدريب 2

ليكن a,b عددين حقيقيين موجبين تماماً. أثبت أنّ $\sqrt{b} - \sqrt{a} = \dfrac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$.

ادرس نهاية التابع $f\left(t\right) = \sqrt{t^2+t+1} - \sqrt{t^2-2t+2}$ عندما $t \to \pm\infty$.

تدريب 3

ليكن a,b عددين حقيقيين غير معدومين. أثبت أنّ $\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a} = \dfrac{b-a}{\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ba}+\sqrt[3]{a^2}}$.

ادرس نهاية التابع $f\left(t\right) = \left(\sqrt[3]{t^2+t+1} - \sqrt[3]{t^2-1}\right) \cdot \sqrt[3]{t+1}$ عندما $t \to \pm\infty$.

تدريب 4

ليكن n,m عددين طبيعيين.

بسّط المجموع: $A = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 + \cdots + 2^{20}$

بسّط المجموع: $B = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$.

بسّط المجموع: $C = a^{10} + a^9b + a^8b^2 + \cdots + a^2b^8 + ab^9 + b^{10}$.

بسّط المجموع: $D = a^n + a^{n+1} + a^{n+2} + \cdots + a^{n+m}$. ارشاد: أخرج a^n عاملاً مشتركاً.

تدريب 5

أوجد الأعداد الحقيقية x التي تحقق: $1 + 2x^3 + 4x^6 + 8x^9 = 0$.

تدريب 6

ليكن n, m عددين طبيعيين.

بسّط المجموع: $A = \sum_{k=1}^{n} 4k + 2$.

بسّط المجموع: $B = \sum_{k=n}^{m} 5k + 1$.

بسّط الجداء: $P = e^x e^{2x} e^{3x} \cdots e^{nx}$.

تدريب 7

أثبت علاقة باسكال $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

تدريب 8

ليكن n, m عددين طبيعيين.

بسّط المجموع: $A = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{k+4}$.

بسّط المجموع: $B = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}$.

بسّط المجموع: $C = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (-1)^k \, 3^{2k+2}$.

تدريبات عامة

تدريبات عامة

تدريب 1 اثبات بعض المتراجحات الشهيرة

1. نريد اثبات المتراجحة الشهيرة

$$\boxed{\ln x \le x - 1}$$

وذلك عندما يكون العدد $x \in \left]0,\infty\right[$. لهذا الغرض نعرّف التابع $f(x) = (x-1) - \ln x$ أي أنّ $f(x)$ هو الفرق بين طرفي المتراجحة المطلوب اثباتها. ادرس تحولات f على المجال $\left]0,\infty\right[$ وأثبت أنّه يحقق $0 \le f(x)$.
ارسم المنحنى $y = \ln x$ والمستقيم المماس لهذا المنحنى في النقطة $(1,0)$ على الشكل نفسه، ماذا تلاحظ؟

2. استنتج من الطلب السابق صحة المتراجحة الشهيرة التالية:

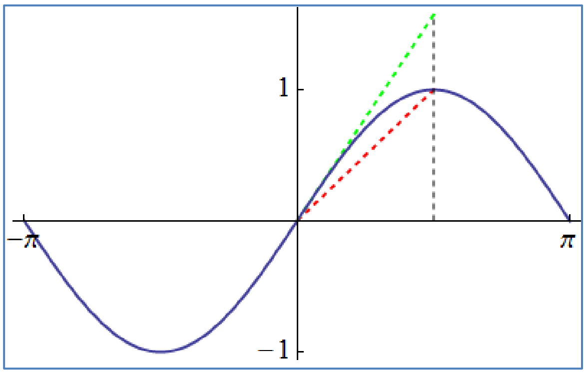
$$\boxed{x + 1 \le \mathrm{e}^x}$$

حيث $x \in \mathbb{R}$. ارسم المنحنيين $y = \mathrm{e}^x$ و $y = x + 1$ على الشكل نفسه ماذا تلاحظ؟

3. بدراسة تابعين مناسبين أثبت المتراجحة:

$$\boxed{\frac{2}{\pi}x \le \sin x}$$

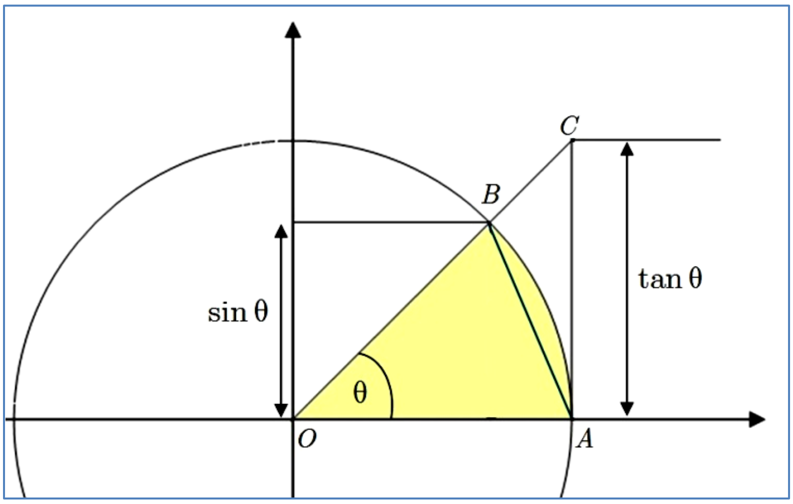
وذلك عندما $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. ارسم المنحنى $y = \sin x$ على المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. اكتب معادلة الوتر الواصل بين النقطتين $(0,0)$ و $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ من المنحنى السابق وارسمه. قارن مع الرسم التالي.



4. بدراسة تابعين مناسبين أثبت المتراجحتين:

$$\boxed{\sin x \le x \le \tan x}$$

وذلك عندما يكون $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. أعط اثباتاً هندسياً للمتراجحتين السابقتين وذلك بحساب مساحة المثلث والقطاع المظللين في الشكل التالي.



تدريب 2

ليكن $f(x)=\ln\left(3\,e^{2x}+x^2+1\right)$. عيّن مجموعة تعريف f .

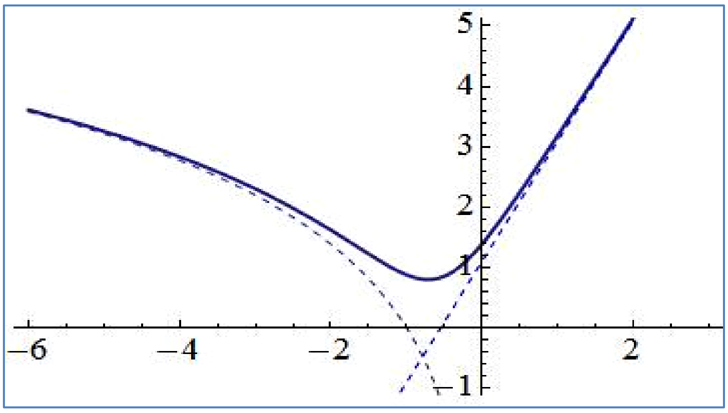
1. دراسة f في اللانهاية الموجبة:

باخراج الحد المسيطر $3\,e^{2x}$ عاملاً مشتركاً أثبت أنّه يمكن كتابة f بالشكل $f(x)=2x+\ln 3+g(x)$ حيث g تابع يسعى إلى الصفر في $+\infty$. استنتج المستقيم المقارب لمنحني التابع f في $+\infty$. ما وضع المنحني بالنسبة للمقارب؟

2. دراسة f في اللانهاية السالبة:

باخراج الحد المسيطر x^2 عاملاً مشتركاً أثبت أنّه يمكن كتابة f بالشكل $f(x)=2\ln(-x)+h(x)$ حيث h تابع يسعى إلى الصفر في $-\infty$. استنتج أنّ منحني التابع f يقترب من منحني التابع $u(x)=2\ln(-x)$ في اللانهاية السالبة ويكون فوقه.

3. احسب مشتق التابع f .
4. ادرس تحولات التابع $v(x)=6\,e^{2x}+2x$ وأثبت أنه متزايد تماماً على $\mathbb{R}$ وأنّه ينعدم في نقطة واحدة x_0 واقعة في المجال $]-1,0[$.
5. استنتج إشارة f' . ثم ارسم منحني التابع f مع مستقيمه المقارب والمنحني المقارب له. قارن مع الرسم التالي.



تدريب 3 الجيب الزائدي وجيب التمام الزائدي Hyperbolic Sine and Cosine

نعرّف التابعين:

$$\mathrm{sh}(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\qquad\qquad \mathrm{ch}(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

ملاحظة: يسمى هذان التابعان الجيب الزائدي وجيب التمام الزائدي.

1. عيّن مجموعة تعريف كل من التابعين السابقين ثم احسب $\mathrm{sh}\,x+\mathrm{ch}\,x$.
2. احسب المشتقات وأثبت: $\mathrm{sh}'(x)=\mathrm{ch}(x)$ و $\mathrm{ch}'(x)=\mathrm{sh}(x)$.
3. ادرس وارسم كلاً من التابعين السابقين. ما أصغر قيمة يأخذها التابع ch ؟
4. أثبت العلاقات التالية:

$$\mathrm{ch}^2 x-\mathrm{sh}^2 x=1$$
$$\mathrm{ch}(x+y)=\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y)+\mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$$
$$\mathrm{sh}(x+y)=\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y)+\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y)$$

5. نعرّف الظل الزائدي على أنّه $\mathrm{th}(x)=\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$. ارسم هذا التابع وبيّن أنّ قيمه تقع في المجال $]-1,1[$. ما مقارباته؟

تدريب 4 حلول بعض المعادلات الجبرية

1. حل المعادلة $6x^2 - x^4 = 8$.

ارشاد: ضع $y = x^2$ فتؤول المعادلة السابقة إلى معادلة تربيعية في المجهول y.

2. حل المعادلة $x^3 + x^2 + 2x + 2 = 0$.

ارشاد: جمّع كل حدين متتاليين معاً ثمّ أخرج عاملاً مشتركاً.

3. حل المعادلة $x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 + 2x - 1 = 0$.

ارشاد: جمّع كل ثلاثة حدود معاً، ثم حلل المقدار إلى جداء مقدارين من درجتين أصغر.

4. أوجد أعداداً حقيقية a, b, c بحيث تتحقق المطابقة $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = \left(ax^2 + bx + c\right)^2$

ثم استنتج حلول المعادلة التالية $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 8 = 0$.

تدريب 5

احسب المشتقات الأول والثاني والثالث للتابع $f\left(x\right) = x \cdot e^{-x}$.

تدريب 6

احسب التكاملات التالية:

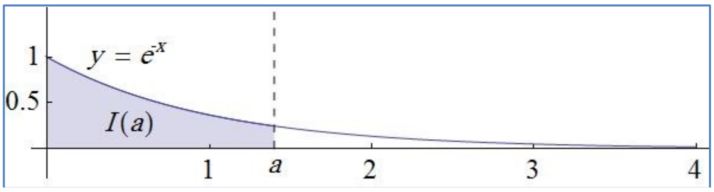
$$I = \int_0^3 (2x^2 + e^{4x}) \cdot dx \qquad J = \int_0^2 \frac{2x}{1+x} dx$$

$$\int_0^3 \sin\left(\mathrm{e}^t\right)\mathrm{e}^t \cdot dx \qquad \int_0^2 \frac{2x^2 + 3}{4 + 2x} dx$$

تدريب 7

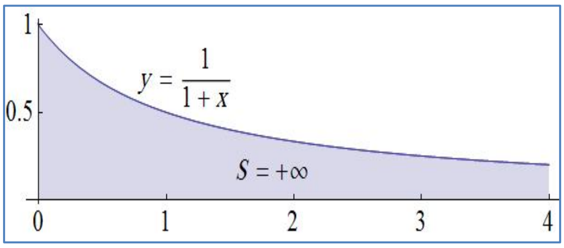
1. ارسم منحني التابع $f\left(x\right) = \mathrm{e}^{-x}$.

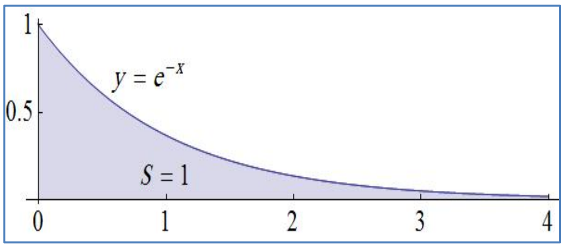
2. ليكن $0 < a$. احسب التكامل $I\left(a\right) = \int_0^a \mathrm{e}^{-x} \cdot dx$. ماذا يمثل العدد $I\left(a\right)$ هندسياً ؟



3. احسب النهاية $\lim_{a \to +\infty} I\left(a\right)$. ما المعنى الهندسي؟

4. أعد ما سبق مع التابع $g\left(x\right) = \dfrac{1}{x+1}$ ماذا تلاحظ؟



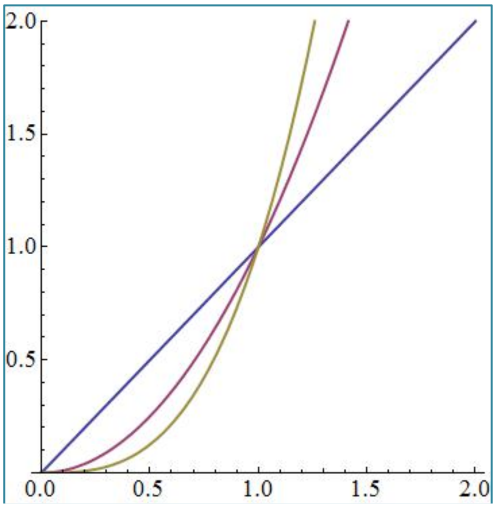


تدريب 8

عيّن مجموعة تعريف التابع التالي وارسمه $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1-x}}$. ما ميل منحني التابع عند طرفي مجال التعريف؟

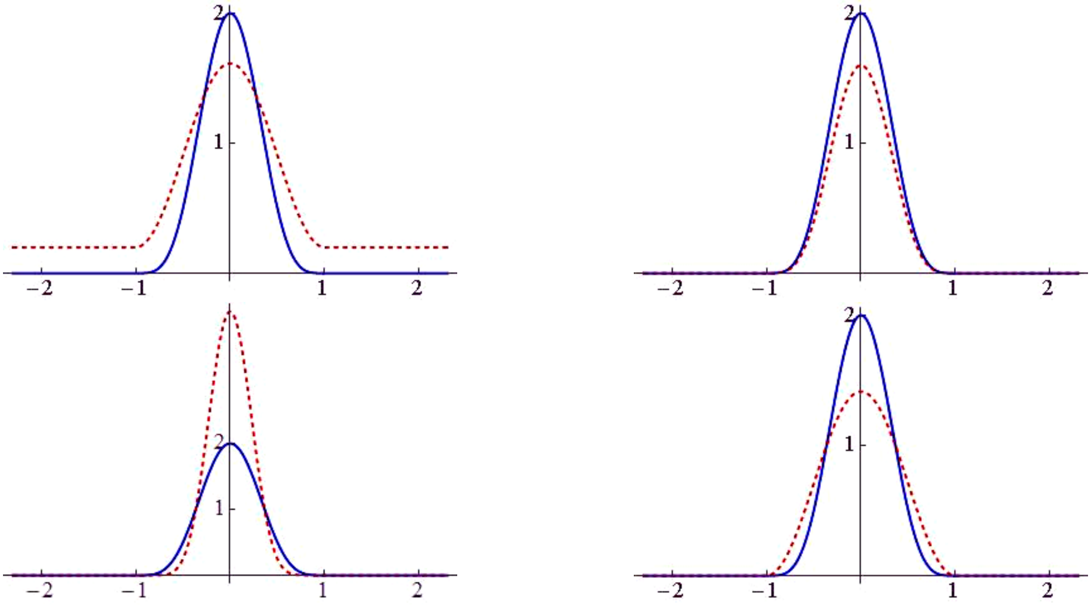
تدريب 9

1. ليكن $x\in\left]0,1\right[$. رتب تصاعدياً الأعداد x و x^2 و x^3 .
2. ليكن $x\in\left]1,\infty\right[$. رتب تصاعدياً الأعداد x و x^2 و x^3 .
3. في الرسم التالي مثلنا المنحنيات التي معادلاتها $y=x$ و $y=x^2$ و $y=x^3$. اربط كل منحنٍ بمعادلته.



تدريب 10

1. ليكن $x\in\left]0,1\right[$. قارن بين العددين x و $\sqrt{x}$.
2. ليكن $x\in\left]1,\infty\right[$. قارن بين العددين x و $\sqrt{x}$.
3. إذا مثلنا بيانياً التابع الموجب f بخط متصل والتابع $g\left(t\right)=\sqrt{f\left(t\right)}$ بخط متقطع فإننا نحصل على أحد الرسوم التالية، بينّ ذلك الرسم.



تدريب 11

ليكن التابع $f\left(x\right)=\left(x^4+x^2+1\right)e^{-x^2}$. اكتب مشتق التابع f واضعاً إياه في أبسط صيغة.

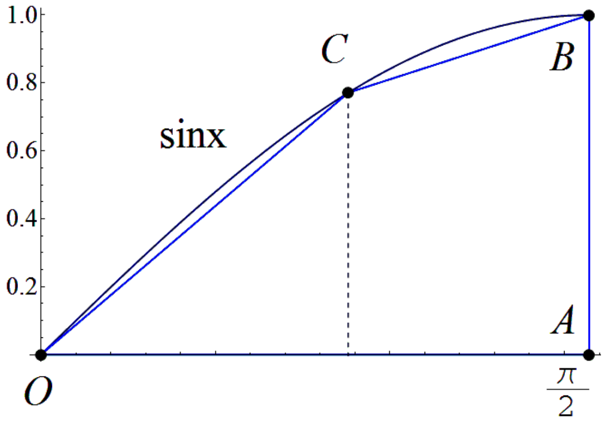
بيّن أنّ $f(-x) = f(x)$ وذلك أياً كان العدد الحقيقي x.

ادرس تحولات التابعة f وارسم المنحني الممثل له مبيناً أكبر قيمة يأخذها هذا التابع.

تدريب 12

لتكن C النقطة من منحني التابع $\sin$ في المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ التي تكون عندها مساحة الرباعي $OABC$ أكبر ما يمكن.

احسب ارتفاع النقطة C



تدريب 13

أوجد ثلاثة أعداد a, b, c حقيقية بحيث تتحقق المساواة التالية أياً كان العدد $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\frac{t^2 - 2t - 1}{t^3 - t^2 + t - 1} = \frac{a}{t-1} + \frac{bt + c}{t^2 + 1}$$

استنتج قيمة التكامل التالي:

$$\int_2^4 \frac{t^2 - 2t - 1}{t^3 - t^2 + t - 1} \cdot dt$$

تدريب 14

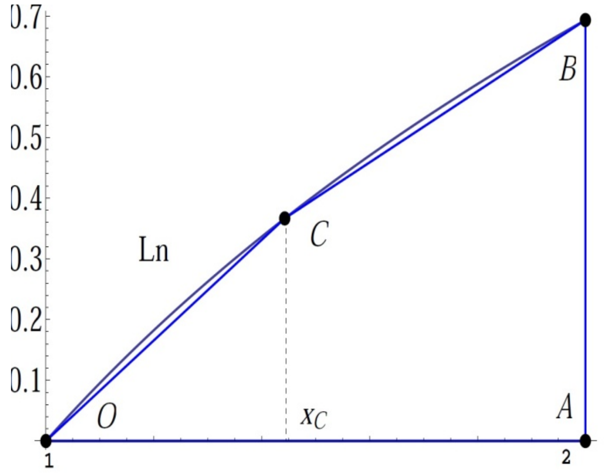
نعرّف التابع $f(x) = (2x^2 - 1)e^{-x^4}$. اكتب مشتق f واضعاً إياه في أبسط صيغة.

ارسم منحني التابع f مبيناً أكبر قيمة يأخذها هذا التابع.

تدريب 15

لتكن C النقطة من منحني تابع اللوغاريتم الطبيعي $\ln$ على المجال $[1, 2]$ التي تكون عندها مساحة الرباعي $OABC$ أكبر ما يمكن.

احسب فاصلة النقطة x_C C.



تدريب 16

ادرس اشارة المقدار $f(x, y) = 4x^2 + 4xy - 3y^2$ بحسب موقع النقطة (x, y) في المستوي. وضح بالرسم.

ارشاد: أكمل الحدين $4x^2 + 4xy$ إلى مربع كامل ثم حلل المقدار إلى جداء مقدارين من الدرجة الأولى.

تدريب 17

ادرس اشارة المقدار $f(x, y) = x^3 + xy^2 - x - x^2 - y^2 + 1$ بحسب موقع النقطة (x, y) في المستوي. وضح بالرسم.

تدريب 18

عيّن المعادلة الديكارتية لمجموعة النقط M المعينة بالمعادلتين الوسيطيتين:

$$x = \cos\theta$$
$$y = \sin 2\theta$$

حيث $\theta \in [0,2\pi]$. أثبت أنّ M متناظرة بالنسبة لكل من محوري الاحداثيات.

اعزل y بدلالة x عندما تكون النقطة $M \ni (x,y)$ في الربع الأول. ارسم المجموعة M.

تدريب 19

عيّن المعادلة الديكارتية لمجموعة النقط M المعينة بالمعادلتين الوسيطيتين:

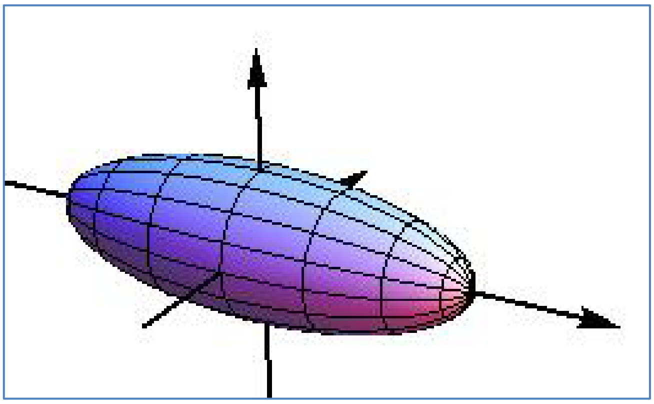
$$x = \cos\theta$$
$$y = \cos 2\theta$$

حيث $\theta \in [0,2\pi]$. أثبت أنّ M جزء من قطع مكافئ. ارسم.

تدريب 20 معادلة كرة الركبي

ليكن $F = (1,0,0)$ و $F' = (-1,0,0)$. لتكن المجموعة M المكونة من نقاط الفراغ التي تحقق:

$$L[PF] + L[PF'] = 3$$

اكتب المعادلة الديكارتية للمجموعة M.

دون حسابات توقع ما هو تقاطع M مع مستوي يمر في OX.