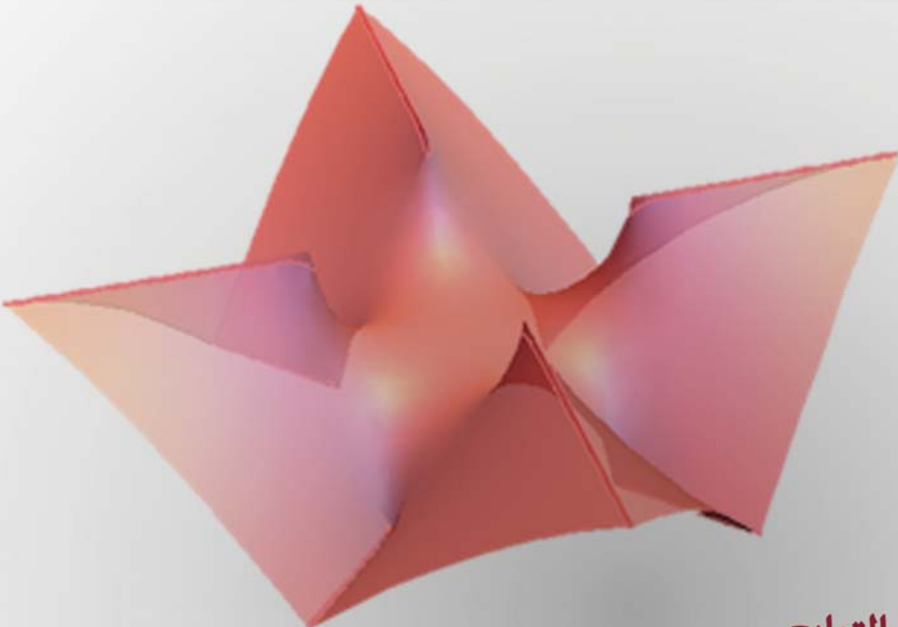
HIAST

التحليل الرياضي



- متتاليات التوابع
- التكاملات التابعة لوسيط
- الفضاءات الشعاعيّة المنظّمة
- التوابع لعدّة متحوّلات

تأليف

الدكتور خالد حلاوه

التحليل الرياضي

الدكتور خالد حلاوه

منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

2025

التحليل الرياضي

الدكتور خالد حلاوه

التقويم العلمي: الدكتورعمران قوبا، الدكتورمحمد بشير قابيل، الدكتور نبيه عودة.

التدقيق اللغوي: الأستاذ مروان البوّاب.

تصميم الغلاف: المؤلّف

الجمهورية العربية السورية

الطبعة الأولى 2025.

Mathematical Analysis

first edition
Dr, Khaled Halaoua
Publications of the Higher Institute for Applied Sciences and Technology (HIAST) - Syrian Arab Republic
First Edition 2025

ISBN – **978-9933-9261-8-2**

منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

- الجبر، الجزء الأول، مبادئ الجبر المجرد، للدكتور عمران قوبا، الطبعة الأولى 2009 ، الطبعة الثانية 2017.
- التحليل، الجزء الأول، للدكتور عمران قوبا، الطبعة الأولى 2009 ، الطبعة الثانية 2017.
- كيمياء المحاليل المائية، للدكتورة يمن الأتاسي، الطبعة الاولى 2011 ، الطبعة الثانية 2016 ، الطبعة الثالثة 2022.
- الأنظمة الرادارية في مواجهة التشويش والخداع، للدكتور علي طه 2011.
- ميكانيك النقطة المادية، للدكتور مصطفى العليوي والدكتور هاني قوبا، الطبعة الاولى 2011 ، الطبعة الثانية 2016 ، الطبعة الثالثة 2022.
- الجبر، الجزء الثاني، الجبر الخطي، للدكتور عمران قوبا 2017.
- التحليل، الجزء الثاني، للدكتور عمران قوبا 2017.
- المرجع في الرسم الصناعي، الجزء الثالث، للدكتور محمد بدر قويدر 2017.
- مدخل الى كيمياء المياه – تلوث – معالجة – تحليل، للدكتور نصر الحايك 2017.
- الترموديناميك، للدكتور عقيل سلوم 2017.
- دليل الرسام الصناعي، للدكتور مصطفى الجرف 2017.
- التحليل، الجزء الثالث، للدكتور عمران قوبا، الاصدار الأول 2018.
- التحليل، الجزء الرابع، للدكتور عمران قوبا، الاصدار الأول 2018.
- التحليل، الجزء الخامس، للدكتور عمران قوبا، الاصدار الأول 2018.
- تصميم عناصر الآلة ، الجزء الأول، للدكتور محمد زهير مسالخي 2021.
- ميكانيك الجسم الصلب، للدكتور مصطفى العليوي والدكتور مجسن علي،2021.
- طرائق عددية للمهندسين، الجزء الأول، للدكتور نبيه عودة، 2023.
- طرائق عددية للمهندسين، الجزء الثاني، للدكتور نبيه عودة،2023.
- الكهرباء الساكنة والمغناطيسية الساكنة، للدكتور مازن حسن والدكتور مصطفى عليوي.

سيصدر قريباً:

- تطوير تطبيقات تحصيل المعطيات باستعمال بيئة LobVIEW، للدكتور محمد شيخو معمو.
- الفيزياء التجريبية – 1، للدكتور مازن حسن وأ. رضوان علوش.

لمعلومات أوفى عن المنشورات وطلب نسخة ورقية أو تحميل المتاح منها إلكترونياً، يمكن الاطلاع على موقع المعهد الالكتروني: www.hiast.edu.sy

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا مؤسسة حكومية للتعليم العالي أحدثت بموجب المرسوم التشريعي رقم /24/ لعام 1983، وذلك بهدف إعداد كوادر علمية متميزة من مهندسين وباحثين للإسهام الفاعل في عملية التطوير العلمي والتنمية في الجمهورية العربية السورية.

برامج المعهد العالي الأكاديمية ونشاطاته العلمية: يمنح المعهد العالي درجة الإجازة في الهندسة في الاختصاصات التالية: الاتصالات، المعلوماتية، النظم الإلكترونية، الميكاترونيكس، علوم وهندسة المواد وهندسة الطيران. يقبل المعهد العالي لدراسة هذه الاختصاصات شريحة منتقاة من المتفوقين في الشهادة الثانوية من الفرع العلمي. يتيح المعهد العالي أيضاً برامج ماجستير أكاديمي في نظم الاتصالات، التحكم والروبوتيك، المعلوماتية باختصاصي نظم المعطيات الكبيرة ونظم المعلومات ودعم القرار، علوم وهندسة المواد وفي علوم وهندسة البصريات. أخيراً، يمنح المعهد العالي درجة الدكتوراه في الاتصالات والمعلوماتية ونظم التحكم والفيزياء التطبيقية. تُحدث في المعهد العالي اختصاصات جديدة بحسب متطلبات سوق العمل وتوجهات البحث العلمي والتطوير المحلية والعالمية.

يمتاز المعهد العالي بكوادره رفيعة التأهيل وبمختبراته المجهزة تجهيزاً عالياً، وببنيته التحتية الفريدة في القطر. إلى جانب النشاط التعليمي، يمارس المعهد العالي عبر جهود كوادره وفعالياته العلمية المختلفة نشاطاً حثيثاً في البحث والتطوير، إذ ينفذ مشاريع متنوعة لصالح الجهات العامة والخاصة في القطر، كما يتعاون مع جهات خارج القطر في بعض المشاريع البحثية والتطويرية. يسعى المعهد أيضاً، عبر دورات تدريبية نظرية وعملية متاحة للقطاعين العام والخاص وللأفراد، إلى نشر الإفادة لأوسع فئة من المهتمين بإمكانيات كوادره ومختبراته.

النشر في المعهد العالي: استكمالاً لدور المعهد العالي الرائد في مجال التعليم ونشر العلم، يحرص المعهد العالي على نشر كتب علمية عالية المستوى من نتاج كوادره، منها ما هو تدريسي يتوافق مع المناهج التدريسية في المعهد العالي ويفيد شريحة واسعة من الطلاب الجامعيين عموماً، ومنها ما هو علمي ثقافي. يخضع الكتاب قبل نشره إلى عملية تقويم علمي من مجموعة منتقاة بعناية من أصحاب الاختصاص، إضافةً إلى تدقيق لغوي حفاظاً على سوية عالية للمنشورات باللغة العربية.

معلومات التواصل: للتواصل مع المعهد العالي والاطلاع على شروط النشر وآخر المنشورات وتحميل المتاح منها:

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا، دمشق، ص.ب 31983

هاتف: +963115123819 - فاكس: +963115140761

بريد إلكتروني contact@hiast.edu.sy

موقع إلكتروني www.hiast.edu.sy

شُكر

أتقدّم بالشكر الجزيل والتقدير العميق إلى كلّ من أساتذتي الأفاضل: الدكتور عمران قوبا والدكتور نبيه عوده والأستاذ الدكتور محمد بشير قابيل الذين تولّوا بخبرتهم الواسعة وتجربتهم الغنيّة مراجعة محتوى هذا الكتاب من الناحية العلميّة، وأثمّن الملاحظات المهمّة والنصائح القيّمة التي أسهمت في إخراج هذا العمل بشكله النهائي.

كما أشكر الأستاذ مروان البوّاب المدقّق اللغوي لهذا الكتاب، لما بذله من جهد في مراجعة نصّ الكتاب، ولملاحظاته التي أسهمت في إظهار الكتاب بصياغةٍ لغويّة سليمة.

كذلك لا بدّ لي من توجيه الشكر إلى الزملاء في قسم الرياضيّات في المعهد العالي للعلوم التطبيقيّة والتكنولوجيا جميعهم، وأخصّ بالذكر فارس أبو صالح، الذين شكّلوا بيئةً عملٍ مشجّعةٍ على الجدّ والمثابرة.

إهداء

إلى ذكرى والديّ

إلى زوجتي وأولادي

إلى كلّ الطلاب الذين تعاقبوا على المعهد العالي للعلوم التطبيقيّة والتكنولوجيا والذين كانوا مصدر إلهام لي، وإلى كلّ طالب يسعى إلى فهم الرياضيّات بعمق، وإلى كلّ مدرّس يرى في التعليم رسالة قبل أن يكون مهنة.

فهرس المحتويات

الفصل الأوّل: متتاليات ومتسلسلات التوابع

الفصل الثاني: التكاملات المحدودة والتوابع الأصليّة

الفصل الثالث: التكاملات المعمّمة والتوابع المعرّفة بواسطة تكاملات

الفصل الرابع: الفضاءات الشعاعيّة المنظّمة

الفصل الخامس: التوابع لعدّة متحوّلات

مقدّمة:

يُعدّ التحليل الرياضي أحد الأركان الأساسية في بناء الفكر الرياضي الحديث، لما له من دور محوريّ في تأسيس المفاهيم الدقيقة المتعلقة بالتقارب، والاستمرار، والاشتقاق، والتكامل.

وهو لا يقتصر على كونه أداة لحل المسائل التطبيقيّة، بل يتجاوز ذلك إلى كونه إطارًا مفاهيميًّا يضبط البنية المنطقية للرياضيات نفسها .

يمثّل هذا الكتاب خطوة متقدّمة في مسار تعلّم التحليل الرياضيّ، وهو مخصّصٌ لطلاب السنة الثانية في الاختصاصات العلميّة والهندسيّة، ممن اكتسبوا أساسيات التحليل الرياضيّ، ويطمحون إلى بناء معرفة أعمق وأكثر تماسكًا بالمفاهيم والنظريّات.

ينقسم هذا الكتاب إلى ستّة فصول مترابطة:

متتاليات ومتسلسلات التوابع: في هذا الفصل عرضٌ لأنواع التقارب المختلفة، البسيط والمنتظم والمنتظم على كلّ مجال متراصّ والتقارب بالنظيم، تليها دراسة للخواص التحليلية، كالاستمرار وقابليّة الاشتقاق، للتوابع المعرّفة كنهاية متتالية توابع أو مجموع متسلسلة توابع.

التكاملات المحدودة والتوابع الأصليّة: خُصّص هذا الفصلُ لتعريف التكامل المحدودِ لتابعٍ مضبوط، وكذلك لتعريف التابع الأصلي لتابعٍ مستمرّ قِطَعيًّا محليًّا.

التكاملات المعمّمة والتوابع المعرّفة بواسطة تكاملات: يعالج هذا الفصل تقارب التكاملات المعمّمة للتوابع المضبوطة ، وذلك بالمقارنة مع تكاملات معمّمة مرجعيّة في أغلب الأحيان، ثمّ يتناول التكاملات التابعة لوسيط حيث تُستخدم مبرهنة لوبيغ في تعيين الخواصّ التحليليّة للتوابع المعرّفة بواسطة تكاملات.

الفضاءات الشعاعيّة المنظّمة: يتضمّن هذا الفصل دراسةً للفضاءات الشعاعيّة المنظّمة، ونهايات المتتاليات والتوابع في تلك الفضاءات. ويمكن النظر إلى هذا الفصل بصفته تعميمًا وتعميقًا لأفكار الفصل الأوّل وأساسًا لدراسة التوابع لعدّة متحولات في الفصل التالي. لقد ارتأينا أن نعرّف معظم المفاهيم الطبولوجيّة اعتمادًا على المتتاليات؛ وذلك لخبرة الطالب فيها، من جهة، ولسهولة الحصول على كثير من النتائج باستخدامها من جهةٍ أخرى.

التوابع لعدّة متحوّلات: هنا تُفصّل خواص التوابع الحقيقيّة لعدّة متحوّلات حقيقيّة، حيث تُعرّف المشتقّات الجزئيّة، وقابليّة المفاضلة لتلك التوابع، وتُعطى طرائقُ لإيجاد القيم الحدّيّة المحليّة والحدّين الأعلى والأدنى للتوابع الحقيقيّة لعدّة متحوّلات حقيقيّة. بعد ذلك ننتقل إلى دراسة التوابع الشعاعيّة لعدّة متحولات حقيقيّة ومبرهنتي التابع العكسي المحلّيّ والتابع الضمنيّ وصولاً إلى مضاريب لاغرانج، وتطبيقاتها.

التكاملات على طريق والتكاملات المضاعفة: يتطرّق هذا الفصلُ إلى أبرز النتائج في التكاملات المضاعفة والتكاملات على منحنٍ.

حرصنا في هذا الكتاب على الموازنة بين البُعد الصارم للبرهان الرياضيّ، والبعد البنائيّ التربويّ. فكل فصل يبدأ بتمهيد للمفاهيم الأساسيّة، يليه عرضٌ للمبرهنات مع إثباتاتها، ثم أمثلة توضيحية، ليُختتم بمجموعة منتقاة من التمارين التي تراعي تدرّج الصعوبة، وتستهدف تعزيز البنية المفاهيميّة وتنمية الحسّ البرهانيّ.

هذا الكتاب ليس مجرّد تجميع للمحتوى النظريّ، بل هو محاولة لتقديم التحليل ككلٍّ مترابط، حيث يُمهد كل مفهوم لما يليه، وتُبنى البنى اللاحقة على أسس واضحة سابقة. لذا ننصح القارئ بالتفاعل النشيط مع النصّ، من خلال محاولة صياغة البراهين بنفسه قبل قراءتها، ومناقشة التمارين والعودة للمفاهيم عند الحاجة، على أن لا يتعامل مع التمارين كاختبار للحفظ بل كمساحة للتفكير والإبداع.

آمل أن يجد الطالب في هذا المؤلَّف دعامة قويّة لفهم التحليل الرياضيّ، لا كأدوات مجرّدة، بل كنظام حيّ من المفاهيم المترابطة التي تنير جانبًا جوهريًا من الفكر الرياضي المعاصر.

دمشق الثالث من آب 2025

خالد حلاوه

الفصل الأوّل: متتاليات ومتسلسلات التوابع

في هذا الفصل I مجالٌ غير تافهٍ من $\mathbb{R}$، و $\mathbb{k}$ هو أحد الحقلين $\mathbb{R}$ أو $\mathbb{C}$

تهيئة

تعريف 1. لتكن (z_n) متتالية من عناصر $\mathbb{C}$ و $l \in \mathbb{C}$. نقول إنّ (z_n) **متقاربة** من l إذا وفقط إذا تقاربت المتتالية الحقيقيّة $(|z_n - l|)$ من الصفر. أي إذا تحقّق الشرط

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |z_n - l| < \varepsilon$$

ونرمز إلى ذلك بالرمز $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ أو $\lim_{n\to\infty} z_n = l$.

ونقول إنّ (z_n) تحقّق شرط كوشي إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m,n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon$$

مبرهنة 1. لتكن (z_n) متتالية من عناصر $\mathbb{C}$ و $l \in \mathbb{C}$. عندئذٍ تتقارب (z_n) من l إذا وفقط إذا تقاربت المتتالية $(\mathrm{Re}(z_n))$ من $\mathrm{Re}(l)$ و المتتالية $(\mathrm{Im}(z_n))$ من $\mathrm{Im}(l)$.

الإثبات:

نضع $x_n = \mathrm{Re}(z_n), y_n = \mathrm{Im}(z_n)$ و $a = \mathrm{Re}(l), b = \mathrm{Im}(l)$. ينتج الإثبات مباشرةً من المتراجحة المضاعفة الآتية

$$\max(|x_n - a|, |y_n - b|) \leq |z_n - l| \leq \sqrt{2}\max(|x_n - a|, |y_n - b|) \quad \blacksquare$$

مبرهنة 2. لتكن (z_n) متتالية من عناصر $\mathbb{C}$. عندئذٍ تتقارب المتتالية (z_n) إذا وفقط إذا حقّقت شرط كوشي.

الإثبات:

نفترض أنّ (z_n) متقاربة من l، وليكن $\varepsilon > 0$، يوجد عندئذٍ $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث أنّه إذا كان $n \geq n_0$ كان $|z_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. فإذا كان $m,n \in \mathbb{N}$ بحيث $n \geq m \geq n_0$ فإنّ

$$|z_n - z_m| = |(z_n - l) - (z_m - l)| \leq |z_n - l| + |z_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

إذن (z_n) تحقّق شرط كوشي.

نفترض الآن أنّ (z_n) تحقّق شرط كوشي. نضع $x_n = \mathrm{Re}(z_n), y_n = \mathrm{Im}(z_n)$. من المتراجحة $\max(|x_n - a|, |y_n - b|) \le |z_n - l|$ نجد أنّ كلًّا من المتتاليتين الحقيقيّتين (x_n) و (y_n) تحقّق شرط كوشي فهما متقاربتان من a و b على الترتيب، ومنه (z_n) متقاربة من $l = a + ib$. ■

تعريف 2. لتكن (z_n) متتالية من عناصر $\mathbb{C}$ و $L \in \mathbb{C}$. نقول إنّ المتسلسلة $\left(\sum z_n\right)$ **متقاربة** إذا وفقط إذا تقاربت متتالية مجاميعها الجزئيّة $\left(S_n = \sum_{k=0}^{n} z_k\right)$ ونسمّي نهايتها $L = \lim_{n\to\infty} S_n$ مجموع المتسلسلة، ونكتب $L = \sum_{n=0}^{\infty} z_n$.

ونقول إنّ المتسلسلة $\left(\sum z_n\right)$ **متقاربة بالإطلاق** إذا وفقط إذا كانت المتسلسلة الحقيقيّة $\left(\sum |z_n|\right)$ متقاربة.

نترك للقارئ إثبات النتيجة الآتية وإعطاء مثال يبيّن أنّ عكسها غير صحيح.

نتيجة: كلّ متسلسلة حدودها في $\mathbb{C}$ متقاربة بالإطلاق تكون متقاربة.

تعريف 3. ليكن التابع $f : I \to \mathbb{C}$، وليكن $t_0 \in \overline{I} = I \cup \{\inf I, \sup I\}$. نقول إنّ f يقبل $l \in \mathbb{C}$ **نهايةً** له عند t_0 إذا وفقط إذا كان $\lim_{t\to t_0} |f(t) - l| = 0$. نرمز إلى ذلك بالرمز $\lim_{t\to t_0} f(t) = l$.

تعريف 4. ليكن التابع $f : I \to \mathbb{C}$ وليكن $t_0 \in I$.

نقول إنّ f **مستمرّ** عند t_0 إذا وفقط إذا كان $\lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0)$. ونقول إنّ f مستمرّ إذا وفقط إذا كان مستمرًّا عند كلّ نقطة $t \in I$.

ونقول إنّ f **اشتقاقيّ** عند t_0 إذا وفقط إذا قبل التابع

$$\Delta : I \setminus \{t_0\} \to \mathbb{C}, t \mapsto \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$$

نهايةً $l \in \mathbb{C}$ عند t_0 ونكتب في هذه الحالة $f'(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = l$.

ونقول إنّ f اشتقاقيّ إذا وفقط إذا كان اشتقاقيًّا عند كلّ نقطة $t \in I$.

تعريف 5. ليكن $f : I \to \mathbb{C}$ تابعاً مستمرّاً، و $a, b \in I$. نعرّف **التكامل المحدود** للتابع f من a إلى b بالشكل

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,\mathrm{dt} + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,\mathrm{dt}$$

مثال: $\int_0^{\pi/2} e^{it}\,\mathrm{dt} = 1 + i$.

مبرهنة 3. ليكن f و g تابعين عقديّين مستمرّين على I، وليكن $(a,b,c) \in I^3$، و $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. عندئذٍ تكون القضايا الآتية صحيحةً

1. $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = \int_a^c f(t)\,\mathrm{dt} + \int_c^b f(t)\,\mathrm{dt}$.
2. $\int_a^b \big(\lambda \cdot f(t) + \mu \cdot g(t)\big)\,\mathrm{dt} = \lambda \cdot \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} + \mu \cdot \int_a^b g(t)\,\mathrm{dt}$.
3. إذا كان $a \le b$، فإنّ: $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}\right| \le \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{dt}$.

الإثبات

سنكتفي بإثبات (3.) لأنّ (1.) و (2.) واضحتان.

3. نضع $r = \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}\right|$ ولتكن θ بحيث $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = re^{i\theta}$. عندئذٍ

$$\begin{aligned} r &= e^{-i\theta}\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = \int_a^b e^{-i\theta} f(t)\,\mathrm{dt} \\ &= \mathrm{Re}\left[\int_a^b e^{-i\theta} f(t)\,\mathrm{dt}\right] = \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(t))\,\mathrm{dt} \\ &\le \int_a^b \left|e^{-i\theta} f(t)\right|\mathrm{dt} = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{dt} \end{aligned}$$

وهو المطلوب إثباته. ■

نخلص مما سبق إلى القول إنّ دراسة المتتاليات والمتسلسلات العقديّة والتوابع العقدية لمتحوّل حقيقي تؤول إلى دراسة مثيلاتها الحقيقيّة.

1. تعريفات ومفاهيم أساسيّة

تعريف 6. نسمّي **متتالية توابع** معرّفة على I كلّ تطبيق

$$f:\mathbb{N}\to\mathcal{F}(I,\Bbbk), n\mapsto f_n$$

حيث يشير الرمز $\mathcal{F}(I,\Bbbk)$ إلى مجموعة التوابع المعرّفة على I وتأخذ قيمها في $\Bbbk$. يسمّى العنصر f_n الحدّ ذا الدليل n للمتتالية التي نرمز إليها بالرمز $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ أو (f_n) إن لم يكن هناك التباس.

تعريف 7. لتكن (f_n) متتالية توابع معرّفة على I، وليكن f عنصراً من $\mathcal{F}(I,\Bbbk)$. نقول إنّ المتتالية (f_n) **متقاربة ببساطة** من f، إذا وفقط إذا كانت المتتالية العدديّة $\big(f_n(x)\big)$ متقاربة من $f(x)$ وذلك أيّاً كان x من I، ونرمز إلى ذلك بالرمز $f_n \xrightarrow{S} f$. وإذا كانت $B \subset I$ مجموعة جزئيّة غير خالية من I، فإنّنا نقول إنّ (f_n) متقاربة ببساطة من f على B إذا وفقط إذا كانت المتتالية العدديّة $\big(f_n(x)\big)$ متقاربة من $f(x)$ وذلك أيّاً كان x من B. ونرمز إلى ذلك بالرمز $f_n \xrightarrow[B]{S} f$.

ملاحظة 1. يُعتبر التقارب البسيط، كما تشير التسمية، من أبسط أنواع تقارب متتاليات التوابع، فدراسته تؤول مباشرةً إلى دراسة نهايات متتاليات عدديّة. ولكن ما هي الخواصّ التحليليّة التي تبقى عند المرور إلى النهاية البسيطة؟

بشكلٍ أدقّ لتكن (f_n) متتالية توابع على المجال I، ومتقاربة ببساطة من تابعٍ f.

أ. إذا كانت التوابع f_n مستمرّة على I، فهل يكون f مستمرّاً على I؟

ب. إذا كانت التوابع f_n مستمرّة على I، و $(a,b)\in I^2$، فهل تتحقّق الخاصّة التالية:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \text{ ؟}$$

ج. إذا كانت التوابع f_n اشتقاقيّة على I، فهل يكون f اشتقاقيّاً على I؟

سنرى في بعض الأمثلة أنّ الإجابات عن الأسئلة السابقة واحدة وهي: "ليس بالضرورة". وعليه فإنّ التقارب البسيط لا يكفي لضمان مرور الخواصّ الرئيسيّة للتوابع إلى النهاية، ومن هنا تأتي أهميّة إيجاد أنواع أخرى من التقارب يحافظ على تلك الخواص عند المرور إلى النهاية.

2. التقارب المنتظم

تعريف 8. لتكن (f_n) متتالية توابع معرّفة على I، وليكن f عنصراً من $\mathcal{F}(I,\mathbb{k})$. لتكن المتتالية (μ_n) من عناصر $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ والمعرّفة بالعلاقات

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n = \sup_{x \in I} \left| f_n(x) - f(x) \right|$$

نقول إنّ المتتالية (f_n) **متقاربة بانتظام** من f، إذا وفقط إذا تقاربت المتتالية (μ_n) من الصفر. نعبّر عن ذلك بالرمز $f_n \xrightarrow{U} f$.

وإذا كانت $B \subset I$ غير خالية، فإنّنا نعرّف المتتالية (μ_n^B) من عناصر $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ والمعرّفة بالعلاقات

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n^B = \sup_{x \in B} \left| f_n(x) - f(x) \right|$$

ونقول إنّ (f_n) متقاربة بانتظام من f على B إذا وفقط إذا تقاربت المتتالية (μ_n^B) من الصفر، ونرمز إلى ذلك بالرمز $f_n \xrightarrow[B]{U} f$.

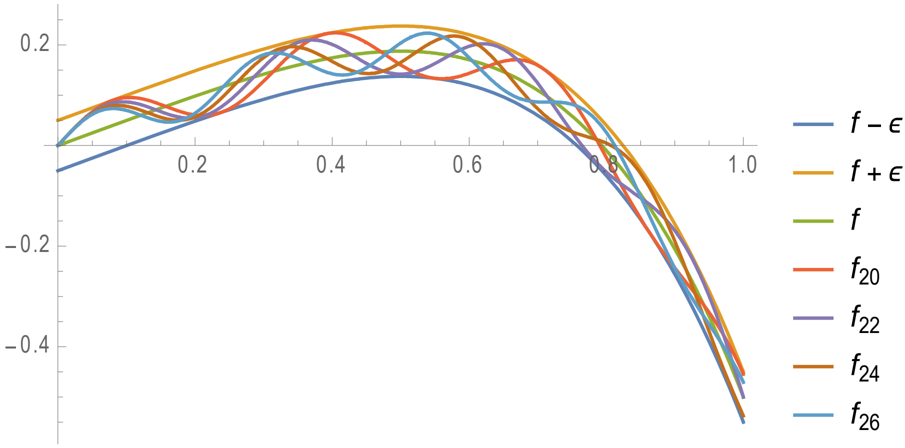
ملاحظة 2. يُعرّف المقدار $\mu_n = \sup_{x \in I} \left| f_n(x) - f(x) \right|$ **مسافةً** بين f و f_n، وعليه تتقارب المتتالية (f_n) بانتظام من f إذا وفقط إذا تقاربت متتالية المسافات (μ_n) من الصفر، ويُمكن صياغة هذا الشرط على النحو الآتي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon : n \geq n_0 \Rightarrow \mu_n \leq \varepsilon$$

أو بشكلٍ مكافئٍ:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon : n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \left(\forall x \in I, \left| f_n(x) - f(x) \right| \leq \varepsilon \right)$$

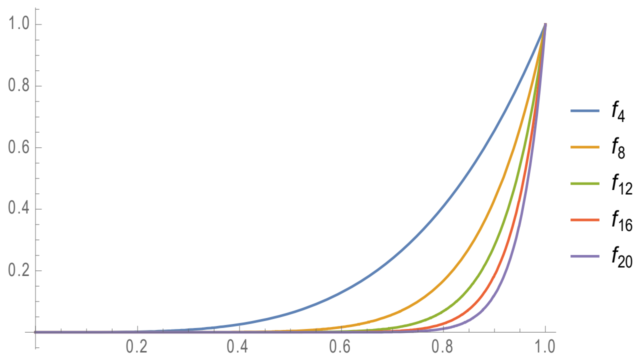
أمّا بيانيّاً فيمكن القول إنّ الخطوط البيانيّة للتوابع f_n تصبح محصورة، بدءاً من حدٍّ معيّن، بين الخطّين البيانيّين للتابعين $f - \varepsilon$ و $f + \varepsilon$.



أمثلة

1. لتكن (f_n) متتالية التوابع المعرّفة على المجال $[0,1]$ بالصيغة $f_n(x) = x^n$. إنّ (f_n) متقاربة ببساطة من التابع $f(x) = E(x)$، ولكن هذا التقارب غير منتظم حيث إنّ المتتالية (μ_n) غير متقاربة من الصفر لأنّ $\mu_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|x^n - E(x)\right| = 1$.

2. لتكن (f_n) متتالية التوابع المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالصيغة $f_n(x) = \arctan(nx)$. إنّ

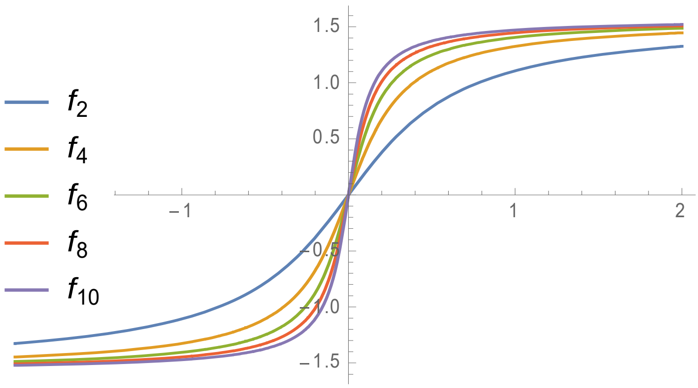


(f_n) متقاربة ببساطة من التابع f المعطى بالصيغة

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}$$

لاحظ أنّ التوابع f_n كلّها اشتقاقيّة على $\mathbb{R}$، أمّا f فليس مستمرّاً (غير مستمرّ عند الصفر).

إنّ (f_n) غير متقاربة بانتظام من f، وذلك لأنّ المتتالية (μ_n) غير متقاربة من الصفر، فبحساب بسيط نجد $\mu_n = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f_n(x) - f(x)\right| = \frac{\pi}{2}$.

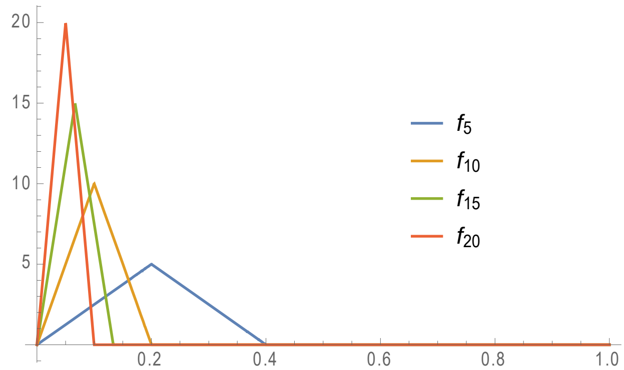


3. لتكن (f_n) متتالية التوابع المعرّفة على $[0,1]$ بالصيغة

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x, & \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n} \\ 0, & \frac{2}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

إنّ $\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$، وإذا كان $x \in]0,1]$ فيوجد عدد طبيعيّ n_0 بحيث $n \ge n_0 \Rightarrow \frac{2}{n} \le x$، ومنه $n \ge n_0 \Rightarrow f_n(x) = 0$، نستنتج أنّ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ في هذه الحالة، ومن ثَمّ تتقارب المتسلسلة (f_n) ببساطة من التابع الصفري، وبحساب بسيط نجد أنّ $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$، ومنه $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$، على حين أنّ $\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x = 0$.

نلاحظ أيضاً أنّ (f_n) غير متقاربة بانتظام من التابع الصفري، وذلك لأنّ $\mu_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| = n$ ، ومنه (μ_n) غير متقاربة من الصفر.



4. لتكن (f_n) متتالية التوابع المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالصيغة

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < n \\ 1, & n \le x \le n+1 \\ 0, & x > n+1 \end{cases}$$

ليكن $x \in \mathbb{R}$ ، إذا كان $n > E(x)+1$ كان $n > x$ وكان $f_n(x) = 0$ ، نستنتج أنّ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ ، ومن ثمّ (f_n) متقاربة ببساطة من التابع الصفري.

لاحظ أنّ التوابع f_n كلّها غير مستمرّة على $\mathbb{R}$ ، ولكن النهاية البسيطة للمتتالية مستمرّة على $\mathbb{R}$.

من جهةٍ أخرى، (f_n) غير متقاربة بانتظام من التابع الصفري، وذلك لأنّ $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - 0| = 1$.

5. لتكن (f_n) متتالية التوابع المعرّفة على المجال $\mathbb{R}_+$ بالصيغة

$$\forall x \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

نعلم أنّ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = e^x$ ، $\forall x \in \mathbb{R}_+$. إذن $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}_+]{S} f$ حيث f هو التابع المعرّف على $\mathbb{R}_+$ بالصيغة $f(x) = e^x$ ، ولكن (f_n) غير متقاربة بانتظام من f لأنّ $\mu_n = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} \left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - e^x\right| = +\infty$ ، إذ تكفي ملاحظة أنّ

$$\lim_{x\to\infty}\left(e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right) = +\infty$$

لإثبات ذلك.

6. نعرّف المتتالية (f_n) على $[1,\infty[$ بالصيغة $f_n(x) = \frac{n}{nx+1}$ ، و f تابع معرّف بالصيغة $f(x) = \frac{1}{x}$ على المجال نفسه. نتحقّق بسهولة أنّ $f_n \xrightarrow[[1,\infty[]{S} f$. لدراسة التقارب المنتظم للمتتالية (f_n) من f نحسب $\mu_n = \sup\limits_{x\in[1,\infty[} |f_n(x) - f(x)|$ فنجد أنّ $\mu_n = \frac{1}{n+1}$ أي إنّ $\mu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ، ومن ثَمّ $f_n \xrightarrow[[1,\infty[]{U} f$.

المبرهنة الآتية تبيّن العلاقة بين التقارب البسيط والتقارب المنتظم.

مبرهنة 4. لتكن (f_n) متتالية توابع معرّفة على I ، وليكن f عنصراً من $\mathcal{F}(I,\mathbb{k})$. نفترض أنّ (f_n) متقاربة بانتظام من f . عندئذٍ:

1. (f_n) متقاربة ببساطة من f .
2. إذا كانت (x_n) متتالية من عناصر I كانت المتتالية $\left(\left|f_n(x_n) - f(x_n)\right|\right)$ متقاربة من الصفر.

الإثبات

أيّاً كان n من $\mathbb{N}$ نضع $\mu_n = \sup\limits_{t\in I} |f_n(t) - f(t)|$.

1. ليكن x عنصراً من I. لدينا $\forall n \in \mathbb{N}, \left|f_n(x) - f(x)\right| \le \mu_n$، ومن ثَمّ تتقارب المتتالية $\left(f_n(x)\right)$ من $f(x)$، ومنه (f_n) متقاربة ببساطة من f.
2. نتيجة واضحة من المتراجحة $\forall n \in \mathbb{N}, \left|f_n(x_n) - f(x_n)\right| \le \mu_n$. ■

ملاحظة 3.

1. تبيّن المبرهنة السابقة أنّ التقارب البسيط شرطٌ لازم للتقارب المنتظم، ولكن المثالين السابقين (.1) و (.2) يثبتان أنّه ليس كافياً. ومع ذلك فإنّ التقارب البسيط يشكّل أساساً لدراسة التقارب المنتظم من خلال معرفة النهاية.
2. إذا كانت (f_n) متقاربة ببساطة من f، واستطعنا إيجاد متتالية (x_n) من عناصر A بحيث لا تتقارب المتتالية $\left(\left|f_n(x_n) - f(x_n)\right|\right)$ من الصفر، فعندئذ لا تكون المتتالية (f_n) متقاربة بانتظام من f، ومن ثَمّ (f_n) غير متقاربة بانتظام.

أمثلة

1. لتكن (f_n) متتالية التوابع المعرّفة على المجال $]0,1]$ بالصيغة $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = (1+nx)^{\frac{1}{nx}}$. إنّ (f_n) متقاربة ببساطة من التابع الثابت $f \equiv 1$.

   نتأمّل المتتالية $\left(x_n = \dfrac{1}{n}\right)$، إنّ المتتالية $\left(\left|f_n(x_n) - f(x_n)\right| = 1\right)$ غير متقاربة من الصفر، ومنه (f_n) غير متقاربة بانتظام من f.
2. لتكن (f_n) متتالية التوابع المعرّفة على المجال $]0,\infty[$ بالصيغة $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = \dfrac{nx}{n^2 + x^2}$.

   إنّ (f_n) متقاربة ببساطة من التابع الصفري $f \equiv 0$.

   لنتأمّل المتتالية $(x_n = n)$، إنّ المتتالية $\left(\left|f_n(x_n) - f(x_n)\right|\right)$ غير متقاربة من الصفر، ومنه (f_n) غير متقاربة بانتظام من f.

تعريف 9. لتكن (f_n) متتالية توابع معرّفة على مجالٍ I، نقول إنّ (f_n) تحقّق **شرط كوشي بانتظام** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط : أيّاً كان $0<\varepsilon$، وُجِد $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ بحيث

$$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, m \geq n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \left(\forall x \in I, \left|f_n(x) - f_m(x)\right| < \varepsilon\right)$$

مبرهنة 5. لتكن (f_n) متتالية توابع معرّفة على I، عندئذ تكون (f_n) متقاربة بانتظام إذا وفقط إذا حقّقت شرط كوشي بانتظام.

الإثبات

نفترض أنّ (f_n) متقاربة بانتظام من التابع f. ليكن $\varepsilon > 0$، عندئذٍ يوجد $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ بحيث $n \geq n_\varepsilon, \forall x \in I, \left|f_n(x) - f(x)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$، فإذا كان $m \geq n \geq n_\varepsilon$ فإنّه أيّاً كان $x \in I$ كان

$$\begin{aligned}\left|f_n(x) - f_m(x)\right| &\leq \left|f_n(x) - f(x)\right| + \left|f(x) - f_m(x)\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

ومن ثمّ (f_n) تحقّق شرط كوشي بانتظام.

وبالعكس، نفترض أنّ (f_n) تحقّق شرط كوشي بانتظام. ليكن $\varepsilon > 0$، يوجد عندئذٍ $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ بحيث $m \geq n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \forall x \in I, \left|f_n(x) - f_m(x)\right| < \varepsilon$، نستنتج من ذلك أنّه أيّاً كان x من I فإنّ المتتالية $\left(f_n(x)\right)$ من عناصر $\mathbb{k}$ تحقّق شرط كوشي، فهي متقاربة من عنصرٍ من $\mathbb{k}$. نعرّف إذن التابع $f : I \to \mathbb{k}, x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. من الواضح أنّ المتتالية (f_n) متقاربة ببساطة من f. لنثبت أنّ هذا التقارب منتظم. ليكن m و n عددين طبيعيّين بحيث $m \geq n \geq n_\varepsilon$ عندئذٍ تتحقّق المتراجحة $\forall x \in I, \left|f_n(x) - f_m(x)\right| < \varepsilon$ نجعل m تسعى إلى $+\infty$ في المتراجحة الأخيرة فنجد $\forall x \in I, \left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \varepsilon$، وهذا يعني أنّ (f_n) متقاربة بانتظام من f، وهو المطلوب إثباته.

■

تعريف 10. نقول عن مجالٍ $I \subset \mathbb{R}$ إنّه **متراصّ** إذا وفقط إذا كان مغلقاً ومحدوداً؛ أي: إذا وُجِد عددان حقيقيّان $a \leq b$ بحيث $I = [a,b]$.

تعريف 11. لتكن (f_n) متتالية توابع معرّفة على مجالٍ I، نقول إنّ (f_n) متقاربة **بانتظام على كل مجال متراصّ** من التابع $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{k})$ ، إذا وفقط إذا تقاربت المتتالية التي حدّها العام $\sup_{t\in[a,b]}\left|f_n(t)-f(t)\right|$ من الصفر، وذلك أيّاً كان المجال المتراص $[a,b]$ المحتوى في I.

نتيجة

إذا كان المجال I متراصّاً، كان التقارب المنتظم مكافئاً للتقارب المنتظم على كلّ مجالٍ متراصّ.

مبرهنة 6. لتكن (f_n) متتالية توابع معرّفة على I، عندئذ :

1. إذا كانت (f_n) متقاربة بانتظام من التابع f، كانت متقاربة بانتظام على كل مجال متراصّ من f.
2. إذا كانت (f_n) متقاربة بانتظام على كل مجال متراصّ من f ، كانت متقاربة ببساطة من f.

الإثبات

1. ليكن $I \supset [a,b]$ مجالاً متراصّاً. نعرّف المتتاليتين

$$\nu_n = \sup_{x\in[a,b]}\left|f_n(x)-f(x)\right| \quad \text{و} \quad \mu_n = \sup_{x\in I}\left|f_n(x)-f(x)\right|$$

إنّ التقارب المنتظم للمتتالية (f_n) من f يقتضي تقارب المتتالية (μ_n) من الصفر، ومن المتراجحة $0 \le \nu_n \le \mu_n$ نستنتج أنّ المتتالية (ν_n) متقاربة من الصفر، ومنه $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{U} f$، وعليه فالمتتالية (f_n) متقاربة من f بانتظام على كل مجال متراصّ.

2. لتكن $a \in I$، لمّا كانت (f_n) متقاربة من f بانتظام على كل مجال متراصّ، فهي متقاربة بانتظام على المجال $[a,a]=\{a\}$، ومنه $\left|f_n(a)-f(a)\right|$ متقاربة من الصفر أو $(f_n(a))$ متقاربة من $f(a)$، ومن ثمّ (f_n) متقاربة ببساطة من f.■

ملاحظة 4. إنّ عكس الاقتضائين الواردين في المبرهنة السابقة خاطئ، وهذا ما يبيّنه المثالان الآتيان.

مثالان

1. لتكن متتالية التوابع (f_n) المعرّفة على المجال $[0,1[$ بالصيغة $f_n(x) = x^n$. إنّ (f_n) متقاربة ببساطة من التابع الصفري، ولكنّها غير متقاربة بانتظام. ليكن $[a,b]$ مجالاً محتوًى في $[0,1[$ عندئذٍ $\nu_n = \sup_{x\in[a,b]} \left|x^n - 0\right| = b^n$، ولأنّ $0 \le b < 1$ فإنّ $\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$، ومنه $f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{U} 0$، ومن ثَمّ (f_n) متقاربة بانتظام على كلّ مجال متراصّ.

2. رأينا في مثالٍ سابق أنّ متتالية التوابع (f_n) المعرّفة على المجال $[0,1]$ بالصيغة $f_n(x) = x^n$ متقاربة ببساطة، وهي غير متقاربة بانتظام على $[0,1]$، فهي ليست متقاربة بانتظام على كلّ مجال متراصّ.

3. التقارب المنتظم والاستمرار

لاحظنا في الفقرة السابقة أنّ التقارب البسيط لا يكفي لضمان استمرار نهاية متتالية من التوابع المستمرّة. في هذه الفقرة سنثبت أنّ التقارب المنتظم شرطٌ كافٍ لكي تحافظ نهاية متتالية من التوابع على خاصّيّة الاستمرار.

مبرهنة 7. (مبادلة النهايات) لتكن (f_n) متتالية توابع معرّفة على I، و f تابع معرّف على I، وليكن $a \in \overline{I} = I \cup \{\inf I, \sup I\}$، و (l_n) متتالية من عناصر $\mathbb{k}$، و $l \in \mathbb{k}$. نفترض أنّ:

1. (f_n) متقاربة بانتظام من f.
2. أيّاً كان العدد الطبيعي n كان $\lim_{x\to a} f_n(x) = l_n$.
3. $\lim_{n\to\infty} l_n = l$.

عندئذٍ يقبل التابع f النهاية l عند a؛ أي: $\lim_{x\to a} f(x) = l$. أو بشكل آخر

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

الإثبات

سنورد الإثبات في حالة a عدد حقيقيّ، وهذا الإثبات في الحالة العامّة متشعّب، ولكنّه مشابه لهذه الحالة.

ليكن $\varepsilon > 0$. لمّا كانت (f_n) متقاربة بانتظام من f، و (l_n) متقاربة من l فإنّه يوجد عدد طبيعيّ n_0 بحيث يتحقّق

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left(\left|l_n - l\right| < \frac{\varepsilon}{3}\right) \wedge \left(\forall x \in I, \left|f_n(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

وبشكلٍ خاص

$$\left(\left|l_{n_0} - l\right| < \frac{\varepsilon}{3}\right) \wedge \left(\forall x \in I, \left|f_{n_0}(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

من جهةٍ أخرى، إنّ $\lim\limits_{x \to a} f_{n_0}(x) = l_{n_0}$ فيوجد $\delta > 0$ بحيث

$$x \in I \wedge \left|x - a\right| < \delta \Rightarrow \left|f_{n_0}(x) - l_{n_0}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

فإذا كان x عنصراً من I يحقّق $\left|x - a\right| < \delta$ فإنّ

$$\begin{aligned}\left|f(x) - l\right| &\leq \left|f(x) - f_{n_0}(x)\right| + \left|f_{n_0}(x) - l_{n_0}\right| + \left|l_{n_0} - l\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

ومن ثَمّ $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$، وهو المطلوب إثباته. ■

ملاحظة 5. تبقى نتيجة المبرهنة السابقة صحيحة في حالةٍ مهمّة وهي عندما تكون (l_n) متتالية من عناصر $\overline{\mathbb{R}}$ و $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

مبرهنة 8. لتكن (f_n) متتالية توابع معرّفة على I، ومتقاربة بانتظام من $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{k})$، و a عنصراً من I. نفترض أنّ التوابع f_n كلّها مستمرّة عند a. عندئذٍ يكون f مستمرّاً عند a.

الإثبات

إنّ (f_n) متقاربة بانتظام من f فهي متقاربة ببساطة ومنه $\lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a)$. من جهةٍ أخرى، أيّا كان العدد الطبيعي n فإنّ f_n مستمرّ عند a، إذن $\lim_{x\to a} f_n(x) = f_n(a)$.

نطبّق المبرهنة السابقة مع $l = f(a)$، و $\forall n \in \mathbb{N}, l_n = f_n(a)$، فنجد أنّ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$، ومنه f مستمرّ عند a . ■

مبرهنة 9. (الاستمرار) لتكن (f_n) متتالية توابع معرّفة ومستمرّة على I، ومتقاربة بانتظام على كلّ مجال متراصّ من التابع $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{k})$. عندئذٍ يكون f مستمرًّا على I .

الإثبات

ليكن $a \in I$، عندئذٍ يوجد $0 < \delta$ بحيث يكون المجال J المعرّف كما يأتي:

إذا كان $a = \inf I$ كان $J = [a, a + \delta]$.

إذا كان $a \in I \setminus \{\inf I, \sup I\}$ كان $J = [a - \delta, a + \delta]$.

إذا كان $a = \sup I$ كان $J = [a - \delta, a]$.

محتوىً في I .

بتطبيق المبرهنة السابقة على المجال J نستنتج أنّ f مستمرّ على J، وعليه يقبل f العنصر $f(a)$ نهايةً له عند a فهو مستمرّ عند a . نستنتج إذن أنّ f مستمرّ على I . ■

4. التقارب المنتظم والتكامل المحدود

مبرهنة 10. لتكن (f_n) متتالية من التوابع المستمرّة على I، ومتقاربة بانتظام على كلّ مجالٍ متراص من التابع f المعرّف على I، وليكن $(a,b) \in I^2$ مع $a \le b$. عندئذٍ تكون المتتالية $\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$ متقاربة من $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

الإثبات

إنّ (f_n) متتالية من التوابع المستمرّة على I ومتقاربة بانتظام على كلّ مجال متراصّ من التابع f . نستنتج من ذلك أنّ f تابعٌ مستمرّ. ليكن $(a,b) \in I^2$ بحيث $a \le b$. نضع

$\nu_n = \sup_{t\in[a,b]} \left|f_n(t) - f(t)\right|$. إنّ المتتالية (ν_n) متقاربة من الصفر، وذلك بسبب التقارب المنتظم للمتتالية (f_n) من f على كلّ مجال متراصّ، ومن المتراجحة

$$\left|\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{dt} - \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}\right| \le \int_a^b \left|f_n(t) - f(t)\right|\mathrm{dt} \le \int_a^b \nu_n\,\mathrm{dt} = (b-a)\nu_n$$

نستنتج أنّ المتتالية $\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{dt}\right)$ متقاربة من $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ وهو المطلوب إثباته. ■

مثال

لتكن متتالية التوابع (f_n) المعرّفة على المجال $[0,1]$ بالصيغة $f_n(x) = \dfrac{x^n}{2^n(2-x)}$. يمكننا بسهولة إثبات التقارب المنتظم للمتتالية (f_n) من التابع الصفري، ومنه نجد أنّ المتتالية $\left(\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{2^n(2-t)}\mathrm{dt}\right)$ متقاربة من $\int_0^1 0\,\mathrm{dt} = 0$.

5. التقارب المنتظم والاشتقاق

مبرهنة 11. (الاشتقاق) لتكن (f_n) متتالية من التوابع القابلة للاشتقاق على I، ومتقاربة ببساطة من $f \in \mathcal{F}(I,\Bbbk)$. نفترض إضافةً إلى ذلك أنّ المتتالية (f'_n) متقاربة بانتظام على كلّ مجالٍ متراصٍّ من تابع $g \in \mathcal{F}(I,\Bbbk)$ عندئذٍ تتقارب المتتالية (f_n) بانتظام على كلّ مجالٍ متراصٍّ من التابع f، ويكون f اشتقاقيّاً على I ويحقّق $f' = g$.

الإثبات

أوّلاً: حالة $\Bbbk = \mathbb{R}$:

ليكن K مجالاً متراصًّا محتوًى في I، وليكن $x_0 \in I$، و $[a,b]$ مجالاً متراصًّا محتوىً في I ويحتوي كلًّا من K و x_0. إنّ $(f_n(x_0))$ متقاربة فهي تحقّق شرط كوشي. وكذلك فإنّ (f'_n) متقاربة بانتظام على $[a,b]$ فهي تحقّق شرط كوشي بانتظام.

ليكن $0 < \varepsilon$، يوجد عدد طبيعيّ n_0 بحيث إذا كان $m \ge n \ge n_0$، كان:

$$\left(\left|(f_m - f_n)(x_0)\right| < \frac{\varepsilon}{2}\right) \wedge \left(\forall t \in [a,b], \left|(f'_m - f'_n)(t)\right| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)$$

ليكن $x \in K$. لمّا كان $(f_n - f_m)$ اشتقاقيّاً على I ، أمكننا تطبيق مبرهنة التزايدات المحدودة بين x_0 و x ، وعليه يوجد c_x بين x_0 و x بحيث

$$(f_m - f_n)(x) = (f_m - f_n)(x_0) + (x - x_0)(f'_m - f'_n)(c_x)$$

نستنتج إذن أنّ:

$$\begin{aligned}\left|f_m(x) - f_n(x)\right| &\le \left|f_m(x_0) - f_n(x_0)\right| + \left|x - x_0\right| \cdot \sup_{t\in[a,b]} \left|f'_m(t) - f'_n(t)\right| \\ &\le \left|f_m(x_0) - f_n(x_0)\right| + (b-a) \cdot \sup_{t\in[a,b]} \left|f'_m(t) - f'_n(t)\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + (b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \varepsilon\end{aligned}$$

ومن ثَمّ تحقّق (f_n) شرط كوشي بانتظام، فهي متقاربة من f بانتظام على K ، ومن ثَمّ على كلّ مجالٍ متراص.

ليكن الآن $x_0 \in I$ ، لإثبات اشتقاقيّة f عند نقطة $x_0 \in I$ ، سنثبت أنّه إذا كان $x_0 \neq \sup I$ فإنّ f يقبل مشتقًّا من اليمين عند x_0 وأنّ $f_r'(x_0) = g(x_0)$ ، وأنّه إذا كان $x_0 \neq \inf$ فإنّ f يقبل مشتقًّا من اليسار عند x_0 وأنّ $f'_l(x_0) = g(x_0)$.

فإذا كان $x_0 \neq \sup I$ ، وُجد $\delta > 0$ بحيث $J = [x_0, x_0 + \delta] \subset I$.

لتكن متتالية التوابع (g_n) المعرّفة على $J \setminus \{x_0\}$ بالصيغة:

$$g_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}$$

سنثبت أنّ المتتالية (g_n) تحقّق شرط كوشي بانتظام.

ليكن $0 < \varepsilon$ ، يوجد عدد طبيعيّ n_1 بحيث

$$m \ge n \ge n_1 \Rightarrow \forall t \in J, \left|f'_m(t) - f'_n(t)\right| < \varepsilon$$

وذلك لأنّ $(f_n{}')$ متقاربة بانتظام على J .

ليكن $x \in J \setminus \{x_0\}$، و m و n عددين طبيعيّين بحيث $m \geq n \geq n_1$. لمّا كان التابع $f_m - f_n$ اشتقاقيّاً على I، فإنّه يوجد بمقتضى مبرهنة التزايدات المحدودة عددٌ حقيقي c_x بين x_0 و x بحيث

$$g_m(x) - g_n(x) = \frac{(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(x_0)}{x - x_0} = (f'_m - f'_n)(c_x)$$

ومنه

$$\forall x \in J \setminus \{x_0\}, \left|g_m(x) - g_n(x)\right| \leq \sup_{t \in J}\left|f_m{}'(t) - f_n{}'(t)\right| \leq \varepsilon$$

وهذه المتراجحة تُثبت أنّ (g_n) تحقّق شرط كوشي بانتظام، فهي متقاربة بانتظام على $J \setminus \{x_0\}$ من التابع h المعطى بالصيغة

$$h(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

إضافةً إلى ذلك يتحقّق $\forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_{x \to x_0} g_n(x) = f'_n(x_0)$، وكذلك فإن $\lim\limits_{n \to \infty} f_n{}'(x_0) = g(x_0)$، ومنه نستنتج، بتطبيق مبرهنة مبادلة النهايات، أنّ التابع h يقبل $g(x_0)$ نهايةً له عند x_0، وهذا يعني أنّ f يقبل مشتقّاً من اليمين عند x_0 وأنّ قيمة هذا المشتقّ هي $f'_r(x_0) = g(x_0)$.

نفترض الآن أنّ $x_0 \neq \inf I$، يوجد عندئذٍ $\delta > 0$ بحيث $J = [x_0 - \delta, x_0] \subset I$. وبطريقة مماثلة للحالة السابقة نثبت أنّ f يقبل مشتقّاً من اليسار عند x_0 وأنّ قيمة هذا المشتقّ هي $f'_l(x_0) = g(x_0)$، ومن ثمّ f اشتقاقيّ عند x_0 و $f'(x_0) = g(x_0)$. بذا نكون قد أثبتنا أنّ f اشتقاقي عند كلّ نقطة من I وأنّ $\forall x \in I, f'(x) = g(x)$، وهو المطلوب إثباته.

ثانياً: حالة $\mathbb{k} = \mathbb{C}$

نستنتج المطلوب بتطبيق ما سبق على كلّ من متتاليتيّ التوابع الحقيقيّتين $\left(\mathrm{Re}(f_n)\right)$ و $\left(\mathrm{Im}(f_n)\right)$. ■

ملاحظة 6. يمكن صياغة النتيجة الرئيسيّة للمبرهنة السابقة كما يلي: $\forall x \in I, \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$. نعبّر عن ذلك بالقول إنّ مشتق النهاية يساوي نهاية المشتقّ، وهذا طبعاً عندما تتحقّق شروط المبرهنة.

6. مبرهنات التقريب

تعريف 12. نقول عن التابع $f : [a,b] \to \mathbb{k}$ إنّه **درجي**، إذا وفقط إذا وجدت جماعة $(x_k)_{0\le k\le n}$ من عناصر $[a,b]$ تحقّق $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$، وكان f ثابتاً على كلّ مجال $\left]x_{k-1}, x_k\right[$، وذلك أيّاً كان $1 \le k \le n$.

مبرهنة 12. (تقريب تابع مستمرّ بتابع درجيّ) ليكن f تابعاً مستمراً على المجال $[a,b]$ عندئذٍ توجد متتالية من التوابع الدرجيّة (R_n) متقاربة بانتظام من التابع f.

الإثبات

نعرّف متتالية التوابع (R_n) على المجال $[a,b]$ كما يلي:

أيّاً كان $n \in \mathbb{N}^*$، و $x \in [a,b[$، يوجد عدد طبيعي k وحيد $0 \le k \le n-1$ بحيث

$$x \in \left[a + \frac{b-a}{n}k, a + \frac{b-a}{n}(k+1) \right[$$

نضع عندئذٍ $R_n(x) = f\left(a + \frac{b-a}{n}k \right)$ ونضع $R_n(b) = f(b)$. سوف نثبت أنّ متتالية التوابع الدرجيّة (R_n) متقاربة بانتظام من f.

لمّا كان f مستمرّاً على المجال $[a,b]$، فهو مستمرّ بانتظام وذلك بمقتضى مبرهنة Heine.

ليكن $0 < \varepsilon$، يوجد $0 < \delta$ بحيث يتحقّق الاقتضاء

$$x \in [a,b] \wedge |x-y| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \le \varepsilon$$

ليكن $n_0 = E\left(\frac{b-a}{\delta}\right) + 1$، وليكن العدد الطبيعي $n_0 \le n$.

أيّاً كان $x \in [a,b]$، يوجد عدد طبيعي k وحيد $0 \le k \le n$ بحيث $x \in \left[a + \frac{b-a}{n}k, a + \frac{b-a}{n}(k+1)\right[$، ومنه $R_n(x) = f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right)$ ومن ثمّ $\left|R_n(x) - f(x)\right| = \left|f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) - f(x)\right|$. ولمّا كان $\left|a + \frac{b-a}{n}k - x\right| \le \frac{b-a}{n} \le \delta$، فإنّ $\left|R_n(x) - f(x)\right| \le \varepsilon$. نكون بذلك قد أثبتنا أنّ $n \ge n_0 \Rightarrow \forall x \in [a,b], \left|R_n(x) - f(x)\right| \le \varepsilon$، وعليه فإنّ متتالية التوابع الدرجيّة (R_n) متقاربة بانتظام من التابع f. ■

مبرهنة 13. (Weierstrass) ليكن $f : [a,b] \to \mathbb{k}$ تابعاً مستمراً على المجال $[a,b]$ عندئذٍ توجد متتالية من التوابع الحدوديّة $(\tilde{P}_n)$ متقاربة بانتظام من التابع f. حيث $\tilde{P}_n : [a,b] \to \mathbb{k}, x \mapsto P_n(x)$ و (P_n) متتالية كثيرات حدود أمثالها في $\mathbb{k}$.

الإثبات

سنورد الإثبات في حالة المجال $[0,1]$، أمّا الحالة العامّة فتؤول إلى هذه الحالة الخاصّة بأخذ المتحوّل $x = a + t(b-a)$، أي بدراسة التابع $g(t) = f(a + t(b-a))$ المعرّف على المجال $[0,1]$.

أيّاً كان العدد الطبيعي $n \in \mathbb{N}^*$، وأيّاً كان التابع f المستمرّ على $[0,1]$، نعرّف متتالية التوابع $\left(B_n(f)\right)$ المعروفة بمتتالية Bernstein الموافقة للتابع f، وذلك بإعطاء حدّها العام $B_n(f)$ عندما $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n(f) : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k}$$

حيث $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

توطئة

1. إذا كان $f(x) = 1$، كان $B_n(f)(x) = 1$.

2. إذا كان $f(x)=x$ ، كان $B_n(f)(x)=x$.

3. إذا كان $f(x)=x(1-x)$ ، كان $B_n(f)(x)=\frac{n-1}{n}x(1-x)$.

إثبات التوطئة

1. لدينا

$$B_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k\cdot(1-x)^{n-k}=(x+1-x)^n=1$$

2. لدينا في هذه الحالة

$$\begin{aligned}B_n(f)(x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}x^{k+1}(1-x)^{n-1-k}\\&=x(x+1-x)^{n-1}=x\end{aligned}$$

3. في هذه الحالة $B_1(f)(x)=0$ ، وأيّاً كان العدد الطبيعي $n\geq 2$ ، كان

$$\begin{aligned}B_n(f)(x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\cdot\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-1)!}{n(k-1)!(n-k-1)!}x^k(1-x)^{n-k}\\&=\frac{n-1}{n}x(1-x)\cdot\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!}x^k(1-x)^{n-2-k}\\&=\frac{n-1}{n}x(1-x)(x+1-x)^{n-2}=\frac{n-1}{n}x(1-x)\end{aligned}$$

■

أيّاً كان x من المجال $[0,1]$ والعدد الطبيعي $n \in \mathbb{N}^*$، نضع

$$a_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

لدينا

$$\begin{aligned}
a_n(x) &= n^2 \sum_{k=0}^{n} \left(x^2 - 2x\frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2} \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= n^2 x^2 - 2n^2 x \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\qquad + n^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= n^2 x^2 - 2n^2 x^2 + n^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \left(\frac{k}{n} - 1 \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\qquad + n^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= -n^2 x^2 + n^2 x + n^2 \frac{n-1}{n} x(x-1) \\
&= nx(1-x)
\end{aligned}$$

ومن المساواة الاخيرة نجد $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], \left| a_n(x) \right| \le \frac{n}{4}$، وذلك لأنّ $\forall x \in [0,1], x(1-x) \le \frac{1}{4}$.

ليكن الآن $\varepsilon > 0$. نعلم أنّ f مستمرّ على المجال $[0,1]$، فهو مستمرّ بانتظام عليه، وذلك بمقتضى مبرهنة Heine. يوجد إذن $\delta > 0$ بحيث مهما يكن $(x,y) \in [0,1]^2$ مع $\left| x - y \right| \le \delta$، يكن $\left| f(x) - f(y) \right| \le \frac{\varepsilon}{2}$، كما إنه محدود على $[0,1]$، فيوجد $M > 0$ بحيث $\forall x \in [0,1], \left| f(x) \right| \le M$.

ليكن $x \in [0,1]$، ولتكن A و $\widetilde{A}$ المجموعتين المعرّفتين بالصيغة:

$$A = \left\{ k \in \mathbb{N} \cap [0,n] : \left| x - \frac{k}{n} \right| \le \delta \right\}$$
$$\tilde{A} = \left\{ k \in \mathbb{N} \cap [0,n] : \left| x - \frac{k}{n} \right| > \delta \right\}$$

وهما تشكّلان تجزئةً للمجموعة $\mathbb{N} \cap [0,n]$.

بملاحظة أنّ

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} f(x) \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

نجد

$$\begin{aligned} \left| B_n(f)(x) - f(x) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n} \right) - f(x) \right) \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k} \right| \\ &\le \sum_{k=0}^{n} \left| f\left(\frac{k}{n} \right) - f(x) \right| \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k} \\ &= S(x) + \tilde{S}(x) \end{aligned}$$

حيث $S(x) = \sum_{k \in A} \left| f\left(\frac{k}{n} \right) - f(x) \right| \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k}$ ، و

$\tilde{S}(x) = \sum_{k \in \tilde{A}} \left| f\left(\frac{k}{n} \right) - f(x) \right| \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k}$.

لدينا وضوحاً $S(x) \le \sum_{k \in A} \frac{\varepsilon}{2} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k} \le \frac{\varepsilon}{2}$. من جهةٍ أخرى، إذا كان $k \in \tilde{A}$ ، كان $\left| \frac{k}{n} - x \right| > \delta$ ، ومنه $1 \le \frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2}$ ، وكذلك فإنّه أيّاً كان $k \in \tilde{A}$ وأيّاً كان $x \in [0,1]$ ، كان $\left| f\left(\frac{k}{n} \right) - f(x) \right| \le \left| f\left(\frac{k}{n} \right) \right| + \left| f(x) \right| \le 2M$ ، ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\tilde{S}(x) &= \sum_{k\in\tilde{A}} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\le \sum_{k\in\tilde{A}} 2M \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\le 2M \sum_{k\in\tilde{A}} \frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\le \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{k\in 0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\le \frac{2M}{n^2\delta^2} \cdot \frac{n}{4} = \frac{M}{2n\delta^2}\end{aligned}$$

فإذا كان $n_0 = E\left(\frac{M}{\delta^2\varepsilon}\right) + 1$ ، وجدنا أنّه أيّاً كان $x \in [0,1]$ و $n \ge n_0$ كان

$$\begin{aligned}\left| B_n(f)(x) - f(x) \right| &\le S(x) + \tilde{S}(x) \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n_0\delta^2} \\ &\le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

وبذلك نكون قد أثبتنا أنّ المتتالية $\left(B_n(f)\right)$ متقاربةٌ بانتظام من التابع f ، وهذا يُكمل إثبات المبرهنة. ■

7. متسلسلات التوابع

تعريف 13. لتكن (f_n) متتالية توابع على I . نقول إنّ **متسلسلة التوابع** $\left(\sum f_n\right)$ **متقاربة ببساطة (متقاربة بانتظام أو تحقّق شرط كوشي بانتظام أو متقاربة بانتظام على كلّ مجال متراصّ)** إذا وفقط إذا كانت متتالية المجاميع الجزئيّة $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ متقاربةً ببساطة (متقاربة بانتظام أو تحقّق شرط كوشي بانتظام أو متقاربة بانتظام على كلّ مجال متراصّ).

يُمكن صياغة شرط كوشي بانتظام بالنسبة للمتسلسلة $\left(\sum f_n\right)$ كما يأتي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : n \geq m \geq n_\varepsilon \Rightarrow \forall x \in I, \left| \sum_{k=m}^{n} f_n(x) \right| \leq \varepsilon$$

نعلم من دراستنا السابقة أنّ هذا الشرط (الذي يكافئ شرط كوشي بانتظام لمتتالية التوابع (S_n) ومن ثمّ التقارب المنتظم للمتتالية (S_n)) يكافئ التقارب المنتظم للمتسلسلة $\left(\sum f_n\right)$.

تعريف 14. لتكن (f_n) متتالية توابع على I. نقول إنّ المتسلسلة $\left(\sum f_n\right)$ **متقاربة بالنظيم** إذا وفقط إذا تقاربت المتسلسلة $\left(\sum \mu_n\right)$ حيث

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n = \sup_{x \in I} \left| f_n(x) \right|$$

تأتي أهميّة التقارب بالنظيم لمتسلسلات التوابع من أنّ دراسته تؤول إلى دراسة متسلسلة عدديّة، ومن أنّه شرط كافٍ للتقارب المنتظم كما تؤكّد المبرهنة الآتية.

مبرهنة 14. إذا كانت $\left(\sum f_n\right)$ متسلسلة توابع على I متقاربةً بالنظيم، كانت متقاربةً بانتظام.

الإثبات

أيّاً كان العدد الطبيعي n نضع $\mu_n = \sup_{x \in I} \left| f_n(x) \right|$. لمّا كانت $\left(\sum f_n\right)$ متقاربة بالنظيم، كانت المتسلسلة $\left(\sum \mu_n\right)$ متقاربة، فهي تحقّق شرط كوشي. ليكن إذن العدد $0 < \varepsilon$، يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث يتحقّق الاقتضاء $m \geq n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{k=n}^{m} \mu_k \leq \varepsilon$، وعليه

$$m \geq n \geq n_0 \Rightarrow \forall x \in I, \left| \sum_{k=n}^{m} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{m} \left| f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{m} \mu_k \leq \varepsilon$$

وعليه فالمتسلسلة $\left(\sum f_n\right)$ تحقّق شرط كوشي بانتظام، فهي متقاربة بانتظام. ■

ملاحظة 7. إنّ عكس المبرهنة السابقة خطأ، وهذا ما تبيّنه متسلسلة التوابع $\left(\sum f_n\right)$ المعرّفة على المجال $[0,1]$ بالصيغة $f_n(x) = \dfrac{(-x)^n}{n+1}$.

إنّ المتسلسلة $\left(\sum f_n\right)$ متقاربة، حسب اختبار أبل، ببساطة من التابع المعطى

بالصيغة $F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k+1}$ وإذا وضعنا $F_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-x)^k}{k+1}$ وجدنا:

$$\forall x\in[0,1],\left|F(x)-F_n(x)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}f_k(x)\right|\le\frac{x^{n+1}}{n+2}\le\frac{1}{n+2}$$

وهذا يثبت أنّ المتسلسلة $\left(\sum f_n\right)$ متقاربة بانتظام.

من جهةٍ أخرى أيّاً كان العدد الطبيعيّ n فإنّ $\mu_n=\sup_{x\in I}\left|f_n(x)\right|=\frac{1}{n+1}$ ، ولكن $\left(\sum\frac{1}{n+1}\right)$ غير متقاربة، وهذا يعني أنّ $\left(\sum f_n\right)$ غير متقاربة بالنظيم.

إنّ النتيجة الآتية لها أهميّة كبيرة من الناحية العمليّة، لفائدتها في إثبات التقارب المنتظم لمتسلسلة توابع بشكلٍ بسيط.

نتيجة

إذا وُجدت متسلسلة عدديّة $\left(\sum\alpha_n\right)$ متقاربة ويتحقّق الشرط

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in I,\left|f_n\left(x\right)\right|\le\alpha_n$$

كانت المتسلسلة $\left(\sum f_n\right)$ متقاربة بالنظيم.

الإثبات:

أيّاً كان العدد الطبيعيّ n، كان $\mu_n=\sup_{x\in I}\left|f_n(x)\right|\le\sup\alpha_n=\alpha_n$. ولمّا كانت $\left(\sum\alpha_n\right)$ متقاربة، كانت $\left(\sum\mu_n\right)$ متقاربة، وكانت $\left(\sum f_n\right)$ متقاربة بالنظيم. ■

تمرين محلول

ادرس التقارب بانتظام على كلّ مجال متراصّ لمتسلسلة التوابع $\left(\sum f_n\right)$ المعرّفة على $]0,+\infty[$ حيث $f_n(x)=\frac{nx-1}{n^2+x^3}e^{-nx}$.

الحلّ

ليكن المجال $[a,b]$ المحتوى في $]0,+\infty[$. أيّاً كان العدد الحقيقي x من المجال $[a,b]$، والعدد الطبيعي n، كان

$$\alpha_n = \frac{nb+1}{n^2+a^3}e^{-na} \le \frac{|nx|+1}{n^2+x^3}e^{-nx} \le \frac{|nx-1|}{n^2+x^3}e^{-nx} \le |f_n(x)|$$. بتطبيق معيار دالمبير على المتسلسلة العدديّة $\left(\sum \alpha_n\right)$ نجد أنّ $\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{1}{e} < 1$ ومنه $\left(\sum \alpha_n\right)$ متقاربة، ومن ثمّ فالمتسلسلة $\left(\sum f_n\right)$ متقاربة بالنظيم على $[a,b]$، فهي متقاربة بانتظام على هذا المجال، وبذلك تكون متقاربةً على كلّ مجالٍ متراصّ.

تساعد المبرهنة الآتية في إثبات التقارب المنتظم في الحالة التي لا تكون المتسلسلة متقاربة بالنظيم.

مبرهنة 15. لتكن (g_n) و (h_n) متتاليتيّ توابع معرّفتين على I . نفترض تحقّق الشروط الآتية :

1. أيّاً كان العنصر x من I، كانت المتتالية $\left(g_n(x)\right)$ حقيقيّة ومتناقصة.
2. (g_n) متقاربة بانتظام من التابع الصفري على I .
3. يوجد عدد $0 < M$ بحيث : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \left|\sum_{k=0}^{n} h_k(x)\right| \le M$.

عندئذٍ تتقارب المتسلسلة $\left(\sum g_n h_n\right)$ بانتظام على I .

الإثبات

تعتمد فكرة الإثبات الرئيسيّة على تحويل Abel.

أيّاً كان العدد الطبيعي n نضع $H_n = \sum_{k=0}^{n} h_k$. ليكن m و n عددين طبيعيّين بحيث $n < m$، و x عنصراً من I، عندئذٍ يكون

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{m} g_k(x)\cdot h_k(x) &= \sum_{k=n}^{m} g_k(x)\cdot (H_k(x)-H_{k-1}(x))\\ &= \sum_{k=n}^{m} g_k(x)\cdot H_k(x) - \sum_{k=n}^{m} g_k(x)\cdot H_{k-1}(x)\\ &= \sum_{k=n}^{m} g_k(x)\cdot H_k(x) - \sum_{k=n-1}^{m-1} g_{k+1}(x)\cdot H_k(x)\\ &= g_m(x)\cdot H_m(x) - g_n(x)\cdot H_{n-1}(x)\\ &\quad + \sum_{k=n}^{m-1} (g_k(x)-g_{k+1}(x))\cdot H_k(x)\end{aligned}$$

وبملاحظة أنّ $(g_n(x))$ متتالية موجبة لأنّها متناقصة ومتقاربة من الصفر، وبالاستفادة من المتراجحة $\forall x\in I, \forall k\in\mathbb{N}, \left|H_k(x)\right| \le M$ ، نجد

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n}^{m} g_k(x)\cdot h_k(x)\right| &\le g_m(x)\cdot M + g_n(x)\cdot M\\ &\quad + \sum_{k=n}^{m-1} (g_k(x)-g_{k+1}(x))\cdot M\\ &\le M\cdot (g_m(x)+g_n(x)+g_n(x)-g_m(x))\\ &= 2M\cdot g_n(x)\end{aligned}$$

ليكن الآن $0<\varepsilon$، يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث أنّه إذا كان $n\ge n_0$ كان $\forall x\in I, g_n(x)\le \dfrac{\varepsilon}{2M}$ ، ومنه

$$m\ge n\ge n_0 \Rightarrow \forall x\in I, \left|\sum_{k=n}^{m} g_k(x)\cdot h_k(x)\right| \le 2M\cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

وبذلك نكون قد أثبتنا أنّ المتسلسلة $\left(\sum g_n h_n\right)$ تحقّق شرط كوشي بانتظام، فهي متقاربة بانتظام، وهو المطلوب إثباته. ■

8. خواصّ مجموع متسلسلة توابع

في هذه الفقرة سنعيد صياغة المبرهنات الأساسيّة المتعلّقة بخواصّ نهاية متتالية توابع التي رأيناها في الفقرة السابقة مع تعديلاتٍ طفيفة لتتوافق مع متسلسلات التوابع. لن نحتاج لإثبات هذه المبرهنات، فهي تنتج مباشرةً من كون مجموع متسلسلة توابع هو نهاية متتالية مجاميعها الجزئيّة.

مبرهنة 16. (مبادلة النهاية والمجموع) لتكن $\left(\sum f_n\right)$ متسلسلة توابع معرّفة على I، وليكن $a \in \overline{I} = I \cup \{\inf I, \sup I\}$، و (l_n) متتالية من عناصر $\mathbb{k}$، و $L \in \mathbb{k}$. نفترض أنّ:

1. $\left(\sum f_n\right)$ متقاربة بانتظام، وليكن $F \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ تابع مجموعها.
2. أيّاً كان العدد الطبيعي n كان $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = l_n$.
3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} l_n = L$.

عندئذٍ يقبل التابع F العدد L نهايةً له عند a أيّ $\lim\limits_{x \to a} F(x) = L$.

وبعبارة أخرى $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim\limits_{x\to a}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)$، وهو ما نعبّر عنه بالقول: نهاية المجموع يساوي مجموع النهايات. ■

ملاحظة 8. تبقى نتيجة المبرهنة السابقة صحيحة في حالةٍ مهمّة وهي عندما تكون (l_n) متتالية من عناصر $\overline{\mathbb{R}}$ و $L \in \overline{\mathbb{R}}$.

مبرهنة 17. (الاستمرار) لتكن $\left(\sum f_n\right)$ متسلسلة توابع مستمرّةٍ على I. نفترض أنّ $\left(\sum f_n\right)$ متقاربة بانتظام على كلّ مجالٍ متراصّ، وليكن F تابع مجموعها. عندئذٍ يكون F مستمرّاً على I.

أو بشكلٍ آخر، عندما تتحقّق شروط المبرهنة فإنّ مجموع متسلسلة توابع مستمرّة هو تابعٌ مستمرّ.

مبرهنة 18. (مبادلة التكامل والمجموع) لتكن $\left(\sum f_n\right)$ متسلسلة من التوابع المستمرّة على المجال $[a,b]$ ومتقاربة بانتظام. عندئذٍ تكون المتسلسلة $\left(\sum \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$ متقاربة من $\int_a^b\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t$ أيّ $\int_a^b\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

نعبّر عن هذه النتيجة بالقول: إنّ تكامل المجموع يساوي مجموع التكاملات.

مبرهنة 19. (الاشتقاق) لتكن $\left(\sum f_n\right)$ متسلسلة توابع اشتقاقيّةٍ على المجال I، ومتقاربةً ببساطة و $F \in \mathcal{F}(I,\mathbb{k})$ تابع مجموعها. نفترض أيضاً أنّ المتسلسلة $\left(\sum f_n'\right)$ متقاربة بانتظام على كلّ مجال متراصّ من تابع $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$. عندئذٍ تتقارب المتسلسلة $\left(\sum f_n\right)$ بانتظام على كلّ مجال متراصّ من التابع F، ويكون F اشتقاقياً على I و $F' = G$.

يُمكن صياغة النتيجة الرئيسيّة من المبرهنة السابقة، بالشكل $\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ أو بشكلٍ آخر، عندما تتحقّق شروط المبرهنة فإنّ مجموع توابع اشتقاقيّة هو تابعٌ اشتقاقيّ، ويكون مشتقّ المجموع مساوياً لمجموع المشتقّات.

تطبيق: دراسة التابع ζ لريمان

نعرّف متتالية التوابع (f_n) على المجال $]1,+\infty[$ بالصيغة $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]1,+\infty[, f_n(x) = \frac{1}{n^x}$. نعلم أنّ المتسلسلة $\left(\sum f_n(x)\right)$ متقاربة إذا وفقط إذا كان $x > 1$. نعرّف إذن **تابع ζ لريمان** بالشكل الآتي:

$$\zeta :]1,+\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

1. ζ متناقص تماماً

ليكن x و y عنصرين من $]1,+\infty[$ بحيث $x < y$. نعلم أنّ $\forall n \geq 2, \frac{1}{n^y} < \frac{1}{n^x}$، ومنه $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^y} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^x}$، وبإضافة 1 إلى طرفيّ المتراجحة السابقة نجد $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^y} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$، ومنه $\zeta(y) < \zeta(x)$، ومن ثَمّ ζ تابعٌ متناقص تماماً على $]1,+\infty[$.

2. ζ اشتقاقيٌّ على $]1,+\infty[$

سنستخدم مبرهنة اشتقاق متسلسلات التوابع لإثبات قابليّة التابع ζ للاشتقاق. فقد رأينا أنّ $\left(\sum f_n\right)$ متقاربة ببساطة على $]1,+\infty[$، وكذلك فإنّ التوابع f_n اشتقاقيّة على $]1,+\infty[$، وأخيراً إذا كان $[a,b] \subset]1,+\infty[$، كان $\sup\limits_{x\in[a,b]} \left|f_n'(x)\right| = \sup\limits_{x\in[a,b]} \dfrac{\left|-\ln n\right|}{n^x} = \dfrac{\ln n}{n^a}$، ولمّا كان $1 < a$، كانت المتسلسلة $\left(\sum \dfrac{\ln n}{n^a}\right)$ متقاربة، وكانت المتسلسلة $\left(\sum f_n'\right)$ متقاربةً بالنظيم، ومن ثَمّ بانتظام على المجال $[a,b]$. إذن $\left(\sum f_n'\right)$ متقاربةٌ بانتظام على كلّ مجالٍ متراصّ.

وحسب مبرهنة الاشتقاق نستنتج أنّ ζ اشتقاقيّ على $]1,+\infty[$، و $\forall x \in]1,+\infty[, \zeta'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{-\ln n}{n^x}$.

3. ζ تابعٌ محدّب

أيّا كان $n \in \mathbb{N}^*$، كان التابع f_n محدّباً، وذلك لأنّه يقبل الاشتقاق مرّتين على $]1,+\infty[$، و $\forall x \in]1,+\infty[, f_n''(x) = \dfrac{(\ln n)^2}{n^x} \geq 0$. ليكن إذن x و y من المجال $]1,+\infty[$ و $\alpha \in [0,1]$، عندئذٍ تتحقّق المتراجحة

$$f_n(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f_n(x) + (1-\alpha)f_n(y)$$

وبأخذ المجموع على n نجد أنّ $\zeta(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha\zeta(x) + (1-\alpha)\zeta(y)$، ومن ثَمّ ζ تابع محدّب.

4. التابع ζ من الصف $C^\infty(]1,+\infty[)$

أيّاً كان $m \in \mathbb{N}^*$، فإنّنا نعرّف القضيّة P_m على أنّها القضيّة " يقبل ζ الاشتقاق m مرّة و $\forall x \in]0,\infty[, \zeta^{(m)}(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^m(\ln n)^m}{n^x}$". سنثبت بالتدريج على m أنّ P_m صحيحة أيّاً كان $m \in \mathbb{N}^*$.

- لقد أثبتنا أنّ P_1 صحيحة.

- نفترض أنّ P_m عند $m \in \mathbb{N}^*$. لإثبات صحّة P_{m+1} ، سنثبت أنّ التابع $\zeta^{(m)}$ اشتقاقيّ ومشتقّه معطى بالصيغة

$$\forall x \in]0, \infty[, \zeta^{(m+1)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}(\ln n)^{m+1}}{n^x}$$

لهذا الغرض نضع $G = \zeta^{(m)}$ ، و $g_n(x) = \dfrac{(-1)^m (\ln n)^m}{n^x}$. لمّا كانت P_m صحيحة، كانت $\left(\sum g_n\right)$ متقاربة ببساطة. وكذلك فإنّ التوابع g_n اشتقاقيّة على $]1, +\infty[$ ، و $g_n'(x) = \dfrac{(-1)^{m+1}(\ln n)^{m+1}}{n^x}$ ، وأخيراً إذا كان $[a, b]$ مجالاً محتوى في $]1, +\infty[$ ، كان

$$\sup_{x \in [a,b]} \left|g_n'(x)\right| = \sup_{x \in [a,b]} \frac{(\ln n)^{m+1}}{n^x} = \frac{(\ln n)^{m+1}}{n^a}$$

ولمّا كانت المتسلسلة $\left(\sum \dfrac{(\ln n)^{m+1}}{n^a}\right)$ متقاربة كانت المتسلسلة $\left(\sum g_n'\right)$ متقاربةً بالنظيم، ومن ثَمّ بانتظام على المجال $[a, b]$. إذن $\left(\sum g_n'\right)$ متقاربةٌ بانتظام على كلّ مجالٍ متراصّ. إذن G اشتقاقي على $]1, +\infty[$ ومشتقّه يحقّق

$$\forall x \in]1, +\infty[, G'(x) = \zeta^{(m+1)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}(\ln n)^{m+1}}{n^x}$$

. ومن ثَمّ P_{m+1} صحيحة.

5. نهاية ζ عند $+\infty$

أيّاً كان $n \in \mathbb{N}^*$ ، كان $\sup_{x \in [2,\infty[} \left|f_n(x)\right| = \sup_{x \in [2,\infty[} \dfrac{1}{n^x} = \dfrac{1}{n^2}$ ، ولمّا كانت المتسلسلة $\left(\sum \dfrac{1}{n^2}\right)$ متقاربة، كانت متسلسلة التوابع $\left(\sum f_n\right)$ متقاربة بالنظيم، ومن ثمّ بانتظام على

$[2,\infty[$. من جهةٍ أخرى، لدينا: $\lim\limits_{x\to\infty} f_1(x) = 1 = l_1$ ، وأيّاً كان $2 \le n$ ، كان

$\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = 0$ ، ومنه $\lim\limits_{x\to\infty} \zeta(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x)\right) = 1$.

6. نهاية ζ عند 1^+

لمّا كان التابع ζ متناقصاً تماماً على المجال $]1,+\infty[$، فإنّه يوجد $l \in [0,+\infty]$ بحيث $\lim\limits_{x\to 1^+} \zeta(x) = l$. من جهةٍ أخرى، أيّاً كان العدد الحقيقي $1 < x$، و $1 \le N$، كان $\zeta(x) \ge \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}$ ، ومن ثَمّ

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, l = \lim_{x\to 1^+} \zeta(x) \ge \sum_{n=1}^{N}\left(\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{n^x}\right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

وبجعل N تسعى إلى $+\infty$ في المتراجحة الأخيرة نستنتج أنّ $l = +\infty$.

7. إيجاد مكافئ للتابع ζ عند 1^+

طريقة أولى: ليكن $1 < x$. أيّاً كان $n \in \mathbb{N}^*$، و $t \in]n, n+1[$، كان $\frac{1}{(n+1)^x} \le \frac{1}{t^x} \le \frac{1}{n^x}$ ، وبأخذ التكامل المحدود من n إلى $n+1$ للمتراجحة الأخيرة، نجد $\frac{1}{(n+1)^x} \le \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{dt} \le \frac{1}{n^x}$. نجمع المتراجحات الأخيرة على n، فنجد

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^x} \le \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{dt} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

أو

$$\zeta(x) - 1 \le \int_1^{\infty} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{x-1} \le \zeta(x)$$

ومنه $\frac{1}{x-1} \le \zeta(x) \le \frac{1}{x-1} + 1$ ، ومن ثَمّ $\zeta(x)$ و $\frac{1}{x-1}$ متكافئان عند 1^+ .

طريقة ثانية: باستخدام التابع المساعد $\eta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$. إنّ المتسلسلة $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)$ هي متسلسلة توابع مستمرّة على المجال $\left[\frac{1}{2},\infty\right[$، ومتقاربة بانتظام على هذا المجال، لإثبات ذلك نضع $h_n(x)=\frac{1}{n^x}$، و $k_n(x)=(-1)^{n-1}$. نستطيع بسهولة التحقّق من صحّة ما يأتي

- أيّاً كان $x\in\left[\frac{1}{2},\infty\right[$، كانت المتتالية $(h_n(x))$ متناقصة.
- متتالية التوابع (h_n) متقاربة بانتظام من التابع الصفري، وذلك من المتراجحة:

$$\forall x\in\left[\frac{1}{2},\infty\right[,\left|h_n(x)\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

- أيّاً كان $x\in\left[\frac{1}{2},\infty\right[$ و $n\in\mathbb{N}^*$ فإنّ $\left|\sum_{i=1}^{n}k_i(x)\right|\le 1$.

ومن ثمّ η تابعٌ مستمرّ على $\left[\frac{1}{2},\infty\right[$. من جهةٍ أخرى، أيّاً كان $x\in\left[\frac{1}{2},\infty\right[$، فإنّ:

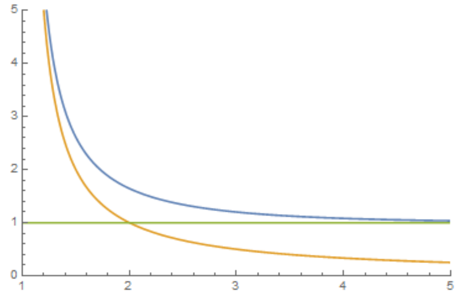
$$\zeta(x)-\eta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x}+\frac{(-1)^n}{n^x}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^x}=\frac{\zeta(x)}{2^{x-1}}$$

ومنه $\zeta(x)=\frac{\eta(x)}{1-2^{1-x}}=\frac{\eta(x)}{1-e^{(1-x)\ln 2}}$، وبذلك نجد أنّ:

$$(x-1)\zeta(x)=\frac{(x-1)\eta(x)}{1-e^{(1-x)\ln 2}}\xrightarrow[x\to 1^+]{}1$$

ومن ثمّ $\zeta(x)$ و $\dfrac{1}{x-1}$ متكافئان عند 1^+.

أخيراً يمثّل الرسم المجاور الخطّ البياني للتابع ζ مع مقاربه الأفقي عند $+\infty$ مع التابع المكافئ له عند 1^+.



تمرينات ومسائل

التمرين 1. ادرس التقارب البسيط والتقارب المنتظم على $\mathbb{R}$ للمتتالية (f_n) في الحالتين الآتيتين

① $f_n(x) = e^x + \dfrac{\sin x}{n + e^x}$ ② $f_n(x) = \dfrac{x}{n+1}$

وفي الحالة الثانية ادرس التقارب المنتظم على كلّ مجال متراصّ.

التمرين 2. لتكن متتالية التوابع (f_n) المعرّفة على $[0,\infty[$ بالصيغة $f_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)$.

ادرس التقارب البسيط والتقارب المنتظم للمتتالية (f_n) على المجال $[0,\infty[$ وعلى كلّ مجال $[0,a]$ حيث $a > 0$.

التمرين 3. لتكن (f_n) متتالية توابع محدودة معرّفة على مجال غير تافه $I \subset \mathbb{R}$. نفترض أنّ (f_n) متقاربة بانتظام. أثبت أنّ (f_n) محدودة بانتظام؛ أي: يوجد M بحيث $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq M$.

التمرين 4. لتكن (f_n) و (g_n) متتاليتين من التوابع المحدودة معرّفتين على مجال غير تافه $I \subset \mathbb{R}$. نفترض أنّ (f_n) و (g_n) متقاربتان بانتظام ، أثبت أنّ المتتالية $(f_n \cdot g_n)$ متقاربة بانتظام.

التمرين 5. لتكن (f_n) و (g_n) متتاليتي توابع معرّفتين على المجال I، ومتقاربتين بانتظام نحو f و g على الترتيب. نفترض أنّ كلاًّ من f و g محدود. أثبت أنّ المتتالية $(f_n \cdot g_n)$ متقاربة بانتظام.

التمرين 6. أعطِ مثالاً على متتاليتي توابع (f_n) و (g_n) متقاربتين بانتظام، ولكن المتتالية $(f_n \cdot g_n)$ غير متقاربة بانتظام.

التمرين 7. لتكن (f_n) متتالية توابع حقيقيّة معرّفة على المجال I. نفترض أنّه أيّاً كان $n \in \mathbb{N}$ فإنّ f_n محدّب وأنّ المتتالية (f_n) متقاربة ببساطة من تابع f. أثبت أنّ f محدّب.

التمرين 8. لتكن (f_n) متتالية توابع حقيقيّة معرّفة على المجال I، ومتقاربة بانتظام من تابع f. ليكن g تابعاً حقيقيًّا مستمرّاً بانتظام على $\mathbb{R}$. أثبت أنّ المتتالية $(g \circ f_n)$ متقاربة بانتظام.

التمرين 9. لتكن (f_n) متتالية توابع معرّفة على $\mathbb{R}$ بالصيغة $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x} + x^2}{n + x^2}$.

1. ادرس التقارب البسيط للمتتالية (f_n). وكذلك التقارب المنتظم على كلّ مجال $[a,b]$ حيث $a \le b$.
2. ادرس التقارب المنتظم للمتتالية (f_n) على كلّ مجال $[a,\infty[$.
3. ما نهاية المتتالية (α_n) حيث $\alpha_n = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{dt}$؟

التمرين 10. لتكن (f_n) متتالية توابع معرّفة على $\mathbb{R}$ بالصيغة

$$f_n(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{nx}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ادرس التقارب البسيط، والتقارب المنتظم للمتتالية (f_n)، وكذلك التقارب المنتظم على كلّ مجال متراصّ.

التمرين 11. لتكن $(f_n)_n$ متتالية توابع معرّفة على $[0,1]$ بالصيغة

$$f_n(x) = (x^3 + 1)\frac{ne^x + x^{-x}}{n + x}$$

1. ادرس التقارب البسيط، والتقارب المنتظم للمتتالية (f_n).
2. ما نهاية المتتالية (I_n) حيث $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{dt}$؟

التمرين 12. ادرس التقارب المنتظم لمتتالية التوابع (f_n) حيث

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^n \ln x, x \in]0,1] \\ 0, \qquad x = 0 \end{cases}$$

التمرين 13. (f_n) متتالية توابع معرّفة على $[0,+\infty[$ بالصيغة $f_n(x)=\sin(nx)e^{-nx}$.

1. ادرس التقارب البسيط للمتتالية (f_n) على المجال $[0,+\infty[$، وكذلك التقارب المنتظم على المجال $[a,+\infty[$ حيث $a>0$.
2. ادرس التقارب المنتظم للمتتالية (f_n) على المجال $]0,+\infty[$.

التمرين 14. لتكن متتالية التوابع $(f_n)_{n\geq 1}$ حيث:

$$f_n:[0,1]\to\mathbb{R}, x\mapsto\begin{cases}n^2x(1-nx), & x\in[0,1/n]\\ 0, & x\in]1/n,1]\end{cases}.$$

1. ادرس التقارب البسيط للمتتالية (f_n).
2. احسب $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$. هل تتقارب (f_n) بانتظام ؟
3. ادرس التقارب المنتظم للمتتالية (f_n) على المجال $[a,1]$ حيث $a\in]0,1[$.

التمرين 15. لتكن متتالية التوابع $(f_n)_{n\geq 1}$ حيث $f_n:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}, x\mapsto x(1+n^{\alpha}e^{-nx^2})$، و $\alpha\in\mathbb{R}$.

1. ادرس التقارب البسيط للمتتالية (f_n).
2. عيّن قيم α التي تجعل (f_n) متقاربة بانتظام.
3. ادرس النهاية $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_0^1 x(1+\sqrt[3]{n}e^{-nx^2})\,\mathrm{d}x\right)$.

التمرين 16. ليكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابعاً قابلاً للاشتقاق مرّتين ومشتقّه الثاني محدود. نعرّف المتتالية (u_n) بالعلاقة $u_n(t)=n\left(f\left(t+\frac{1}{n}\right)-f(t)\right)$. أثبت أنّ (u_n) متقاربة بانتظام من تابع يُطلب تعيينه.

التمرين 17. لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة على المجال $[0,1]$ بالتدريج:

$$u_0(x)=1, u_{n+1}(x)=1+\int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t.$$

1. أثبت أنّ: $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

2. أثبت أنّ (u_n) متقاربة بانتظام من تابعٍ u غير التابع الصفري ويحقّق $u'(x) = u(x - x^2)$.

التمرين 18. ادرس التقارب البسيط والتقارب المنتظم، والتقارب المنتظم على كلّ مجال متراصّ، وكذلك التقارب بالنَّظيم لمتسلسلات التّوابع $\sum f_n$ المعرّفة كما يلي:

1. $f_n(x) = \tan(x/n) - \sin(x/n)$ $\quad f_n : \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$.
2. $f_n(x) = \exp\left(-n^2 + x\right)$ $\quad f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
3. $f_n(x) = x^n \sin \pi x$ $\quad f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$.
4. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \sin(x/n^2) - x\cos(x)/n^2$.
5. $f_n(x) = \cos^n x . \sin x$ $\quad f_n : [0, \pi] \to \mathbb{R}$.
6. $f_n(x) = nxe^{-n^2 x}$ $\quad f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.
7. $f_n(x) = x^n (1/n - x)^n$ $\quad f_n : [0,1[\to \mathbb{R}$.
8. $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+n+x}}$ $\quad f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$.

التمرين 19. أيّاً كان $n \in \mathbb{N}$ و $x \in \mathbb{R}_+$، نعرّف $f_n(x) = \operatorname{th}(x+n) - \operatorname{th} n$.

1. أثبت التقارب البسيط للمتسلسلة $\left(\sum f_n\right)$. نضع $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.
2. أثبت أنّ S مستمرّ ومتزايد تماماً على $\mathbb{R}_+^*$.
3. أثبت أنّ : $\forall x \in \mathbb{R}_+, S(x+1) - S(x) = 1 - \operatorname{th} x$.
4. ادرس النهاية $\lim_{x \to \infty} S(x)$.

التمرين 20. جدْ كل تابع f مستمرّ على $[0,1]$، ويحقّق

$$\forall x \in [0,1], f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$$

التمرين 21. لتكن متتالية التوابع (f_n) المعرّفة على $\mathbb{R}$ بالصيغة

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & , x \leq \dfrac{1}{n+1} \\ \sin \dfrac{\pi}{x} & , \dfrac{1}{n+1} < x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0 & , x > \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

1. أثبت أنّ (f_n) متقاربة ببساطة من تابع مستمرّ وأنّ هذا التقارب غير منتظم.
2. أتتقارب متسلسلة التوابع $\left(\sum f_n\right)$ بانتظام؟ استنتج أنّ التقارب بالإطلاق عند كلّ نقطة لا يقتضي التقارب المنتظم.

التمرين 22. أثبت التقارب المنتظم على كلّ مجال متراصّ لمتسلسلة التوابع $\left(\sum f_n\right)$ حيث $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^2+n}{n^2}$. وبيّن أنها لا تتقارب بالإطلاق عند أيّ نقطة من $\mathbb{R}$.

التمرين 23. ليكن التابع F المعطى بالصيغة $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$، و $f_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2 x}$.

1. عيّن D مجموعة تعريف التابع F.
2. ادرس التقارب المنتظم للمتسلسلة $\left(\sum f_n\right)$ على $]0,\infty[$، وكذلك التقارب المنتظم على $[a,\infty[$ مع $a > 0$.
3. أثبت التقارب المنتظم للمتسلسلة $\left(\sum f_n\right)$ على كلّ مجموعة $]-\infty,-a] \cap D$ مع $a > 1$.
4. ادرس التقارب المنتظم للمتسلسلة $\left(\sum f_n\right)$ على كلّ مجالٍ متراصّ.

التمرين 24. لتكن متسلسلة التوابع $\left(\sum f_n\right)$ حيث

$$f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}(nx)}, n \geq 1$$

1. اثبت أنّ المتسلسلة تتقارب ببساطة على $\mathbb{R}_+^*$ نحو تابعٍ f.
2. ادرس استمرارَ التابع f، وقابليّته للاشتقاق.
3. احسب $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.
4. استنتجّ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

التمرين 25. لتكن متسلسلة التوابع $\left(\sum f_n\right)$ حيث

$$f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \ f_n(x) = n^{-3/2} \cdot e^{-\sqrt{n}x}$$

1. أثبت أنّ $\left(\sum f_n\right)$ تتقارب بالنظيم على $\mathbb{R}_+$ نحو تابعٍ S.
2. أثبت أنّ متسلسلة المشتقات $\left(\sum f_n{}'\right)$ تتقارب ببساطة على $\mathbb{R}_+^*$.
3. هل تتقارب $\left(\sum f_n{}'\right)$ بانتظام على $\mathbb{R}_+^*$؟
4. ادرس التقارب بالنظيم للمتسلسلة $\left(\sum f_n{}'\right)$ على $\left[a, +\infty\right[$ حيث $a > 0$.
5. أثبت أنّ S يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ وأنّ $S' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n{}'$.
6. ليكن n عدداً طبيعيًّا غير معدوم. أثبت أنّ

$$\forall x \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right[, \ S'(x) \leq -\frac{1}{e} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

واستنتج $\lim\limits_{x \to 0^+} S'(x)$.

7. عيّن $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x)$.

التمرين 26. نعرّف متتالية التوابع (u_n) المعرّفة على المجال $[-1,1]$ والمعطاة بالصيغة $u_n(x) = \dfrac{x^n e^{inx}}{n}$.

1. أثبت أنّ $\left(\sum u_n\right)$ تتقارب بانتظام على المجال $[-1,1]$. ليكن f تابع مجموعها.
2. أثبت أنّ f يقبل الاشتقاق على المجال $]-1,1[$.
3. استنتج قيمة $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.

التمرين 27. ليكن $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-x^2 n^2}$. عيّن مجموعة تعريف التابع f، وادرس النهاية $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

التمرين 28. نضع $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$.

1. عيّن مجموعة تعريف التابع S.
2. ادرس التقارب المنتظم للمتسلسلة $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}\right)$ على المجال $]1,+\infty[$.
3. أثبت أنّ S اشتقاقيّ على المجال $]1,+\infty[$.
4. ادرس كلاًّ من النهايتين $\lim_{x\to 1} S(x)$ و $\lim_{x\to\infty} S(x)$.

التمرين 29. أثبت صحّة ما يأتي:

1. $\forall x \in]-1,1[, \dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.
2. $\forall x \in]-1,1[, \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$.
3. $\forall x \in]-1,1[, \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.
4. $\forall x \in]-1,1[, \operatorname{argth} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

التمرين 30. لتكن (f_n) متتالية توابع معرّفة على $\mathbb{R}_+^*$ بالتدريج كما يأتي

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_0(x) = x, \forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}\left(f_n(x) + \frac{x}{f_n(x)}\right)$$

1. أثبت أنّ $f_{n+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{1}{2}\frac{(f_n(x) - \sqrt{x})^2}{f_n(x)}$.
2. أثبت أنّ المتتالية (f_n) متقاربة ببساطة من التابع $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$.
3. أثبت أنّ المتتالية (f_n) متقاربة بانتظام على كلّ مجال $]0,a]$ حيث $a > 0$.
4. أثبت أنّ المتتالية (f_n) غير متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}_+^*$.

التمرين 31. لتكن $(f_n)_{n\geq 1}$ متتالية التوابع المعرّفة على $\mathbb{R}_+$ بالعلاقة

$$f_n(x) = e^{-x} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$$

1. أثبت التقارب البسيط للمتتالية (f_n) نحو التابع الصفري، وأنّ $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) \geq 0$.
2. أثبت صحّة المتراجحة: $\ln(1+t) \geq t - \frac{t^2}{2}$، $\forall t \in \mathbb{R}_+$، واستنتج أنّ (f_n) متقاربة بانتظام على كلّ مجال $[0,a]$ عندما $a > 0$.
3. ليكن العدد الطبيعي $3 \leq n$. ادرس تغيّرات التابع $h_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto (n+1)\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - x$، بالتفصيل، واستنتج أن التابع f_n' ينعدم على المجال $]0,\infty[$ مرّةً واحدةً فقط عند نقطة $x_n \in [0,3]$.
4. استنتج التقارب المنتظم للمتتالية (f_n) على $\mathbb{R}_+$.

التمرين 32. الهدف من هذا التمرين إيجاد تابع مستمرّ عند كلّ نقطة من $\mathbb{R}$، وغير اشتقاقيّ عند أيّ نقطة من $\mathbb{R}$.

ليكن ϕ تابعاً معرّفاً على $\mathbb{R}$ ويقبل 2 دوراً له ومعطى على المجال $]-1,1]$ بالصيغة $\phi(x) = |x|$.

1. بيّن أنّ ϕ مستمرّ على $\mathbb{R}$، وأثبت أنّ $|\phi(x) - \phi(y)| \leq |x - y|$ وذلك عندما $x, y \in \mathbb{R}$.

نعرّف متتالية التوابع (f_n) بالصيغة الآتية

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = \left(3 / 4\right)^n \phi(4^n x)$$

2. أثبت أنّ المتسلسلة $\left(\sum f_n\right)$ متقاربة بالنظيم واستنتج أنّ التابع $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ مستمرّ على $\mathbb{R}$.

ليكن m عدداً طبيعيّاً، و x عدداً حقيقيّاً. نضع $\delta_m = \pm \frac{1}{2} \cdot 4^{-m}$، نثبّت إشارة δ_m بحيث لا يوجد عدد صحيح محصورٌ تماماً بين $4^m x$ و $4^m(x + \delta_m)$.

أخيراً، نعرّف لكلّ عدد طبيعيّ n العددَ γ_n بالشكل

$$\gamma_n = \frac{\phi(4^n(x + \delta_m)) - \phi(4^n x)}{\delta_m}$$

3. عيّن $|\gamma_n|$ بدلالة m و n.
4. أثبت أنّه أيّاً كان العدد الطبيعي n فإنّ

$$\left|\frac{F(x + \delta_m) - F(x)}{\delta_m}\right| \geq 3^m - \sum_{k=0}^{m-1} 3^k$$

5. استنتج أنّ F غير اشتقاقيّ عند x.

الفصل الثاني: التكاملات المحدودة والتوابع الأصليّة

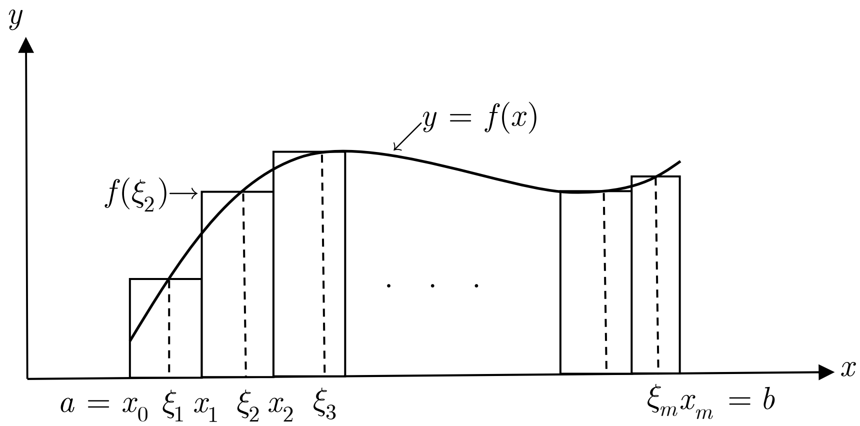
في هذا الفصل يشير الرمز $\mathbb{k}$ *إلى أحد الحقلين* $\mathbb{R}$ *أو* $\mathbb{C}$

مقدّمة

لقد مثّلت مسائل هندسيّة (مثل حساب الأطوال أو المساحات أو الحجوم) تحدّيًا منذ القدم، وقاد البحث عن حلول دقيقة لتلك المسائل إلى ابتكار علم التكامل. إنّ معظم تلك المسائل تؤول إلى مسألة من نمط إيجاد المساحة الواقعة بين المنحني البياني لتابع موجب ومحور الفواصل على مجالٍ ما. ليكن إذن f تابعًا موجبًا معرّفًا على مجال $[a,b]$، ونريد حساب المساحة المحصورة بين الخطّ البياني للتابع f والمستقيمات الثلاثة التي معادلاتها $y = 0$ و $x = a$ و $x = b$.

إنّ أبسط محاولة لإيجاد إجابةٍ تقريبيّة هي تقريب تلك المساحة بمساحة اجتماع عددٍ من المستطيلات، ولكي نحصل على تقريبٍ أفضل، ما علينا إلا استخدام مستطيلات أصغر وأكثر عددًا.

نقسّم إذن المجال $[a,b]$ إلى مجالات جزئيّة $[a,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{m-1},b]$، ونختار نقطةً



ξ_k في كلّ مجال $[x_{k-1},x_k]$، فتكون مساحة المستطيل الذي عرضه $\Delta x_k = (x_k - x_{k-1})$، وارتفاعه $f(\xi_k)$ مساويةً للجداء $f(\xi_k)\Delta x_k$ ، ويكون مجموع مساحات المستطيلات

$$f(\xi_1)(x_1 - a) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \cdots + f(\xi_m)(b - x_{m-1})$$

وإذا وضعنا $a = x_0, b = x_m$ ، حصلنا على المجموع

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k$$

يُلاحظ أنّه كلّما زاد عدد المستطيلات m وصغرت المجالات $[x_{k-1}, x_k]$، كانت قيمة المجموع S_m أقرب إلى المساحة المطلوبة. سنرى في هذا البحث أنّ هناك طيفًا واسعًا من التوابع التي يتقارب عندها S_m نحو عددٍ يمثّل القيمة الصحيحة لتلك المساحة، وهذا العدد هو التكامل المحدود للتابع f على المجال $[a,b]$ والذي نرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. تعريفات ومفاهيم أساسيّة

1.1. التوابع المستمرّة قِطعيًّا

تعريف 1. ليكن $[a,b]$ مجالًا غير تافه في $\mathbb{R}$. نسمّي **تقسيمةً** للمجال $[a,b]$ كلّ عنصر $\sigma = (x_0, x_1, \cdots, x_m)$ من $[a,b]^{m+1}$ حيث $m \in \mathbb{N}^*$، وبحيث $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$. نسمّي **خليّةً** كلّ مجالٍ من النمط $]x_{k-1}, x_k[$ حيث $k \in \mathbb{N}_m = \{1, 2, \cdots, m\}$. نسمّي المقدار $h(\sigma) = \max_{1 \le k \le m} |x_k - x_{k-1}|$ **الخطوة (الأعظميّة) للتقسيمة** σ. ونقول عن تقسيمة σ' إنّها **أدقّ (أو أنعم)** من σ إذا احتوت σ' كلّ عناصر σ. وأخيرًا نقول عن التقسيمة σ إنّها **منتظمة** إذا كانت أطوال خلاياها متساوية أي:

$$\forall k \in \{0, 1, \cdots, m\}, x_k = a + \frac{k}{m}(b - a)$$

تعريف 2. ليكن f تابعًا معرّفًا على المجال غير التافه $[a,b]$ ويأخذ قيمه في $\mathbb{k}$. نقول إنّ f **مستمرّ قِطعيًّا** إذا وفقط إذا وُجدت تقسيمة $\sigma = (x_0, x_1, \cdots, x_m)$ للمجال $[a,b]$ بحيث يكون مقصور f على كلّ خليّة من خلايا التقسيمة σ مستمرًّا، وله نهايتان عدديّتان عند طرفيها. وبعبارة أخرى: أيًّا كان $k \in \mathbb{N}_m$، كان $f_{|]x_{k-1}, x_k[}$ مستمرًّا، وقَبِل نهايةً عدديّة من اليمين عند x_{k-1} ونهايةً عدديّة من اليسار عند x_k. في هذه الحالة، نقول إنّ التقسيمة σ **ملائمة** للتابع f.

لاحظ أنّه في الحالة الخاصّة التي يكون فيها f ثابتًا على كلّ خليّة من خلايا التقسيمة σ أي: $\forall k \in \mathbb{N}_m, \exists c_k \in \mathbb{k} : \forall t \in]x_{k-1}, x_k[, f(t) = c_k$

يكون f تابعًا **درجيًّا**.

نرمز بالرمز $\mathcal{C}_p([a,b])$ إلى مجموعة التوابع المستمرّة قِطعيًّا على $[a,b]$، وبالرمز $\mathcal{E}([a,b])$ إلى مجموعة التوابع الدرجيّة على $[a,b]$.

تعريف 3. ليكن f تابعًا عدديًّا معرّفًا على المجال غير التافه I. نقول إنّ f **مستمرّ قِطعيًّا محليًّا** على I، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط: أيًّا كان المجال المغلق $[a,b]$ المحتوى في I، كان $f\big|_{[a,b]}$ (مقصور f على $[a,b]$) مستمرًّا قِطعيًّا. نرمز بالرمز $\mathcal{C}_p^{loc}(I)$ إلى مجموعة التوابع المستمرّة قِطعيًّا محليًّا على I.

ملاحظة 1. إذا كان f درجيًّا (أو مستمرًّا قِطعيًّا) على $[a,b]$، وكان $[c,d] \subset [a,b]$، كان $f\big|_{[c,d]}$ درجيًّا (أو مستمرًّا قِطعيًّا). فإذا كانت $\sigma = (x_0, x_1, \cdots, x_m)$ تقسيمة للمجال $[a,b]$ ملائمة للتابع f، كانت التقسيمة σ' المؤلّفة من النقطتين c,d ونقاط التقسيمة σ الواقعة في المجال $[c,d]$ ملائمةً للتابع $f\big|_{[c,d]}$.

ملاحظة 2. إذا كان f درجيًّا (أو مستمرًّا قِطعيًّا) على $[a,b]$، كان محدودًا على $[a,b]$ وذلك لأنّه محدود على كلّ خليّة من خلايا تقسيمةٍ ملائمةٍ له.

أمثلة

1. إنّ التابع $f : [-2,2] \to \mathbb{R}, x \mapsto E(x) = \lfloor x \rfloor$ درجيّ على المجال $[-2,2]$.
2. ليكن $n \in \mathbb{N}^*$، وليكن التابع $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ المعطى بالصيغة $f(x) = k$ على المجال $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[$، وذلك أيًّا كان $k \in \mathbb{N}_n$، ونُكمل التعريف بـ $f(1) = 0$. إنّ f عنصرٌ من $\mathcal{E}([0,1])$.
3. التابع $f : \left[\frac{1}{\pi}, 1\right] \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x} \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ مستمرّ قِطعيًّا على المجال $\left[\frac{1}{\pi}, 1\right]$.

4. التابع f المعرّف على $[0,1]$ بالصيغة $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ عندما $x\in]0,1]$ و $f(0)=0$ ليس مستمرًّا قِطعيًّا، وذلك لأنه لا يقبل نهايةً من اليمين عند الصفر.

مبرهنة 1. ليكن $[a,b]$ مجالًا غير تافه في $\mathbb{R}$، وليكن f,g عنصرين من $\mathcal{C}_p([a,b])$، و $\lambda,\mu\in\mathbb{k}$، عندئذٍ

1. التوابع $|f|$ و $\lambda\cdot f+\mu\cdot g$ و $f\cdot g$ كلّها مستمرّة قِطعيًّا.
2. أيًّا كان $x\in[a,b[$، فإنّ f يقبل نهايةً منتهيةً من اليمين عند x، وكذلك أيًّا كان $x\in]a,b]$، فإنّ f يقبل نهايةً منتهيةً من اليسار عند x.

الإثبات

1. توجد تقسيمة $\sigma=(x_0,x_1,\cdots,x_m)$ ملائمة للتابع f، ولمّا كان التابع f مستمرًّا على كلّ خليّة من خلايا σ، كان $|f|$ مستمرًّا على كلّ خليّة من خلايا σ، ومن ثَمّ $|f|$ تابع مستمرّ قِطعيًّا. من جهةٍ أخرى، توجد تقسيمة $\theta=(y_0,y_1,\cdots,y_r)$ ملائمة للتابع g. نعرّف التقسيمة σ' التي تتكوّن عناصرها من اجتماع عناصر التقسيمتين σ و θ بعد إعادة ترتيبها. إنّ التقسيمة σ' أدقّ من كلّ من σ و θ، فهي ملائمة للتابعين f و g معًا، وبذلك يكون التابع $\lambda\cdot f+\mu\cdot g$ مستمرًّا على كلّ خليّة من خلايا التقسيمة σ' ويقبل نهاية عدديّة من اليمين عند كلّ نقطة $x\in[a,b[$، ونهاية عدديّة من اليسار عند كلّ نقطة $x\in]a,b]$، ومن ثمّ فهو تابع مستمرّ قِطعيًّا أي $\lambda\cdot f+\mu\cdot g\in\mathcal{C}_p([a,b])$. وبملاحظة أنّ التابع الصفري درجيّ نستنتج أنّ $\mathcal{C}_p([a,b])$ فضاءٌ شعاعيّ جزئيّ من $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{k})$. بطريقة مماثلة نجد أنّ $f.g$ ثابت على كلّ خليّة من خلايا التقسيمة σ'، ومن ثمّ فهو تابع مستمرّ قِطعيًّا أي $f.g\in\mathcal{C}_p([a,b])$.

2. ليكن $x \in [a,b[$ ، إمّا أن يكون x عنصرًا من إحدى الخلايا $]x_{k-1}, x_k[$ أو يكون أحد عناصر التقسيمة، وفي الحالتين يقبل f نهاية عدديّةً من اليمين عند x . وبطريقة مماثلة نثبت أنّ f يقبل نهاية عدديّةً من اليسار عند كلّ عنصرٍ $x \in]a,b]$. ■

مبرهنة 2. ليكن $I = [a,b]$ مجالاً غير تافه في $\mathbb{R}$ ، وليكن $f \in \mathcal{E}(I)$ ، ولتكن $\sigma = (x_0, x_1, \cdots, x_m)$ تقسيمةً ملائمةً له، و $c_1, c_2, \cdots, c_m \in \mathbb{k}$ هي القيم الثابتة للتابع f على خلايا التقسيمة σ . إنّ قيمة المجموع

$$S(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{m} c_k (x_k - x_{k-1})$$

لا تتعلّق إلاّ بالتابع f وليس بالتقسيمة الملائمة له σ .

الإثبات

لنثبت أنّه إذا كانت $\sigma = (x_0, x_1, \cdots, x_m)$ و $\theta = (y_0, y_1, \cdots, y_r)$ تقسيمتين للمجال I ملائمتين للتابع f فإنّ $S(f,\sigma) = S(f,\theta)$. نفترض أنّ التابع f يأخذ القيم $(c_1, c_2, \cdots, c_m)$ على خلايا σ ، و $(d_1, d_2, \cdots, d_r)$ على خلايا θ .

نبدأ بالحالة عندما تكون θ أدقّ من σ . أيًّا كان $k \in \{0,1,\cdots,m\}$ ، يوجد $i_k \in \{0,1,\cdots,r\}$ بحيث $x_k = y_{i_k}$ ، ويتحقّق

$x_{k-1} = y_{i_{k-1}} < y_{i_{k-1}+1} < \cdots < y_{i_k} = x_k$ ، وبذلك يكون

$i_{k-1} + 1 \le j \le i_k \Rightarrow d_j = c_k$ ، وعليه

$$\sum_{j=i_{k-1}+1}^{i_k} d_j (y_j - y_{j-1}) = \sum_{j=i_{k-1}+1}^{i_k} c_k (y_j - y_{j-1}) = c_k (x_k - x_{k-1})$$

ومنه

$$\begin{aligned}S(f,\theta) &= \sum_{j=1}^{r} d_j(y_j - y_{j-1})\\ &= \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=i_{k-1}+1}^{i_k} d_j(y_j - y_{j-1})\right)\\ &= \sum_{k=1}^{m} c_k(x_k - x_{k-1}) = S(f,\sigma)\end{aligned}$$

أمّا في الحالة العامّة فنعرّف التقسيمة θ' على أنّها التقسيمة التي تحتوي عناصر التقسيمتين θ و σ فيكون حسب ما أثبتناه للتوّ $S(f,\theta') = S(f,\theta) = S(f,\sigma)$ ، وهو المطلوب إثباته. ■

تعريف 4. ليكن $I = [a,b]$ مجالاً غير تافه في $\mathbb{R}$ ، وليكن $f \in \mathcal{E}(I)$ ، ولتكن $\sigma = (x_0, x_1, \cdots, x_m)$ تقسيمةً ملائمةً له. نسمّي المقدار $S(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{m} c_k(x_k - x_{k-1})$ **تكامل** التابع الدرجي f من a إلى b أو تكامل f على I ، ونرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ أو $\int_a^b f$ أو $\int_I f$.

مبرهنة 3. ليكن $I = [a,b]$ مجالاً غير تافه في $\mathbb{R}$ ، وليكن f و g عنصرين من $\mathcal{E}(I)$ و $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ، عندئذٍ تكون القضايا الآتية صحيحة:

1. إذا كان $c \in]a,b[$ ، كان $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = \int_a^c f(t)\,\mathrm{dt} + \int_c^b f(t)\,\mathrm{dt}$.
2. إذا كان f ثابتًا على I وقيمته y_0 كان $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = y_0 \cdot (b-a)$.
3. $\int_a^b \big(\lambda \cdot f(t) + \mu \cdot g(t)\big)\,\mathrm{dt} = \lambda \cdot \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} + \mu \cdot \int_a^b g(t)\,\mathrm{dt}$.
4. إذا كان f موجبًا على I ، كان $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} \geq 0$.
5. إذا كان f و g حقيقيّين وكان $f \geq g$ على I ، كان $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} \geq \int_a^b g(t)\,\mathrm{dt}$.
6. $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{dt}$.

الإثبات

لتكن $\sigma = (x_0, x_1, \cdots, x_m)$ و $\sigma' = (y_0, y_1, \cdots, y_r)$ تقسيمتين للمجال I ملائمتين للتابعين f و g على الترتيب، ولتكن $\sigma'' = (z_0, z_1, \cdots, z_s)$ التقسيمة التي تتكوّن عناصرها من اجتماع عناصر التقسيمتين σ, σ' بعد إعادة ترتيبها.

1. نضيف النقطة c إلى التقسيمة σ فنحصل على تقسيمة

$\sigma_1 = (x_0, \cdots, x_{k-1}, c, x_k, \cdots, x_m)$ ملائمة للتابع f، نُنشئ تقسيمتين σ_1', σ_2' للمجالين $[a, c]$ و $[c, b]$ ملائمتين للتابعين $f|_{[a,c]}$ و $f|_{[c,b]}$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} &= S(f, \sigma_1) \\
&= c_1(x_1 - x_0) + \cdots + c_k(c - x_{k-1}) \\
&\quad + c_k(x_k - c) + \cdots + c_m(x_m - x_{m-1}) \\
&= S(f|_{[a,c]}, \sigma_1') + S(f|_{[c,b]}, \sigma_2') \\
&= \int_a^c f(t)\,\mathrm{dt} + \int_c^b f(t)\,\mathrm{dt}
\end{aligned}$$

2. في هذه الحالة

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} &= \sum_{k=1}^{m} y_0 \cdot (x_k - x_{k-1}) \\
&= y_0 \cdot \sum_{k=1}^{m} (x_k - x_{k-1}) \\
&= y_0 \cdot (b - a)
\end{aligned}$$

3. لتكن (c_j) و (d_j) القيم الثابتة لكلّ من f و g على خلايا التقسيمة σ''، عندئذٍ يتحقّق

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(\lambda \cdot f(t) + \mu \cdot g(t)\right) \mathrm{dt} &= \sum_{j=1}^{s} (\lambda \cdot c_j + \mu \cdot d_j) \cdot (z_j - z_{j-1}) \\ &= \lambda \cdot \sum_{j=1}^{s} c_j \cdot (z_j - z_{j-1}) \\ &\quad + \mu \cdot \sum_{j=1}^{s} d_j \cdot (z_j - z_{j-1}) \\ &= \lambda \cdot \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} + \mu \cdot \int_a^b g(t)\,\mathrm{dt}\end{aligned}$$

4. في هذه الحالة يتحقّق $\forall k \in \mathbb{N}_m, c_k \geq 0$، ومنه

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = \sum_{k=1}^{m} c_k \cdot (x_k - x_{k-1}) \geq 0 .$$

5. إنّ التابع $f - g$ موجب، ومنه

$0 \leq \int_a^b \left(f(t) - g(t)\right) \mathrm{dt} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} - \int_a^b g(t)\,\mathrm{dt}$، ومن ثَمّ

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} \geq \int_a^b g(t)\,\mathrm{dt} .$$

6. **أوّلًا:** حالة $\mathbb{k} = \mathbb{R}$.

بتطبيق النتيجة (5.) من هذه المبرهنة مستفيدين من المتراجحة المضاعفة

$-|f| \leq f \leq |f|$، نجد $-\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{dt} \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{dt}$، ومن ثَمّ

$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{dt}$، وهو المطلوب في هذه الحالة.

ثانيًا: حالة $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.

ليكن $\theta \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_+$ بحيث $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = re^{i\theta}$ أي $r = \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}\right|$.

عندئذٍ

$$\begin{aligned}r = e^{-i\theta}\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} &= \int_a^b e^{-i\theta} f(t)\,\mathrm{dt} = \mathrm{Re}\left[\int_a^b e^{-i\theta} f(t)\,\mathrm{dt}\right] \\ &= \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(t))\,\mathrm{dt} \leq \int_a^b \left|e^{-i\theta} f(t)\right| \mathrm{dt} = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{dt}\end{aligned}$$

2.1. التوابع المضبوطة (أو المنتظمة)

تعريف 5. ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$، و f تابعًا عدديًّا معرّفًا على I، و $x \in I$.
نقول إنّ f **مضبوطٌ (regulated)** عند x إذا وفقط إذا كان له **نهايةٌ عدديّةٌ من اليسار** عند x في حالة $x \in I \setminus \{\inf I\}$، **ونهايةٌ عدديّةٌ من اليمين** عند x في حالة $x \in I \setminus \{\sup I\}$. *أي إذا وُجد في حالة* $x \in I \setminus \{\inf I\}$ عدد $f(x^-)$ بحيث

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x - \delta < t < x \Rightarrow \left| f(t) - f(x^-) \right| < \varepsilon$$

ووُجد في حالة $x \in I \setminus \{\sup I\}$ عدد $f(x^+)$ *بحيث:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x < t < x + \delta \Rightarrow \left| f(t) - f(x^+) \right| < \varepsilon$$

ونقول أيضًا إنّ f مضبوطٌ على I إذا كان مضبوطًا عند كلّ عنصرٍ $x \in I$، ونرمز بالرمز $\operatorname{cont}(f)$ إلى مجموعة النقاط التي يكون التابع f مستمرًّا عندها. أي $x \in \operatorname{cont}(f) \Leftrightarrow \lim\limits_{t \to x} f(t) = f(x)$. كما نرمز بالرمز $\mathcal{R}(I)$ إلى مجموعة التوابع المضبوطة على I.

مبرهنة 4. ليكن f و g تابعين مضبوطين على المجال غير التافه I، و $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. إنّ التوابع $\lambda f + \mu g$ و $|f|$ و fg و $\dfrac{f}{g}$ (عندما يتحقّق الشرط: أيّا كان $x \in I$ كان $g(x)g(x^+)g(x^-) \neq 0$) كلّها مضبوطة على I.

الإثبات

مباشرةً من التعريف وخواص النهاية من اليمين والنهاية من اليسار.

نتيجة: $\left(\mathcal{R}(I), +, .\right)$ فضاء شعاعيّ جزئيّ من $\left(\mathcal{F}(I, \mathbb{k}), +, .\right)$.

أمثلة

1. كلّ تابعٍ مستمرّ قِطعيًّا على مجالٍ مغلق $[a, b]$ يكون مضبوطًا عليه.
2. كلّ تابعٍ مستمرّ (أو مستمرّ قِطعيًّا محليًّا) على مجالٍ I يكون مضبوطًا عليه.

3. كلّ تابعٍ حقيقيّ مطّردٍ على مجالٍ I يكون مضبوطًا عليه.

4. ليكن التابع f المعرّف على المجال $]0,1[$ بالصيغة $f(t)=\begin{cases}1, t\in\mathbb{Q}\\ 0, t\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. إنّ f ليس مضبوطًا عند أيّ عنصرٍ من $]0,1[$. ذلك أن أيّ مجالٍ غير تافهٍ $]c,d[$ محتوًى في $]0,1[$ يحتوي أعدادًا عاديّة وأعدادًا غير عاديّة. فإذا كان للتابع f نهايةٌ عدديّةٌ $f(x^+)$ من اليمين عند $x\in[0,1[$، فيوجد $\delta>0$ بحيث

$t\in\left]x,x+\delta\right[\Rightarrow\left|f(t)-f(x^+)\right|<1$، وعليه فإنّ $\left|1-f(x^+)\right|<\dfrac{1}{2}$ و

$\left|0-f(x^+)\right|<\dfrac{1}{2}$، ومنه

$1=\left|1-0\right|\le\left|1-f(x^+)\right|+\left|f(x^+)-0\right|<\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$، وهذا تناقض واضح،

ومن ثَمّ فإنّ f غير مضبوطٍ عند x.

تُبيّن المبرهنة الهامّة الآتية أنّ التوابع المضبوطة على مجالٍ مغلق يُمكن تقريبها بانتظام بتوابع درجيّة.

مبرهنة 5. ليكن f تابعًا معرّفًا على المجال غير التافه $[a,b]$. إنّ القضايا الثلاث الآتية متكافئة:

① f مضبوط على $[a,b]$.

② أيًّا كان $0<\varepsilon$، يوجد تابعٌ درجيّ $\varphi\in\mathcal{E}([a,b])$ بحيث $\sup\limits_{t\in[a,b]}\left|\varphi(t)-f(t)\right|\le\varepsilon$.

③ توجد متتالية (φ_n) من عناصر $\mathcal{E}([a,b])$ متقاربة من f بانتظام.

الإثبات

لنبدأ بإثبات التوطئة الآتية:

توطئة: لتكن $(I_j)_{j\in J}$ جماعة من المجالات المفتوحة تحقّق $[a,b]\subset \bigcup_{j\in J} I_j$، عندئذٍ توجد جماعة جزئيّة منتهية $(I_j)_{j\in J_0}$ بحيث $[a,b]\subset \bigcup_{j\in J_0} I_j$.

إثبات التوطئة: لتكن F مجموعة النقاط $x\in[a,b]$ التي توجد لها جماعة جزئيّة منتهية من $(I_j)_{j\in J}$ اجتماع عناصرها يحتوي $[a,x]$. إنّ $a\in F$، ومنه F غير خالية، وهي محدودة من الأعلى بالعدد b فلها حدّ أعلى حقيقي $m=\sup F$ يحقّق $m>a$. نفترض أنّ $m<b$. يوجد $j_0\in J$ بحيث $m\in I_{j_0}$، فيوجد $0<\delta$، بحيث $[m-\delta,m+\delta]\subset I_{j_0}$، ويوجد $y\in F$ بحيث $y\in[m-\delta,m[$، وعليه توجد جماعة جزئيّة منتهية $(I_j)_{j\in J_0}$ من $(I_j)_{j\in J}$ اجتماع عناصرها يحتوي $[a,y]$. لتكن المجموعة المنتهية $J_1=J_0\cup\{j_0\}$. لدينا $[a,m+\delta]\subset \bigcup_{j\in J_1} I_j$، ومن ثَمّ $m+\delta\in F$ وهذا مناقض لكون $m=\sup F$، ومنه $m=b$، ومن ثَمّ توجد جماعة جزئيّة منتهية من $(I_j)_{j\in J}$ اجتماع عناصرها يحتوي $[a,b]$، وبذلك يكتمل إثبات التوطئة.■

①⇐②

ليكن $0<\varepsilon$.

في حالة $x\in[a,b[$، يوجد $y(x)\in]x,b[$ بحيث
$t\in]x,y(x)[\Rightarrow \left|f(t)-f(x^+)\right|\le \varepsilon/2$، وفي حالة $x\in]a,b]$، يوجد $z(x)\in]a,x[$ بحيث $t\in]z(x),x[\Rightarrow \left|f(t)-f(x^-)\right|\le \varepsilon/2$. إذا كان $x\in]a,b[$، وضعنا $I_x=]z(x),y(x)[$، ووضعنا $I_b=]z(b),b+1[$, $I_a=]a-1,y(a)[$. من الواضح أنّ $[a,b]\subset \bigcup_{x\in[a,b]} I_x$. توجد، حسب التوطئة، جماعةٌ منتهية $\left(I_{x_k}\right)_{k\in N_m}$ بحيث $[a,b]\subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}_m} I_{x_k}$. لتكن σ التقسيمة المؤلّفة من النقاط $a,b,x_1,x_2,\cdots,x_m,y(x_1),y(x_2)\cdots,y(x_m)$ $z(x_1),z(x_2)\cdots,z(x_m)$ بعد إعادة

ترتيبها بالشكل $t_0, t_1, \cdots, t_r$. نلاحظ أنّه إذا كان $t, s \in]t_k, t_{k+1}[$ فإنّ $\left|f(s) - f(t)\right| \le \varepsilon$

وليكن φ التابع الدرجي الذي تكون σ ملائمةً له ويحقّق

$\forall k \in \{0, 1, \cdots, r-1\}, \varphi(t_k) = f(t_k)$، وإذا كان $t \in]t_k, t_{k+1}[$ فإنّ

$\varphi(t) = f\left(\dfrac{t_k + t_{k+1}}{2}\right)$. وعليه يتحقّق الشرط $\forall t \in [a,b], \left|f(t) - \varphi(t)\right| \le \varepsilon$ أو

$\sup\limits_{t \in I}\left|\varphi(t) - f(t)\right| \le \varepsilon$، وهو المطلوب.

③⇐②

أيًّا كان $n \in \mathbb{N}$، يوجد $\varphi_n \in \mathcal{E}(I)$ بحيث $\sup\limits_{t \in I}\left|\varphi_n(t) - f(t)\right| \le 2^{-n}$. إنّ (φ_n)

متتاليةٌ من عناصر $\mathcal{E}(I)$ متقاربة بانتظام من f.

①⇐③

لتكن (φ_n) متتالية من التوابع الدرجيّة متقاربة بانتظام من f، فهي تحقّق شرط كوشي

بانتظام. ليكن $x \in [a, b[$. أيًّا كان $n \in \mathbb{N}$، فإنّ φ_n يقبل نهايةً منتهيةً $\varphi_n(x^+)$ من

اليمين عند x.

ليكن $\varepsilon > 0$، يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث

$m \ge n \ge n_0 \Rightarrow \forall t \in [a,b], \left|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)\right| \le \varepsilon$، وبجعل t تسعى نحو x من

اليمين في المتراجحة، نجد أنّ $m \ge n \ge n_0 \Rightarrow \left|\varphi_n(x^+) - \varphi_m(x^+)\right| \le \varepsilon$، ومن ثَمّ

تحقّق المتتالية $\left(\varphi_n(x^+)\right)$ شرط كوشي فهي متقاربة من عددٍ $l \in \mathbb{k}$. لنثبت أنّ f يقبل l

نهايةً له من اليمين عند x.

ليكن $\varepsilon > 0$، يوجد $n \in \mathbb{N}$ بحيث $\forall t \in [a,b], \left|f(t) - \varphi_n(t)\right| \le \dfrac{\varepsilon}{3}$، و

$\left|\varphi_n(x^+) - l\right| \le \dfrac{\varepsilon}{3}$. من جهةٍ أخرى، يوجد $\delta > 0$ بحيث

$t \in]x, x+\delta[\cap [a,b] \Rightarrow \left|\varphi_n(t) - \varphi_n(x^+)\right| \le \dfrac{\varepsilon}{3}$. فإذا كان t عنصرًا من

$]x, x+\delta[\cap [a,b]$، كان

$$\left|f(t)-l\right| \le \left|f(t)-\varphi_n(t)\right| + \left|\varphi_n(t)-\varphi_n(x^+)\right| + \left|\varphi_n(x^+)-l\right|$$
$$\le \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

ومن ثَمّ، f يقبل l نهايةً له من اليمين عند x. وبطريقة مشابهة نثبت أنّ للتابع f نهايةً منتهيةً من اليسار عند كلّ نقطة $x \in]a,b]$. ■

نتيجة: ليكن f تابعًا مضبوطًا على المجال غير التافه $[a,b]$، عندئذٍ يكون f محدودًا على $[a,b]$.

الإثبات

حسب المبرهنة (5.)، يوجد تابعٌ درجيّ φ يحقّق $\sup_{t\in[a,b]}\left|\varphi(t)-f(t)\right| \le 1$، ولمّا كان φ درجيًّا، كان محدودًا، فيوجد $0 \le M$ بحيث $\forall t \in [a,b], \left|\varphi(t)\right| \le M$، ومن ثَمّ فإنّه أيًّا كان $t \in [a,b]$، كان $\left|f(t)\right| \le \left|f(t)-\varphi(t)\right| + \left|\varphi(t)\right| \le 1+M$، وعليه فإنّ f تابعٌ محدودٌ. ■

مبرهنة 6. ليكن f تابعًا مضبوطًا على المجال غير التافه $[a,b]$، ولتكن (φ_n) متتالية من التوابع الدرجيّة على المجال $[a,b]$ ومتقاربة بانتظام من التابع f. عندئذٍ تتقارب المتتالية العدديّة $\left(\int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{dt}\right)$ من عنصرٍ من $\mathbb{k}$ لا يتعلّق بالمتتالية (φ_n) المتقاربة بانتظام من f.

الإثبات

إنّ (φ_n) متقاربة بانتظام فهي تحقّق شرط كوشي بانتظام. ليكن $0 < \varepsilon$، يوجد عدد طبيعي n_0 بحيث

$$\forall n,m \in \mathbb{N}, m \ge n \ge n_0 \Rightarrow \sup_{t\in I}\left|\varphi_n(t)-\varphi_m(t)\right| \le \frac{\varepsilon}{b-a}$$

ومن المتراجحة

$$\left|\int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{dt} - \int_a^b \varphi_m(t)\,\mathrm{dt}\right| = \left|\int_a^b \left(\varphi_n(t) - \varphi_m(t)\right)\mathrm{dt}\right|$$
$$\leq (b-a)\sup_{t\in I}\left|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)\right|$$

نستنتج أنّ

$$m \geq n \geq n_0 \Rightarrow \left|\int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{dt} - \int_a^b \varphi_m(t)\,\mathrm{dt}\right| \leq (b-a)\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

ومن ثَمّ تحقّق المتتالية $\left(\int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{dt}\right)$ شرط كوشي فهي متقاربة.

من جهةٍ أخرى، لتكن (ψ_n) متتالية ثانية من التوابع الدرجيّة على I ومتقاربة بانتظام من التابع f. لدينا

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{dt} - \int_a^b \psi_n(t)\,\mathrm{dt}\right| &= \left|\int_a^b \left(\varphi_n(t) - \psi_n(t)\right)\mathrm{dt}\right| \\ &\leq \int_a^b \left|\varphi_n(t) - \psi_n(t)\right|\mathrm{dt} \\ &\leq (b-a)\sup_{t\in I}\left|\varphi_n(t) - \psi_n(t)\right| \\ &\leq (b-a)\sup_{t\in I}\left|\varphi_n(t) - f(t)\right| \\ &\quad + (b-a)\sup_{t\in I}\left|f(t) - \psi_n(t)\right| \\ &= \alpha_n\end{aligned}$$

إنّ المتتالية (α_n) متقاربة من الصفر، ومنه نستنتج أنّ للمتتاليتين $\left(\int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{dt}\right)$ و $\left(\int_a^b \psi_n(t)\,\mathrm{dt}\right)$ النهاية نفسها، وهذا يُكمل إثبات المبرهنة. ■

تعريف 6. ليكن f تابعًا مضبوطًا على المجال غير التافه $[a,b]$، ولتكن (φ_n) متتالية من التوابع الدرجيّة على $[a,b]$ ومتقاربة بانتظام من f. نسمّي العدد $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{dt}$ **التكامل المحدود** للتابع f من a إلى b، ونرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ أو $\int_a^b f$.

مبرهنة 7. ليكن $I=[a,b]$ مجالاً غير تافه في $\mathbb{R}$، وليكن f و g عنصرين من $\mathcal{R}([a,b])$ و $\lambda,\mu\in\mathbb{k}$، عندئذٍ كلّ القضايا الآتية صحيحة:

1. إذا كان $c\in]a,b[$، كان $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. $\int_a^b\big(\lambda\cdot f(t)+\mu\cdot g(t)\big)\mathrm{d}t=\lambda\cdot\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\mu\cdot\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
3. إذا كان f موجبًا على I، كان $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\ge 0$.
4. إذا كان f و g حقيقيّين وكان $f\ge g$ على I، كان $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\ge\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
5. إذا كان f حقيقيًّا و $m=\inf\limits_{t\in[a,b]} f(t), M=\sup\limits_{t\in[a,b]} f(t)$، كان $m(b-a)\le\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\le M(b-a)$.
6. $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\le\int_a^b|f(t)|\,\mathrm{d}t$.

الإثبات

1. لتكن (φ_n) متتالية توابع درجيّة على I متقاربة بانتظام من f، عندئذٍ
$\int_a^b\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t$، وبجعل n تسعى إلى $+\infty$ نجد
$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. لتكن (φ_n) متتالية توابع درجيّة على I متقاربة بانتظام من f، و (ψ_n) متتالية توابع درجيّة على I متقاربة بانتظام من g. لدينا

$$\begin{aligned}\int_a^b\big(\lambda\cdot f(t)+\mu\cdot g(t)\big)\mathrm{d}t&=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\big(\lambda\cdot\varphi_n(t)+\mu\cdot\psi_n(t)\big)\mathrm{d}t\\&=\lambda\cdot\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t\\&\quad+\mu\cdot\lim_{n\to\infty}\int_a^b\psi_n(t)(t)\,\mathrm{d}t\\&=\lambda\cdot\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\mu\cdot\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

3. ليكن $n \in \mathbb{N}$، يوجد $\varphi_n \in \mathcal{E}(I)$ بحيث $\sup_{t\in I}\left|\varphi_n(t) - f(t)\right| \le 2^{-n}$. إنّ (φ_n) متتالية من التوابع الدرجيّة متقاربة بانتظام من f، ومنه $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{dt}$. من جهةٍ أخرى، أيًّا كان $t \in I$، كان $\varphi_n(t) \ge \varphi_n(t) - f(t) \ge -2^{-n}$، ومن ثَمّ

$$\int_a^b \varphi_n(t)\,\mathrm{dt} \ge -(b-a)2^{-n}$$

وبجعل n تسعى إلى $+\infty$ في المتراجحة الأخيرة نجد $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} \ge 0$، وهي المتراجحة المطلوبة.

4. نطبّق ما سبق على التابع الموجب $f - g$، فنجد

$$0 \le \int_a^b (f(t) - g(t))\,\mathrm{dt} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} - \int_a^b g(t)\,\mathrm{dt}$$ أو

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} \ge \int_a^b g(t)\,\mathrm{dt}.$$

5. من المتراجحة $\forall t \in [a,b], m \le f(t) \le M$ نجد

$$m(b-a) = \int_a^b m\cdot\mathrm{dt} \le \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} \le \int_a^b M\cdot\mathrm{dt} = M(b-a).$$

6. **أوّلًا:** حالة $\mathbb{k} = \mathbb{R}$.

من المتراجحة $\forall t \in [a,b], -\left|f(t)\right| \le f(t) \le \left|f(t)\right|$ نجد

$$-\int_a^b \left|f(t)\right|\mathrm{dt} \le \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} \le \int_a^b \left|f(t)\right|\mathrm{dt}$$ ، ومنه

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}\right| \le \int_a^b \left|f(t)\right|\mathrm{dt}.$$

ثانيًا: حالة $\mathbb{k} = \mathbb{C}$.

ليكن $\theta \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_+$ بحيث $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = re^{i\theta}$ أي $r = \left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}\right|$.

عندئذٍ

$$r = e^{-i\theta}\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = \int_a^b e^{-i\theta} f(t)\,\mathrm{dt} = \mathrm{Re}\left[\int_a^b e^{-i\theta} f(t)\,\mathrm{dt}\right]$$
$$= \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(t))\,\mathrm{dt} \le \int_a^b \left|e^{-i\theta} f(t)\right|\mathrm{dt} = \int_a^b \left|f(t)\right|\mathrm{dt}$$

■

مبرهنة 8. (متراجحة كوشي شوارتز–Cauchy–Schwarz) ليكن f و g تابعين مضبوطين على المجال غير التافه $[a,b]$. عندئذٍ تتحقّق المتراجحة

$$\left|\int_a^b f(t)\cdot g(t)\,\mathrm{dt}\right| \le \sqrt{\int_a^b \left|f(t)\right|^2 \mathrm{dt}} \cdot \sqrt{\int_a^b \left|g(t)\right|^2 \mathrm{dt}}$$

الإثبات

إنّ النتيجة واضحة عندما يكون $\int_a^b \left|g(t)\right|^2 \mathrm{dt} = 0$. نفترض إذن أنّ $\beta = \int_a^b \left|g(t)\right|^2 \mathrm{dt} \ne 0$. نضع $\gamma = \int_a^b \overline{f(t)}\cdot g(t)\,\mathrm{dt}$ و $\alpha = \int_a^b \left|f(t)\right|^2 \mathrm{dt}$.

ليكن $\lambda \in \mathbb{k}$، عندئذٍ يكون التابع $t \mapsto \left|f(t)+\lambda g(t)\right|^2$ مضبوطًا وموجبًا على $[a,b]$، ويكون $h(\lambda) = \int_a^b \left|f(t)+\lambda g(t)\right|^2 \mathrm{dt}$ مقدارًا **موجبًا** وذلك بمقتضى المبرهنة السابقة. وبموجب المبرهنة السابقة أيضًا نجد أنّ

$$h(\lambda) = \alpha + 2\,\mathrm{Re}\left(\lambda\gamma\right) + \left|\lambda\right|^2 \beta$$

نأخذ $\lambda = -\dfrac{\overline{\gamma}}{\beta}$ فنجد أنّ

$$0 \le \alpha + 2\,\mathrm{Re}\left(-\frac{\left|\gamma\right|^2}{\beta}\right) + \frac{\left|\gamma\right|^2}{\beta^2}\beta = \alpha - 2\frac{\left|\gamma\right|^2}{\beta} + \frac{\left|\gamma\right|^2}{\beta} = \alpha - \frac{\left|\gamma\right|^2}{\beta}$$

ومنه $\left|\gamma\right|^2 \le \alpha\cdot\beta$ أو

$$\left|\int_a^b f(t)\cdot g(t)\,\mathrm{dt}\right| \le \sqrt{\int_a^b \left|f(t)\right|^2 \mathrm{dt}} \cdot \sqrt{\int_a^b \left|g(t)\right|^2 \mathrm{dt}}$$

وهو المطلوب إثباته. ■

ملاحظة 3. في حالة f و g مستمرّان و g غير معدوم، تتحقّق المساواة في المتراجحة السابقة إذا وفقط إذا وُجد عدد μ بحيث $f = \mu \cdot g$.

3.1. مجاميع ريمان

تعريف 7. ليكن f تابعًا مضبوطًا على المجال غير التافه $[a,b]$، ولتكن $\sigma = (x_0, x_1, \cdots, x_m)$ تقسيمة للمجال $[a,b]$، و $\xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m) \in [a,b]^m$ بحيث $\forall k \in N_m, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$، نسمّي $\tilde{\sigma} = (\sigma, \xi)$ **تقسيمةً منقوطةً** للمجال $[a,b]$. نسمّي المجموع $S(f, \tilde{\sigma}) = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ **مجموع ريمان** للتابع f الموافق للتقسيمة المنقوطة $\tilde{\sigma}$.

مبرهنة 9. ليكن f تابعًا مضبوطًا على المجال غير التافه $[a,b]$. ليكن $0 < \varepsilon$، يوجد عندئذٍ $0 < \eta$ بحيث تتحقّق المتراجحة $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - S(f, \tilde{\sigma})\right| < \varepsilon$، وذلك أيًّا كانت التقسيمة المنقوطة $\tilde{\sigma} = (\sigma, \xi)$ التي تحقّق $h(\sigma) < \eta$.

الإثبات

ليكن $0 < \varepsilon$. لمّا كان f مضبوطًا على $[a,b]$، فيوجد تابع درجيّ φ يحقّق $\sup_{t \in [a,b]} \left|f(t) - \varphi(t)\right| < \dfrac{\varepsilon}{3(b-a)}$. لمّا كان φ درجيًّا، كان محدودًا، ووُجد $0 < M$ بحيث $\forall t \in [a,b], \left|\varphi(t)\right| \le M$. لتكن $\theta = (t_0, t_1, \cdots, t_n)$ تقسيمةً ملائمةً للتابع φ، ومهما يكن $j \in \mathbb{N}_n$، فإنّ y_j هي قيمة φ الثابتة على الخليّة $]t_{j-1}, t_j[$. لتكن $\tilde{\sigma} = \left(\sigma = (x_0, x_1, \cdots, x_m), \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m)\right)$ تقسيمةً منقوطةً للمجال $[a,b]$ تحقّق الشرط $h(\sigma) < \min\left(\dfrac{\varepsilon}{6M \cdot (n+1)}, \min_{1 \le j \le n}\left|t_j - t_{j-1}\right|\right)$، بحيث نضمن أنّ كلّ مجال $[x_{k-1}, x_k]$ يحوي نقطةً واحدة من نقاط التقسيمة θ على الأكثر.

نلاحظ أوّلًا أنّ

$$\begin{aligned}\left|S(f,\tilde{\sigma})-S(\varphi,\tilde{\sigma})\right| &= \left|S(f-\varphi,\tilde{\sigma})\right| \\ &= \left|\sum_{k=1}^{m}(f-\varphi)(\xi_k)(x_k-x_{k-1})\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{m}\left|(f-\varphi)(\xi_k)\right|(x_k-x_{k-1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{m}\frac{\varepsilon}{3(b-a)}(x_k-x_{k-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(x_m-x_0)=\frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

وأنّ

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}-\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{dt}\right| \leq \int_a^b \left|f(t)-\varphi(t)\right|\mathrm{dt} \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{3(b-a)}\,\mathrm{dt}=\frac{\varepsilon}{3}$$

من جهةٍ ثانية، نضع $A=\left\{k\in\mathbb{N}_m, \exists j\in\{0,1,\cdots,n\}\}: t_j\in[x_{k-1},x_k]\right\}$ ، ولتكن $B=\mathbb{N}_m\setminus A$. نلاحظ أنّ المجموعة A تحوي $(n+1)$ عنصرًا على الأكثر. إذا كان $k\in B$ ، فيوجد $j_k\in\mathbb{N}_n$ بحيث $[x_{k-1},x_k]\subset]t_{j_k-1},t_{j_k}[$ ، ومنه

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k}\varphi(t)\,\mathrm{dt}=\varphi(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=y_{j_k}(x_k-x_{k-1}).$$

من جهةٍ أخرى، لدينا

$$\begin{aligned}S(\varphi,\tilde{\sigma}) &= \sum_{k\in\mathbb{N}_m}\varphi(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \\ &= \sum_{k\in A}\varphi(\xi_k)(x_k-x_{k-1})+\sum_{k\in B}\varphi(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) \\ &= \sum_{k\in A}\varphi(\xi_k)(x_k-x_{k-1})+\sum_{k\in B}y_{j_k}(x_k-x_{k-1})\end{aligned}$$

وكذلك لدينا

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{dt} &= \sum_{k\in\mathbb{N}_m}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\varphi(t)\,\mathrm{dt}\\ &= \sum_{k\in A}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\varphi(t)\,\mathrm{dt}+\sum_{k\in B}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\varphi(t)\,\mathrm{dt}\\ &= \sum_{k\in A}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\varphi(t)\,\mathrm{dt}+\sum_{k\in B}y_{j_k}(x_k-x_{k-1})\end{aligned}$$

ومن ثَمّ

$$\begin{aligned}\left|S(\varphi,\tilde{\sigma})-\int_a^b\varphi(t)\,\mathrm{dt}\right| &= \left|\sum_{k\in A}\left(\varphi(\xi_k)(x_k-x_{k-1})-\int_{x_{k-1}}^{x_k}\varphi(t)\,\mathrm{dt}\right)\right|\\ &\le \sum_{k\in A}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left|\varphi(t)-\varphi(\xi_k)\right|\mathrm{dt}\\ &\le \sum_{k\in A}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(2M)\,\mathrm{dt}\\ &\le \sum_{k\in A}2M\cdot h(\sigma)\le 2M\cdot(n+1)\cdot h(\sigma)\\ &< 2M\cdot(n+1)\cdot\frac{\varepsilon}{6M\cdot(n+1)}=\frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

وأخيرًا، لدينا

$$\begin{aligned}\left|S(f,\tilde{\sigma})-\int_a^b f\right| &\le \left|S(f,\tilde{\sigma})-S(\varphi,\tilde{\sigma})\right|\\ &\quad+\left|S(\varphi,\tilde{\sigma})-\int_a^b\varphi\right|+\left|\int_a^b\varphi-\int_a^b f\right|\\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

■

نتيجة: ليكن f تابعًا مضبوطًا على المجال غير التافه $[a,b]$، ولتكن المتتالية $\left(S_n(f)\right)$ المعرّفة بالصيغة

$$S_n(f)=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

عندئذٍ تتقارب المتتالية $\left(S_n(f)\right)$ من $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$.

الإثبات

يكفي أن نطبّق المبرهنة السابقة، مع أخذِ التقسيمة المنقوطة

$$\tilde{\sigma} = (\sigma = (x_0, x_1, \cdots, x_m), \xi = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m))$$

حيث $x_k = \xi_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$. ■

تعريف 8. ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$، و $f \in \mathcal{R}(I)$ تابعًا مضبوطًا على I، و a و b عنصرين من I. نعرّف $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ **التكامل المحدود** للتابع f من a إلى b كما يأتي:

1. إذا كان $a < b$، وضعنا $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = \int_a^b f_{|[a,b]}(t)\,\mathrm{dt}$.
2. إذا كان $a = b$، وضعنا $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = 0$.
3. إذا كان $a > b$، وضعنا $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{dt}$.

تتضمّن المبرهنةُ الآتية، وهي نتيجة مباشرة للمبرهنة (7.) السابقة، أهمّ خواصّ التكامل المحدود للتوابع المضبوطة.

مبرهنة 10. ليكن I مجالاً غير تافه في $\mathbb{R}$، وليكن f و g عنصرين من $\mathcal{R}(I)$ و $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ و $(a,b,c) \in I^3$. عندئذٍ تكون القضايا الآتية صحيحة

1. $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = \int_a^c f(t)\,\mathrm{dt} + \int_c^b f(t)\,\mathrm{dt}$.
2. $\int_a^b \left(\lambda \cdot f(t) + \mu \cdot g(t)\right)\mathrm{dt} = \lambda \cdot \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} + \mu \cdot \int_a^b g(t)\,\mathrm{dt}$.
3. نفترض أنّ $a \le b$، و f و g حقيقيّان. عندئذٍ
   i. إذا كان f موجبًا على $[a,b]$، كان $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} \ge 0$.
   ii. إذا كان $f \ge g$ على $[a,b]$، كان $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} \ge \int_a^b g(t)\,\mathrm{dt}$.

iii. إذا كان $m = \inf_{t\in[a,b]} f(t), M = \sup_{t\in[a,b]} f(t)$ ، كان

$$m(b-a) \le \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} \le M(b-a)$$

4. نفترض أنّ $a \le b$ ، عندئذٍ $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}\right| \le \int_a^b \left|f(t)\right|\mathrm{dt}$.

4.1. التوابع الأصليّة

حتّى الآن، يبدو التكامل المحدود مفهومًا غير ملموس، إذ لم نكتشف بعدُ سُبلًا واضحةً لحسابه والتعامل معه. سنبيّن، في هذه الفقرة، العلاقة بين التكامل المحدود والتوابع الأصليّة، وهذه العلاقة ستزوّدنا بأداة فعّالة لحساب التكاملات المحدودة.

تعريف 9. ليكن I مجالًا غير تافه من $\mathbb{R}$ ، و $f \in \mathcal{C}_P^{loc}(I)$ تابعًا مستمرًّا قِطعيًّا محلّيًّا على I ، نقول عن تابعٍ $F \in \mathcal{F}(I,\mathbb{k})$ إنّه **تابعٌ أصليّ** للتابع f إذا وفقط إذا حقّق الشرطين

1. F مستمرّ على I .
2. أيًّا كان العنصر x من $\mathrm{cont}(f)$ ، كان F اشتقاقيًّا عند x ، وكان $F'(x) = f(x)$.

أمثلة

1. ليكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{sign}(x)$ ، حيث sign هو تابع الإشارة ويأخذ القيمة $+1$ عندما $x > 0$ ، و القيمة -1 عندما $x < 0$ ، والقيمة 0 عنما $x = 0$. في هذه الحالة $\mathrm{cont}(f) = \mathbb{R}^*$. إنّ $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \left|x\right|$ تابعٌ أصليّ للتابع f .
2. ليكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto E(x)$ ، حيث E هو تابع الجزء الصحيح. في هذه الحالة $\mathrm{cont}(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. نتحقّق بسهولة أنّ
$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto E(x)\left(x - \frac{E(x)+1}{2}\right)$$
تابعٌ أصليّ للتابع f .

مبرهنة 11. ليكن I مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$، وليكن $f \in C_p^{loc}(I)$، عندئذٍ

1. يوجد تابع أصليّ للتابع f.
2. إذا كان F و G تابعين أصليّين للتابع f، كان $G - F$ ثابتًا على I.
3. إذا كان F تابعًا أصليًّا للتابع f، كان

$$\forall(a,b) \in I^2, \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b .$$

الإثبات

1. ليكن a عنصرًا من المجال I، نعرّف التابع F المعرّف على I بالصيغة

$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}$، ولنثبت أنّ F تابعٌ أصلي للتابع f.

ليكن $x_0 \in I$، يوجد $\alpha > 0$ بحيث $J = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \cap I$ مجالٌ متراصّ غير تافه.

لنثبت استمرار F. إنّ f محدود على J، نضع $M = \sup_{t \in J} \left| f(t) \right|$. ليكن

$x \in J$ عندئذٍ

$$\left|F(x) - F(x_0)\right| = \left|\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{dt}\right| \le \left|\int_{x_0}^x \left| f(t)\right| \mathrm{dt}\right| \le M\left|x - x_0\right|$$ إذن F

مستمرّ عند x_0، ومن ثَمّ F مستمرّ على I.

من جهةٍ أخرى، ليكن $x_0 \in \mathrm{cont}(f)$، و $0 < \varepsilon$، يوجد عندئذٍ $0 < \delta$ بحيث

$$x \in I \wedge \left|x - x_0\right| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f(x_0)\right| < \varepsilon$$

ليكن $x \in I \setminus \{x_0\}$، و $\left|x - x_0\right| < \delta$ عندئذٍ يتحقّق

$$\begin{aligned}
\left|F(x) - F(x_0) - (x - x_0)f(x_0)\right| &= \left|\int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0))\,\mathrm{dt}\right| \\
&\le \left|\int_{x_0}^x \left|f(t) - f(x_0)\right| \mathrm{dt}\right| \\
&\le \left|\int_{x_0}^x \varepsilon\,\mathrm{dt}\right| = \varepsilon\left|x - x_0\right|
\end{aligned}$$

ومنه

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|\le\varepsilon$$

نستنتج ممّا سبق أنّ

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\ne x_0}}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$$

ومن ثَمّ F اشتقاقيّ عند x_0 و $F'(x_0)=f(x_0)$ ، وبذلك نكون قد أثبتنا أنّ F تابعٌ أصلي للتابع f .

2. نفترض أنّ F و G تابعان أصليّان للتابع f ، و $H=G-F$ ، وليكن $x,y\in I$ بحيث $x<y$. إنّ f مستمرّ قِطعيًّا على المجال $[x,y]$، فتوجد تقسيمة $(x=x_0,x_1,\cdots,x_m=y)$ ملائمة للتابع f . إنّ f مستمرّ على كلّ خليّة $]x_{k-1},x_k[$ ، ومن ثَمّ يكون كلّ من F و G اشتقاقيًّا على $]x_{k-1},x_k[$ ويتحقّق $\forall t\in]x_{k-1},x_k[,F'(t)=f(t),G'(t)=f(t)$.

ومنه $\forall t\in]x_{k-1},x_k[,H'(t)=0$. إذن H اشتقاقيّ ومشتقّه معدوم على كلّ مجال $]x_{k-1},x_k[$ ، وهو مستمرّ على $[x_{k-1},x_k]$. نستنتج من ذلك أنّ H ثابت على $[x_{k-1},x_k]$، وبشكلٍ خاص يكون $H(x_{k-1})=H(x_k)$ ، وذلك أيًّا كان العدد الطبيعي $k\in\mathbb{N}_m$. إذن $H(x)=H(x_0)=H(x_m)=H(y)$. بذلك نكون قد أثبتنا أنّ H ثابتٌ على I .

3. ليكن $c\in I$. إنّ التابع $G:I\to\mathbb{R},x\mapsto\int_c^x f(t)\,\mathrm{dt}$ تابع أصليّ للتابع f ، ومن ثمّ فإنّ $G-F$ ثابتٌ على I ، فيوجد $y_0\in\mathbb{R}$ بحيث $\forall t\in I,G(t)-F(t)=y_0$. ليكن إذن $(a,b)\in I^2$ ، لدينا

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}&=\int_c^b f(t)\,\mathrm{dt}-\int_c^a f(t)\,\mathrm{dt}\\&=G(b)-G(a)\\&=\big(F(b)+y_0\big)-\big(F(a)+y_0\big)\\&=F(b)-F(a)\end{aligned}$$

وهو المطلوب إثباته. ■

2. حساب التوابع الأصليّة والتكاملات المحدودة

إنّ حساب تابعٍ أصليّ لتابع هو عمليّة معاكسة للاشتقاق، لذلك نجد أنّ طرائق المكاملة تُستنبط بالأساس من قواعد الاشتقاق. ففي حالة حساب المشتقّات اعتمدنا على جدول بمشتقّات التوابع المألوفة، ومن ثَمّ استخدمنا، عند الحاجة، قواعد اشتقاق عبارة خطّيّة بتابعين، أو جداء تابعين أو تركيب تابعين.

1.2. التوابع الأصليّة للتوابع المألوفة

فيما يأتي جدولٌ بالتوابع الأصليّة للتوابع المألوفة مع مجالات تعريفها:

مجال التعريف I	التابع $f(x)$	التابع الأصلي $F(x)$
$]0,\infty[$	x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ ، $\alpha \neq -1$
$]0,\infty[$ أو $]-\infty,0[$	$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
$\mathbb{R}$	e^{ax}	$\frac{e^{ax}}{a}$
$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x$
$]-\pi/2,\pi/2[$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$\tan x$
$]0,\pi[$	$\frac{1}{\sin^2 x} = 1+\cot^2 x$	$\cot x$
$]-1,1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbb{R}$
$\ln\left\|x+\sqrt{x^2-1}\right\|$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]1,+\infty[$ أو $]-\infty,-1[$
$\dfrac{1}{2}\ln\left\|\dfrac{1+x}{1-x}\right\|$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$]-1,1[$ أو $]-\infty,-1[$ أو $]1,+\infty[$

2.2. المكاملة بتغيير المتحوّل

مبرهنة 12. ليكن I و J مجالين غير تافهين في $\mathbb{R}$، و $f : I \to J$ من الصف C^1 على I، و $g : J \to \Bbbk$ مستمرًّا على J. ليكن $(a,b) \in I^2$، عندئذٍ تتحقّق المساواة

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)\,\mathrm{dx} = \int_{f(a)}^{f(b)} g(t)\,\mathrm{dt}.$$

نقول في هذه الحالة إنّنا أجرينا تغيير المتحوّل $t = f(x)$، وإذا كان f تقابلًا أمكننا أن نكتب $x = f^{-1}(t)$، ومن ثمّ

$$\int_\alpha^\beta g(t)\,\mathrm{dt} = \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} g(f(x))f'(x)\,\mathrm{dx}$$

وفي هذه الحالة نقول إنّنا أجرينا تغيير المتحوّل $x = f^{-1}(t) = \varphi(t)$.

الإثبات

ليكن G تابعًا أصليًّا للتابع g، عندئذٍ $\int_{f(a)}^{f(b)} g(t)\,\mathrm{dt} = G(f(b)) - G(f(a))$. من جهةٍ أخرى، إنّ $G(f(x))$ تابعٌ أصلي للتابع $g(f(x)) \cdot f'(x)$، ومنه

$$\int_a^b g(f(x))f'(x)\,\mathrm{dx} = G(f(b)) - G(f(a))$$

ومن ثمّ $\int_a^b g(f(x))f'(x)\,\mathrm{dx} = \int_{f(a)}^{f(b)} g(t)\,\mathrm{dt}$، وهو المطلوب إثباته.

ملاحظة 4. عندما يكون التابع f' موجبًا تمامًا أو سالبًا تمامًا، عندئذٍ يكون f تقابلًا، ويُمكننا إجراء تغيير المتحوّل $t = f(x)$:

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b \frac{g(x)}{f'(x)} \cdot f'(x)\,\mathrm{dx} = \int_{f(a)}^{f(b)} g\left(f^{-1}(t)\right) \frac{1}{f'\left(f^{-1}(t)\right)}\,\mathrm{dt}$$

■

أمثلة

1. لحساب التكامل $\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{dx}$ ، نطبّق المبرهنة مع $f(x) = 1 + x^2$ ، و $g(t) = \frac{1}{2t^3}$ ، فنجد

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{dx} &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{dx} \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{t^3}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-2t^2}\right]_1^2 \\ &= \frac{3}{16}\end{aligned}$$

2. لحساب التكامل $\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{dx}$ ، نطبّق المبرهنة مع $f(x) = 1 + e^x$ ، و $g(t) = \frac{1}{t^2}$ ، فنجد $\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{dx} = \int_1^e \frac{1}{t^2}\,\mathrm{dt} = \left[\frac{-1}{t}\right]_1^e = \frac{e-1}{e}$.

3.2. المكاملة بالتجزئة

مبرهنة 13. ليكن I مجالًا غير تافه في $\mathbb{R}$، و f و g تابعين من الصف $\mathcal{C}^1$ على I، وليكن $(a,b) \in I^2$، عندئذٍ تتحقّق المساواة

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{dx} = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{dx}$$

الإثبات

لدينا $\forall x \in I, (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ ، ومنه $f(x)g(x)$ تابع أصليّ للتابع $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ ، وعليه

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{dx} = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{dx} \qquad \blacksquare$$

أمثلة

1. لحساب التكامل $I = \int_0^1 (1-x)e^x\,\mathrm{dx}$ ، نطبّق المبرهنة السابقة مع $f'(x) = e^x, g(x) = (1-x)$ ، فنجد

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (1-x)e^x\,\mathrm{dx} \\ &= \Big[(1-x)e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 (-1)e^x\,\mathrm{dx} \\ &= 1 + (e-1) = e \end{aligned}$$

2. لحساب التكامل $I = \int_0^\pi \cos x \cdot e^{-x}\,\mathrm{dx}$ ، نطبّق المبرهنة السابقة مرّتين على التوالي فنجد:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \cos x \cdot e^{-x}\,\mathrm{dx} \\ &= \Big[\sin x \cdot e^{-x}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \cdot (-e^{-x})\,\mathrm{dx} \\ &= 0 + \int_0^\pi \sin x \cdot e^{-x}\,\mathrm{dx} \\ &= \Big[-\cos x \cdot e^{-x}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x)\cdot(-e^{-x})\,\mathrm{dx} \\ &= e^{-\pi} + 1 - I \end{aligned}$$

ومنه $2I = e^{-\pi} + 1$ أو $I = \dfrac{e^{-\pi}+1}{2}$.

3. $\int_1^e \ln x\,\mathrm{dx} = \int_1^e 1\cdot \ln x\,\mathrm{dx} = \Big[x \cdot \ln x\Big]_1^e - \int_1^e (x)\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = 1$.

4. لحساب التكامل $\int_0^1 \arctan x \, \mathrm{dx}$ ، نطبّق المبرهنة مع $f'(x) = 1$ و $g(x) = \arctan x$ فنجد

$$\int_0^1 \arctan x \, \mathrm{dx} = \left[x \cdot \arctan x\right]_0^1 - \int_0^1 (x) \cdot \frac{1}{1+x^2} \mathrm{dx}$$
$$= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

5. لحساب التكامل $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} \mathrm{dx}$ نكتب

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} \mathrm{dx} = \int_0^1 \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} \mathrm{dx}$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \mathrm{dx} - \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \mathrm{dx}$$
$$= [\arctan x]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 x \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \mathrm{dx}$$
$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{x}{1+x^2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \mathrm{dx}$$
$$= \frac{\pi+2}{8}$$

4.2. مكاملة التوابع الكسريّة

تعتمد طريقة مكاملة التوابع الكسرية على المبرهنة الآتية التي سنقبلها دون إثبات

مبرهنة 14. ليكن $P \in \mathbb{C}[X]$ و $Q \in \mathbb{C}[X]$ كثيري حدود بأمثالٍ عقديّة. نفترض أنّ $\deg Q > 0$ ، وأنّ Q يُكتب بالشكل: $Q(X) = \lambda \cdot \prod_{i=1}^{r} (X - a_i)^{\mu_i}$

حيث (a_i) أعدادٌ من $\mathbb{C}$. عندئذٍ، يُكتب الكسر $\frac{P(X)}{Q(X)}$ بالشكل الوحيد الآتي

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = E(X) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{\mu_j}\frac{\alpha_{ik}}{(X-a_i)^k}$$

حيث $E(X)$ كثير حدود، و (α_{jk}) أعداد من $\mathbb{C}$.

نسمّي كتابة التابع الكسري بهذا الشكل التفريق إلى عناصر بسيطة.

في حالة التوابع الكسريّة تؤول المبرهنة إلى الشكل التالي:

نتيجة (الحالة الحقيقيّة) : ليكن $P \in \mathbb{C}[X]$ و $Q \in \mathbb{C}[X]$ كثيري بأمثالٍ حقيقيّة. نفترض أنّ $\deg Q > 0$ ، وأنّ Q يُكتب بالشكل:

$$Q(X) = \lambda \cdot \prod_{i=1}^{r}(X-a_i)^{\mu_i} \cdot \prod_{j=1}^{s}(X^2+b_jX+c_j)^{\nu_j}$$

حيث $(a_j),(b_j),(c_j)$ أعدادٌ حقيقيّة، ويتحقّق الشرط: أيًّا كان j من $\mathbb{N}_s$ ، فإنّ كثير الحدود $X^2+b_jX+c_j$ لا يقبل التفريق إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى، أي $\forall j \in \mathbb{N}_s, b_j^2-4c_j<0$. عندئذٍ، يُكتب الكسر $\frac{P(X)}{Q(X)}$ بالشكل الوحيد الآتي

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = E(X) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{\mu_j}\frac{\alpha_{ik}}{(X-a_i)^k} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{\nu_j}\frac{\beta_{jk}X+\gamma_{jk}}{(X^2+b_jX+c_j)^k}$$

حيث $E(X)$ كثير حدود، و $(\alpha_{jk}),(\beta_{jk}),(\gamma_{jk})$ أعداد حقيقيّة .

أمثلة

1. لحساب التكامل $\int_{-1}^{0}\frac{4}{x^2-4x+3}\mathrm{dx}$ ، نفرّق الكسر

$$F(x) = \frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{2}{(x-1)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-3}$$

لإيجاد a نضرب طرفيّ المساواة بـ $(x-1)$ ونعوّض بعد ذلك $x=1$ فنجد $a=-1$ ،

ولإيجاد b نضرب طرفيّ المساواة بـ $(x-3)$ ونعوّض بعد ذلك $x=3$ فنجد $b=1$ ، ومنه

$$\int_{-1}^{0} \frac{4}{x^2-4x+3}\,\mathrm{dx} = \int_{-1}^{0}\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{1}{x-3}\right)\mathrm{dx}$$
$$= \Big[-\ln(1-x)+\ln(3-x)\Big]_{-1}^{0}$$
$$= \ln\frac{3}{2}$$

2. لحساب التكامل $\int_{1/3}^{3} \frac{1}{x^2(1+x^2)^2}\,\mathrm{dx}$ ، نفرّق الكسر $F(x) = \frac{1}{x^2(1+x^2)^2}$.

نلاحظ أوّلًا أنّ الكسر يُكتب بدلالة x^2 فقط، فإذا وضعنا $y = x^2$ ، فإنّه يكفي تفريق الكسر $\frac{1}{y(1+y)^2}$.

$$\frac{1}{y(1+y)^2} = \frac{a}{y} + \frac{b}{1+y} + \frac{c}{(1+y)^2}$$

لإيجاد a نضرب طرفيّ المساواة بـ y ونعوّض بعد ذلك $y = 0$ فنجد $a = 1$.

لإيجاد c نضرب طرفيّ المساواة بـ $(1+y)^2$ ونعوّض بعد ذلك $y = -1$ ، فنجد أنّ $c = -1$.

لحساب b نضرب طرفيّ المساواة بـ y ونجعل y تسعى إلى ∞ ، فنجد $a + b = 0$ ومنه $b = -1$. إذن $\frac{1}{y(1+y)^2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{1+y} - \frac{1}{(1+y)^2}$ ، ومن ثمّ

$$\frac{1}{x^2(1+x^2)^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

وبالاستفادة من فكرة التمرين (.5) السابق نجد

$$\begin{aligned}\int_{1/3}^{3}\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}\,\mathrm{dx} &= \int_{1/3}^{3}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)\mathrm{dx}\\ &= \left[-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}-\frac{3}{2}\arctan x\right]_{\frac{1}{3}}^{3}\\ &= \frac{8}{3}-\frac{3}{2}\left(\arctan 3-\arctan\frac{1}{3}\right)\\ &= \frac{8}{3}-\frac{3}{2}\arctan\frac{4}{3}\end{aligned}$$

5.2. التكاملات التي تؤول إلى مكاملة توابع كسريّة

يؤول حساب الكثير من التكاملات إلى مكاملة توابع كسريّة وذلك بتغيير متحوّل مناسب. في الجدول الآتي أهمّ أنماط هذه التكاملات حيث F تابع كسريّ لمتحوّل واحد، و G و H تابعان كسريّان لمتحوّلين.

نمط التكامل	تغيير المتحوّل المناسب	ملاحظة
$\int_a^b F(e^x)\,\mathrm{dx}$	$t=e^x$	
$\int_a^b G(\cos x,\sin x)\,\mathrm{dx}$	$t=\tan\frac{x}{2}$ $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$	$a,b\in\left]-\pi,\pi\right[$
$\int_a^b G(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{dx}$	نقوم بإتمام ما تحت الجذر إلى مربّع كامل ثمّ نجري تغيير المتحوّل $t=\frac{x}{w}+\frac{b}{2aw}$ حيث $w=\sqrt{\left\lvert\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right\rvert}$، فيؤول حساب التكامل إلى حساب أحد التكاملات الثلاثة الآتية	

$\int_a^b G(x,\sqrt{1-x^2})\,\mathrm{dx}$	$t = \arcsin x$	$a,b \in [-1,1]$
$\int_a^b G(x,\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{dx}$	$x = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$	
$\int_a^b G(x,\sqrt{x^2-1})\,\mathrm{dx}$	$x = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$	$a,b \in [1,\infty[$ أو $a,b \in]-\infty,-1]$

أمثلة

1. لحساب التكامل $\int_1^2 \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}\mathrm{dx}$ ، نجري تغيير المتحوّل $t = f(x) = e^x$ ، فيكون $f'(x) = e^x, f(1) = e, f(2) = e^2$ ، ومنه

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{e^{3x}}{e^{2x}-1}\mathrm{dx} &= \int_e^{e^2} \frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{dt}\\ &= \int_e^{e^2}\left(1 + \frac{1/2}{t-1} - \frac{1/2}{t+1}\right)\mathrm{dt}\\ &= \left[t + \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\right]_e^{e^2}\\ &= e^2 - e + \frac{1}{2}\ln\frac{(1+e)^2}{1+e^2}\end{aligned}$$

2. لحساب التكامل $I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos x + \sin x}\mathrm{dx}$ ، نجري تغيير المتحوّل $t = \tan\frac{x}{2}$ أو $x = 2\arctan t = \varphi(t)$ ، فيكون $f(0) = 0, f(\pi/2) = 1$ ، $\varphi'(t) = \frac{2}{1+t^2}$ ،

وباستخدام التحويلات $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ نجد

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} \mathrm{dt} = \int_0^1 \frac{-2}{t^2 - 2t - 1} \mathrm{dt}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-1}{t - 1 - \sqrt{2}} + \frac{1}{t - 1 + \sqrt{2}} \right) \mathrm{dt}$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t - 1 + \sqrt{2}}{t - 1 - \sqrt{2}} \right| \right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + 1)$$

3. لحساب التكامل $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} \mathrm{dx}$ ، نكتب أوّلًا

$$x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left((2x+1)^2 - 1 \right)$$

ثمّ نجري تغيير المتحوّل الأوّل $s = f(x) = 2x + 1$ ، ومنه $f'(x) = 2$ و

$f(1) = 3, f(1) = 9$ ، فنجد $I = \displaystyle\int_3^9 \frac{1}{\sqrt{s^2 - 1}} \mathrm{ds}$. نجري تغيير المتحوّل الثاني

$s = \varphi(t) = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t} \right)$ حيث $\varphi : [1,\infty[\to [1,\infty[$ تقابل و

$t = \varphi^{-1}(s) = s + \sqrt{s^2 - 1}$ ، وفي هذه الحالة

$\varphi^{-1}(3) = 3 + 2\sqrt{2}, \varphi^{-1}(9) = 9 + 4\sqrt{5}$. وعليه

$I = \displaystyle\int_{3+2\sqrt{2}}^{9+4\sqrt{5}} \frac{\mathrm{dt}}{t} = \ln \frac{9 + 4\sqrt{5}}{3 + 2\sqrt{2}}$.

4. لحساب التكامل $I=\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x^2-x+1}}\,\mathrm{dx}$ ، نكتب أوّلًا

$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\left(\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)$ ، ونجري تغيير

المتحوّل الأوّل $s=f(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ ، فنجد $I=\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}\sqrt{s^2+1}}\,\mathrm{ds}$

. نجري الآن تغيير المتحوّل $s=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)=\varphi(t)$ أو $t=s+\sqrt{s^2+1}$ ،

فنجد

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{t^2+1}{t\left(t^2+\frac{4}{\sqrt{3}}t+1\right)}\,\mathrm{dt}\\
&= \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{t}+\frac{2}{t+\sqrt{3}}-\frac{2}{t+1/\sqrt{3}}\right)\mathrm{dt}\\
&= \left[\ln t+2\ln\frac{t+\sqrt{3}}{t+1/\sqrt{3}}\right]_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\\
&= 3\ln 3-4\ln 2
\end{aligned}
$$

5. لحساب التكامل $I=\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{-x^2+8x}}\,\mathrm{dx}$ ، نكتب أوّلًا

$-x^2+8x=16-(x-4)^2=16\left(1-\left(\frac{x}{4}-1\right)^2\right)$ ، ونجري تغيير المتحوّل

$s = f(x) = \frac{x}{4} - 1$ ، فنجد

$$I = \int_{-1/2}^{0} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \mathrm{ds} = \left[\arcsin s\right]_{-1/2}^{0} = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

3. طرائق الحساب التقريبي للتكاملات المحدودة

ليكن f تابعًا مستمرًّا على المجال غير التافه $[a,b]$. عندما لا يكون حساب قيمة التكامل $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ ممكنًا، نلجأ إلى طرائق تقريبيّة. تعتمد معظم تلك الطرائق على تقسيم المجال $[a,b]$ إلى مجالات صغيرة، ومن ثمّ تقريب التابع f بتابع بسيط على كلّ مجال من تلك المجالات.

ليكن n عددًا طبيعيًّا غير معدوم، ولتكن $\sigma = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ تقسيمة منتظمة للمجال $[a,b]$ حيث $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$ ، ونضع $\Delta t = \frac{b-a}{n}$ ، و $\forall k \in \{0,1,\cdots,n\}, f(x_k) = y_k$.

1.3. قاعدة المستطيل

تعتمد هذه القاعدة على تقريب التابع f على $]x_{k-1}, x_k[$ بالقيمة y_{k-1} ، وهي تُفضي إلى تقريب التكامل $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ بمجموع ريمان للتابع f الموافق للتقسيمة المنقوطة $\bar{\sigma} = \big((x_0, x_1, \cdots, x_n), (x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})\big)$ ، أي

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} \approx \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} \cdot \Delta t = s_n$$

وكذلك يُمكن تقريب التابع f على $]x_{k-1}, x_k[$ بالقيمة y_k ، ونقرّب التكامل $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ بمجموع ريمان للتابع f الموافق للتقسيمة المنقوطة

$$\bar{\sigma} = \big((x_0, x_1, \cdots, x_n), (x_1, x_2, \cdots, x_n)\big)$$

أي:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} \approx \sum_{k=1}^{n} y_k \cdot \Delta t = t_n$$

إنّ كلًّا من المجموعين السابقين متقارب من $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ عندما تسعى n إلى ∞.

2.3. قاعدة شبه المنحرف

في هذه الطريقة نقرّب التابع f على $]x_{k-1},x_k[$ بتابع حدوديّ $\tilde{f}$ من الدرجة الأولى، ويحقّق $\forall k\in\{0,1,\cdots,n\}, y_k=\tilde{f}(x_k)$، وهذا يقود إلى تقريب التكامل $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ بالعدد $\dfrac{s_n+t_n}{2}$ أي

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}\approx\sum_{k=1}^{n}(y_k+y_{k-1})\cdot\frac{\Delta t}{2}=(y_0+y_n)\cdot\frac{\Delta t}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}y_k\cdot\Delta t$$

إنّ تقارب المجموع السابق من $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ واضح.

3.3. قاعدة سمبسون (Simpson)

في هذه الطريقة نفترض أنّ $n=2m$ عددٌ زوجيّ، نقرّب التابع f على كلّ مجال $[x_{2k},x_{2k+2}]$ بتابع حدوديّ q_k من الدرجة الثانية

$$q_k(x)=a(x-x_{2k+1})^2+b(x-x_{2k+1})+c$$

ويحقّق

$$q_k(x_{2k})=y_{2k}, q_k(x_{2k+1})=y_{2k+1}, q_k(x_{2k+2})=y_{2k+2}$$

وبحلّ جملة المعادلات الثلاث الأخيرة نجد

$$a=\frac{y_{2k}+y_{2k+2}-2y_{2k+1}}{2(\Delta t)^2}$$
$$b=\frac{y_{2k+2}-y_{2k}}{2\Delta t}$$
$$c=y_{2k+1}$$

ولكن

$$\begin{aligned}\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} q_k(x)\,\mathrm{dx} &= \int_{-\Delta t}^{\Delta t} (at^2 + bt + c)\,\mathrm{dt} \\ &= \frac{\Delta t}{3}\left(2a(\Delta t)^2 + 6c\right) \\ &= \frac{\Delta t}{3}\left(y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2}\right)\end{aligned}$$

فيصبح تقريب التكامل على الوجه المبيّن

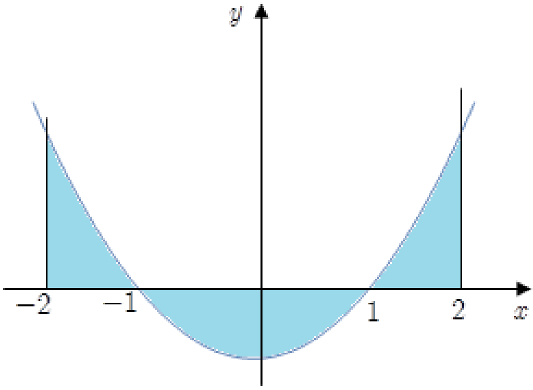
$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(t)\,\mathrm{dt} \\ &\approx \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} q_k(t)\,\mathrm{dt} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta t}{3}(y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2})\end{aligned}$$

إنّ طريقة سمبسون عمومًا أدقّ من طريقتي المستطيل وشبه المنحرف؛ بمعنى أنّ الخطأ المرتكب يسعى إلى الصفر بسرعة أكبر عندما تسعى n إلى ∞.

4. تطبيقات

1.4. حساب المساحات

ليكن f تابعًا مستمرًّا على المجال غير التافه $[a,b]$. إذا كان f موجبًا، فإنّ مساحة السطح المحدود بالخط البياني $\mathcal{C}_f$ للتابع والمستقيمات التي معادلاتها $x = a, x = b, y = 0$ تُعطى بالعلاقة $S = \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$. أمّا في الحالة العامّة فإنّ $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ يعبّر عن المساحة الجبريّة، أمّا المساحة الهندسيّة فتُعطى بالعلاقة $S = \int_a^b \left|f(t)\right|\mathrm{dt}$.



مثالان

1. لحساب المساحة المحصورة

بين الخطّ البياني للتابع

$f(x) = x^2 - 1$

والمستقيمات التي معادلاتها

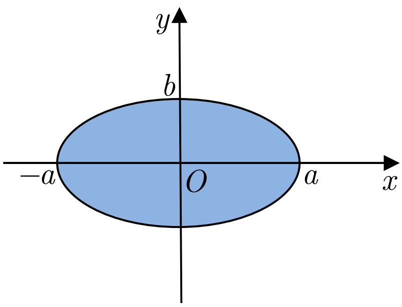
$x = -2, x = 2, y = 0$

نحسب قيمة التكامل

$\int_{-2}^{2} \left| x^2 - 1 \right| \mathrm{dx}$ ، فنجد

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{2} \left| x^2 - 1 \right| \mathrm{dx} \\ &= \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)\, \mathrm{dx} + \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, \mathrm{dx} + \int_{1}^{2} (x^2 - 1)\, \mathrm{dx} \\ &= 4 \end{aligned}$$

2. لحساب مساحة القطع الناقص المعطى بالمعادلة $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ حيث



$a > 0, b > 0$ ، نلاحظ أوّلًا أنّ تلك

المساحة هي ضعفي المساحة

المحصورة بين الخطّ البيانيّ للتابع

$x \mapsto b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ ومحور الفواصل

ومنه $S = 2\int_{-a}^{a} b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, \mathrm{dx}$.

وبإجراء تغيير المتحوّل $x = a\sin t$ نجد $S = 2ab\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\, \mathrm{dt}$ ، ومن ثمّ

$$S = \pi ab$$

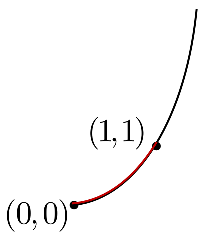
2.4. حساب الأطوال

ليكن $[a,b]$ مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$، وليكن التابع

$$\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^2, t\mapsto\big(x(t),y(t)\big)$$

من الصفّ C^1 على $[a,b]$، يُبرهن أنّ طول المنحني المُمثّل بالتابع φ يعطى بالتكامل $L_\varphi=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,\mathrm{dt}$. وفي الحالة الخاصّة عندما يكون $x(t)=t$ فإنّ L_φ هو طول منحني التابع $f(t)=y(t)$ بين النقطتين $\big(a,y(a)\big),\big(b,y(b)\big)$.

مثال



إنّ طول القوس الواصل بين النقطتين $(0,0),(1,1)$ من القطع المكافئ ذي المعادلة $y=x^2$، يساوي قيمة التكامل $\int_0^1\sqrt{1+(2t)^2}\,\mathrm{dt}$، ومنه

$$\begin{aligned}L&=\int_0^1\sqrt{1+(2t)^2}\,\mathrm{dt}=\frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{argsh}(2)}\operatorname{ch}^2 s\,\mathrm{ds}\\&=\frac{1}{4}\int_0^{\operatorname{argsh}(2)}\big(\operatorname{ch}2s+1\big)\mathrm{ds}=\frac{1}{4}\left[s+\frac{1}{2}\operatorname{sh}2s\right]_0^{\operatorname{argsh}(2)}\\&=\frac{1}{4}\Big(2\sqrt{5}+\operatorname{argsh}(2)\Big)\\&=\frac{1}{4}\Big(2\sqrt{5}+\ln\big(2+\sqrt{5}\big)\Big)\end{aligned}$$

3.4. حساب الحجوم

ليكن f تابعًا مستمرًّا على المجال غير التافه $[a,b]$. ليكن S السطح المحصور بين الخط البياني C_f للتابع والمستقيمات التي معادلاتها $x=a,x=b,y=0$. يُبرهن أنّ حجم المجسّم الناتج عن دوران السطح S حول محور الفواصل يُعطى بالتكامل

$$V=\pi\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{dt}$$

مثالان

1. إنّ حجم المجسّم الناتج عن دوران القطع الناقص المعطى بالمعادلة:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad ,a>0,b>0$$

حول محور الفواصل، يُعطى بالتكامل

$$V=\pi\int_{-a}^{a} b^2\left(1-t^2\ /\ a^2\right)\mathrm{dt}=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

وفي حالة الكرة التي نصف قطرها R نجد

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3$$

2. نستطيع أيضًا حساب حجم مخروط دائري قائم قاعدته قرص نصف قطره R، وارتفاعه h، فهو ناتج عن دوران المثلّث المحصور بين المستقيمات $y=0,x=h,y=\frac{r}{h}x$ حول محور الفواصل. لدينا إذن

$$V=\pi\int_0^h\left(\frac{R}{h}x\right)^2\mathrm{dx}=\frac{\pi}{3}R^2h$$

تمرينات ومسائل

التمرين 1. ليكن f تابعًا مضبوطًا، وموجبًا على المجال غير التافه $[a,b]$. أثبت أنّ التابع $\sqrt{f}$ تابعٌ مضبوط على $[a,b]$.

التمرين 2. ادرس نهاية المتتالية (α_n) حيث $\alpha_n = \int_0^1 t^n \arctan t \, \mathrm{d}t$.

التمرين 3. ليكن f تابعًا مضبوطًا وموجبًا على المجال غير التافه $[a,b]$، ويحقّق $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. أثبت أنّه أيًّا كان $x \in [a,b[$، كان $\lim_{t\to x^+} f(t) = 0$، وأنّه أيًّا كان $x \in]a,b]$، كان $\lim_{t\to x^-} f(t) = 0$.

التمرين 4. ليكن f تابعًا مستمرًّا على $\mathbb{R}$. في كلّ حالة من الحالات الآتية، أثبت أنّ التابع g من الصفّ C^1 على $\mathbb{R}$، واكتب مشتقّه بصيغة بسيطة:

1. $g(x) = \int_0^x xf(t)\,\mathrm{d}t$.
2. $g(x) = \int_0^x f(t+x)\,\mathrm{d}t$.
3. $g(x) = \int_{2x}^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t$.

التمرين 5. ليكن f و g تابعين مستمرّين على المجال غير التافه $[a,b]$. نفترض أنّ f موجب تمامًا، وأنّ التابع $h(x) = \int_a^b \left|f(t) + xg(t)\right|\mathrm{d}t$ يبلغ قيمةً محليّةً صغرى عند الصفر. أثبت أنّ $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = 0$. هل تبقى النتيجة صحيحة عندما يكون f موجبًا فقط؟

التمرين 6. ليكن f تابعًا مضبوطًا على المجال غير التافه $[a,b]$.

1. في حالة f تابعٌ درجيّ، أثبت أنّ $\lim_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(t)\cos\lambda t\,\mathrm{d}t = 0$.

2. استنتج أنّ $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \int_a^b f(t)\cos\lambda t \,\mathrm{dt} = 0$.

التمرين 7. جِد عددين حقيقيّين a و b بحيث يتحقّق

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\pi} (at^2 + bt)\cos nt \,\mathrm{dt} = \frac{1}{n^2}$$

، واستخدم هذه النتيجة لحساب المجموع $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

التمرين 8. احسب التكاملات المحدودة الآتية:

1	$\int_0^1 \arctan x \,\mathrm{dx}$	2	$\int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{1+e^x}$
3	$\int_0^1 x(\arctan x)^2 \,\mathrm{dx}$	4	$\int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{(1+x^2)^2}$
5	$\int_0^1 (x^2+3x-1)e^{-x} \,\mathrm{dx}$	6	$\int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{6-5\sin x+\sin^2 x}\mathrm{dx}$
7	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{dx}$	8	$\int_0^1 \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\mathrm{dx}$
9	$\int_{1/2}^1 3^{\sqrt{2x-1}} \,\mathrm{dx}$	10	$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{dx}$
11	$\int_1^2 \frac{\mathrm{dx}}{(x^2-2x+4)^{3/2}}$	12	$\int_0^1 x^2\sqrt{1+x^3} \,\mathrm{dx}$
13	$\int_0^1 \frac{1+x+x^3}{(x^2+2)^2}\mathrm{dx}$	14	$\int_1^3 \frac{x+x^3}{(1+x)(x+2)^2}\mathrm{dx}$
15	$\int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{1+x^4}$	16	$\int_0^1 \frac{\mathrm{dx}}{(1+x^4)^2}$

التمرين 9. احسب كلًّا من التكاملين الآتيين

① $\int_0^1 e^x \cos x \, \mathrm{dx}$ ② $\int_1^{e^\pi} \sin(\ln x) \, \mathrm{dx}$

التمرين 10. احسب كلًّا من التكاملين الآتيين

① $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} \mathrm{dx}$ ② $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \mathrm{dx}$

التمرين 11. ليكن $n \in \mathbb{N}$. نضع $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{dt}}{(1+t^2)^n}$.

1. جد علاقة بسيطة بين $F_n(x)$ و $F_{n+2}(x)$.
2. استنتج صيغة $F_k(x)$ عندما $0 \le k \le 3$.

التمرين 12. ليكن $n \in \mathbb{N}$. نضع $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, \mathrm{dx}$.

1. جد علاقة بسيطة بين I_{n+2} و I_n.
2. جد I_n بدلالة n.

التمرين 13. ليكن $n \in \mathbb{N}$ و p من $\mathbb{R}$ بحيث $2p \in \mathbb{N}$. نضع $I_{n,p} = \int_0^1 x^n (1-x)^p \, \mathrm{dx}$.

1. احسب $I_{n,0}$ و $I_{0,1/2}$.
2. جد علاقة بسيطة بين $I_{n,1/2}$ و $I_{n+1,1/2}$. واستنتج صيغة $I_{n,1/2}$ بدلالة n.
3. جد علاقة بين $I_{n,p}$ و $I_{n+1,p-1}$، واستنتج $I_{n,p}$ عندما $p \in \mathbb{N}$.
4. جِد صيغة بسيطة للمجموع $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \left(-1\right)^k C_p^k \frac{1}{n+k+1}$.

التمرين 14. ليكن ليكن f تابعًا من الصف $\mathcal{C}^1([0,1])$ و $f(1) = 0$.

1. أثبت أنّ $\int_0^1 \left(f'(t) + \tan t \cdot f(t)\right)^2 \mathrm{dt} = \int_0^1 f'(t)^2 \, \mathrm{dt} - \int_0^1 f(t)^2 \, \mathrm{dt}$.

2. استنتج أنّ $\int_0^1 f(t)^2 \,\mathrm{dt} \le \int_0^1 f'(t)^2 \,\mathrm{dt}$.

التمرين 15. احسب نهايات المتتاليات التالية:

1	$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$	2	$c_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$
3	$b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2\sqrt[3]{n^3+k^3}}$	4	$d_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$
5	$e_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2x^2}, x \in \mathbb{R}^*$	6	$f_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$
7	$g_n = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)}$	8	$h_n = \sum_{k=1}^{n} \tan^2 \frac{1}{\sqrt{n+k}}$

التمرين 16. ليكن f تابعًا مستمرًّا، وموجبًا على المجال غير التافه $[a,b]$. أثبت أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_a^b \left(f(t)\right)^n \mathrm{dt}} = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

التمرين 17. ليكن f تابعًا مستمرًّا على المجال غير التافه $[0,1]$. نعرّف التابع $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ بالصيغة

$$F(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{dt}$$

1. أثبت أنّ F من الصف $\mathcal{C}^2$، واحسب $F''(x)$.

2. استنتج أنّ $\forall x \in [0,1], F(x) = \int_0^x \left(\int_s^1 f(s)\mathrm{dt}\right)\mathrm{ds}$.

التمرين 18. ليكن التابع $f\left(x\right) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{dt}}{\ln t}$ المعرّف على $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

1. احسب النهايات $\lim\limits_{x\to 0} f(x), \lim\limits_{x\to 1} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

2. احسب التكامل $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{dt}$.

3. أثبت أنّ f من الصفّ $\mathcal{C}^\infty$ على $]0,\infty[$.

4. ادرس تغيّرات التابع f، وارسم خطّه البياني.

التمرين 19. أيًّا كان $n \in \mathbb{N}$، ليكن التابع I_n المعطى بالصيغة

$$I_n(x) = \int_0^\pi \frac{\cos nt}{1 - x\cos t}\,\mathrm{dt} \text{ .}$$

1. بيّن أنّ I_n معرّف على $]-1,1[$.

2. ليكن $a \in]0,\pi[$.

i. احسب التكاملين $\int_0^a \frac{1}{1 - x\cos t}\,\mathrm{dt}$ و $\int_0^a \frac{\cos t}{1 - x\cos t}\,\mathrm{dt}$.

ii. استنتج صيغة بسيطة لكلّ من $I_0(x)$ و $I_1(x)$.

3. جِدْ علاقةً تربط $I_n(x)$ و $I_{n+1}(x)$ و $I_{n+2}(x)$.

4. استنتج أنّ $I_n(x) = \frac{\pi}{x^n\sqrt{1-x^2}}\left(1 - \sqrt{1-x^2}\right)^n$.

التمرين 20.

1. أيًّا كان العدد الطبيعي n، نضع

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\,\mathrm{dx}$$

i. أثبت أنّ $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,\mathrm{dx}$.

ii. أثبت أنّ المتتالية (W_n) متناقصة تمامًا.

iii. جِد علاقةً تدريجيّة بين W_n و W_{n+2}، واستنتج صيغةً بسيطة لكلٍّ من W_{2p} و W_{2p+1} حيث $p \in \mathbb{N}$.

iv. أثبت أنّه أيًّا كان العدد الطبيعي n، فإنّ

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

v. أثبت أنّه أيًّا كان العدد الطبيعي n، فإنّ

$$1 - \frac{1}{n+2} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < 1$$

واستنتج مكافئًا بسيطًا للمتتالية (W_n).

2. أثبت أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \frac{2}{\pi}$$

3. لنتأمّل المتتالية (u_n) المعرّفة عندما $1 \leq n$ بالصيغة

$$u_n = \frac{n!\,e^n}{n^{n+1/2}}$$

والمتتالية المساعدة (v_n) المعرّفة عندما $2 \leq n$ بالصيغة

$$v_n = \ln u_n - \ln u_{n-1}$$

i. جِد صيغةً بسيطةً للحد v_n بدلالة n، واكتب النشر المحدود من الدرجة الثانية للحد v_n بدلالة $\frac{1}{n}$.

ii. استنتج أنّ المتسلسلة $\left(\sum v_n\right)$ متقاربة، وأنّه يوجد $0 < K$ بحيث $n! \sim K\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.

iii. باستخدام المكافئ السابق عيّن مكافئًا للمتتالية (W_{2p})، واستنتج أنّ $K = \sqrt{2\pi}$، أو

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

وهي معروفة بعبارة سترلنغ (Stirling).

الفصل الثالث: التكاملات المعمّمة والتوابع المعرّفة بواسطة تكاملات

1. التكاملات المعمّمة

1.1. مفاهيم أساسيّة

مبرهنة 1. ليكن I مجالًا حقيقيًّا غير تافهٍ بحيث $a = \inf I \in \overline{\mathbb{R}}$ و $b = \sup I \in \overline{\mathbb{R}}$.
ليكن $f \in \mathcal{R}(I)$ تابعًا مضبوطًا على I. إنّ القضيّتين الآتيتين متكافئتان:

1. يوجد $c \in I$ بحيث يكون للتابع $F_c : I \to \mathbb{k}, x \mapsto \int_c^x f(t)\,\mathrm{dt}$ نهايةٌ عدديّةٌ عند كلّ من a و b.
2. أيًّا كان $c \in I$، فإنّ للتابع $F_c : I \to \mathbb{k}, x \mapsto \int_c^x f(t)\,\mathrm{dt}$ نهايةً عدديّةً عند كلّ من a و b.

الإثبات

من الواضح أنّ (2.) تقتضي (1.).

نفترض الآن أنّ القضيّة (1.) محقّقة وليكن $c \in I$ بحيث يكون للتابع $F_c(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{dt}$ نهايةٌ عدديّةٌ عند كلّ من a و b. ليكن $c' \in I$ عندئذٍ يكون حسب علاقة شال $F_{c'}(x) = \int_{c'}^c f(t)\,\mathrm{dt} + F_c(x)$، وعليه فإنّ $F_{c'}$ يقبل أيضًا نهايةً عدديّةً عند كلّ من a و b، وهذا يعني أنّ القضيّة (2.) صحيحة، وهو ما نريد إثباته. ■

ملاحظة 1. إنّ المساواة $F_{c'}(x) = \int_{c'}^c f(t)\,\mathrm{dt} + F_c(x)$ تعني أنّ المقدار $\lim_{x\to b} F_c(x) - \lim_{x\to a} F_c(x)$ لا يتعلّق باختيار العنصر c من I، وهذا ما يبرّر التعريف الآتي.

تعريف 1. ليكن I مجالًا غير تافهٍ من $\mathbb{R}$، وليكن $c \in I$. نضع $a = \inf I \in \overline{\mathbb{R}}$، و $b = \sup I \in \overline{\mathbb{R}}$. ليكن $f \in \mathcal{R}(I)$ تابعًا مضبوطًا على I.

نقول إنّ **التكامل المعمّم أو المعتلّ** $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ **متقاربٌ** إذا وفقط إذا كان للتابع $F : I \to \mathbb{k}, x \mapsto \int_c^x f(t)\,\mathrm{dt}$ نهايةٌ عدديّةٌ عند كلٍّ من a و b، وفي هذه الحالة نكتب $\int_I f(t)\,\mathrm{dt} = \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(x)$ ، وندعو المقدار السابق تكامل التابع f من a إلى b أو تكامل f على I. في الحالة المعاكسة نقول إنّ التكامل $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ متباعد.

ملاحظة 2. يُمكن تمييز أربع حالات للمجال I:

1. عندما يكون $I = [a,b]$ فإنّ التكامل المعمم $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ متقارب دومًا وهو ذاته التكامل المحدود.

2. عندما $I = [a,b[$ نقول إنّ التكامل $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ معتلّ عند b، وهو متقاربٌ إذا وفقط إذا كان للتابع $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}$ نهايةٌ عدديّةٌ عند b، وفي هذه الحالة نكتب $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}$.

3. عندما $I =]a,b]$ نقول إنّ التكامل $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ معتلّ عند a، وهو متقاربٌ إذا وفقط إذا كان للتابع $F(x) = \int_x^b f(t)\,\mathrm{dt}$ نهايةٌ عدديّةٌ عند a، وفي هذه الحالة نكتب $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = \lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\,\mathrm{dt}$. إنّ هذه الحالة تؤول إلى الحالة الأولى بإجراء تغيير متحوّل مناسب

$$\int_x^b f(t)\,\mathrm{dt} = \int_a^{a+b-x} f(a+b-t)\,\mathrm{dt}$$

ومن ثمّ $\lim_{x\to a} \int_x^b f(t)\,\mathrm{dt} = \lim_{x\to b} \int_a^x f(a+b-t)\,\mathrm{dt}$.

4. عندما $I =]a,b[$ نقول إنّ التكامل $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ معتلّ عند a وعند b، وهو متقاربٌ إذا وفقط إذا وُجد $c \in I$ بحيث يكون للتابع $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{dt}$ نهايةٌ عدديّةٌ عند a، ونهايةٌ عدديّةٌ عند b، وفي هذه الحالة نكتب

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = \lim_{x\to b}\int_c^x f(t)\,\mathrm{dt} - \lim_{x\to a}\int_c^x f(t)\,\mathrm{dt}$$

إذن تؤول دراسة تقارب تكامل معمّم في كلّ الحالات إلى دراسة الحالة عندما $I = [a,b[$، وهي التي سندرسها بالتفصيل فيما يأتي.

مبرهنة 2. ليكن f و g تابعين مضبوطين على المجال غير التافه $[a,b[$ حيث $(a,b) \in \mathbb{R}\times\overline{\mathbb{R}}$، وليكن $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$. نفترض أنّ كلًّا من التكاملين المعمّمين $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ و $\int_a^b g(t)\,\mathrm{dt}$ متقارب.

عندئذٍ يتقارب التكامل $\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,\mathrm{dt}$، وتتحقّق المساواة:

$$\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,\mathrm{dt} = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} + \mu\int_a^b g(t)\,\mathrm{dt}$$

الإثبات

أيًّا كان $x \in [a,b[$ نضع

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}, G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{dt}, H(x) = \lambda F(x) + \mu G(x)$$

لدينا $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} = \lim\limits_{x\to b} F(x)$ و $\int_a^b g(t)\,\mathrm{dt} = \lim\limits_{x\to b} G(x)$، ومن ثَمّ يقبل التابع H نهايةً عدديّةً عند b ويكون $\lim\limits_{x\to b} H(x) = \lambda \lim\limits_{x\to b} F(x) + \mu \lim\limits_{x\to b} G(x)$، وعليه يتقارب التكامل المعمّم $\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,\mathrm{dt}$، ويتحقّق

$$\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\,\mathrm{dt} = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt} + \mu\int_a^b g(t)\,\mathrm{dt} \qquad \blacksquare$$

تتمثّل أهميّة الأمثلة الآتية في استخدامها بشكلٍ متكرّر في دراسة التكاملات المعمّمة.

2.1. التكاملات المعمّمة للتوابع المعياريّة

1. التكامل المعمّم $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{dt}}{t^{\alpha}}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ معتلّ عند $+\infty$. لدراسة تقاربه ندرس نهاية التابع $F(x) = \int_1^{x} \frac{\mathrm{dt}}{t^{\alpha}}$ عند $+\infty$، وذلك حسب قيم $\alpha \in \mathbb{R}$. نميّز إذن حالتين الأولى عندما $\alpha = 1$، وعندها $F(x) = \ln x$ والتكامل متباعد عند ∞. أمّا الحالة الثانية فهي عندما $\alpha \neq 1$، وعندها فإنّ

$$F(x) = \left.\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^x = \frac{1}{-\alpha+1}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right)$$

وهو يقبل نهايةً عدديّةً فقط في حالة $\alpha > 1$، ومن ثمّ فإنّ التكامل المعمّم متقارب إذا وفقط إذا كان $\alpha > 1$، وفي هذه الحالة $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{dt}}{t^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha - 1}$.

2. التكامل المعمّم $\int_0^{1} \frac{\mathrm{dt}}{t^{\alpha}}$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ معتلّ عند 0. لدراسة تقاربه ندرس نهاية التابع $F(x) = \int_x^{1} \frac{\mathrm{dt}}{t^{\alpha}}$، ولهذا الغرض نميّز حالتين: الأولى عندما $\alpha = 1$، وعندها $F(x) = -\ln x$ والتكامل متباعد عند الصفر. أمّا الحالة الثانية فهي عندما $\alpha \neq 1$ وعندها $F(x) = \left.\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_x^1 = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right)$، ومن ثمّ فإنّ التكامل المعمّم متقارب إذا وفقط إذا كان $\alpha < 1$، وفي هذه الحالة $\int_0^{1} \frac{\mathrm{dt}}{t^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}$.

3. بناءً على ما تقدّم نستنتج أنّ التكامل المعمّم $\int_0^\infty \frac{\mathrm{dt}}{t^\alpha}$ متباعد مهما تكن قيمة $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. التكامل المعمّم $\int_0^\infty e^{\alpha t}\,\mathrm{dt}$ معتلّ عند $+\infty$، وهو متقارب إذا وفقط إذا كان $\alpha < 0$.

5. التكامل المعمّم $\int_{-\infty}^\infty e^{\alpha t}\,\mathrm{dt}$ معتلّ عند $+\infty$ وعند $-\infty$، وهو متباعدٌ مهما تكن قيمة $\alpha \in \mathbb{R}$.

6. التكامل المعمّم $\int_0^1 \ln t\,\mathrm{dt}$ معتلّ عند 0، وهو متقارب، لأنّ

$F(x) = \int_x^1 \ln t\,\mathrm{dt} = x - x\ln x - 1$ يقبل -1 نهايةً له عند 0 ومنه $\int_0^1 \ln t\,\mathrm{dt} = -1$.

7. التكامل المعمّم $\int_1^\infty \ln t\,\mathrm{dt}$ معتلّ عند $+\infty$، وهو متباعد لأنّ

$\int_1^x \ln t\,\mathrm{dt} = 1 + x\ln x - x$ ليس له نهايةٌ عدديّةٌ عند $+\infty$.

8. التكامل المعمّم $\int_0^\infty \cos t\,\mathrm{dt}$ متباعد لأنّ التابع

$F(x) = \int_0^x \cos t\,\mathrm{dt} = \sin x$ ليس له نهايةٌ عدديّةٌ عند $+\infty$.

ملاحظة 3. إنّ دراسة تقارب التكاملات المعمّمة تشبه في خطوطها العامّة، وفي كثير من تفاصيلها دراسة تقارب المتسلسلات كما سنرى فيما يأتي. فمن تعريف التقارب إلى دراسة تكاملات التوابع الموجبة ومبرهنات المقارنة إلى التقارب بالإطلاق. ومثل المتسلسلات فإنّ دراسة التكاملات المعمّمة تهدف، في المقام الأوّل، إلى معرفة طبيعة التكامل (متقارب أم متباعد)، وحساب قيمته في حالة التقارب.

3.1. التكاملات المعمّمة للتوابع الموجبة

مبرهنة 3. ليكن f تابعًا مضبوطًا وموجبًا على المجال $[a,b[$ حيث $(a,b) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$. يكون التكامل $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ متقاربًا إذا وفقط إذا كان التابع $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}$ محدودًا من الأعلى على $[a,b[$.

الإثبات

ليكن x, y عنصرين من $[a,b[$ بحيث $x < y$، عندئذٍ

$$F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)\,\mathrm{dt} \geq 0$$

وعليه فإنّ F متزايد، فهو يقبل نهايةً عدديّةً عند b إذا وفقط إذا كان محدودًا من الأعلى. ■

مبرهنة 4. ليكن f و g تابعين مضبوطين موجبين على المجال غير التافه $[a,b[$ حيث $(a,b) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}$. إذا تحقّق أيٌّ من الشروط الآتية فإنّ تقارب التكامل $\int_a^b g(t)\,\mathrm{dt}$ يقتضي تقارب التكامل المعمم $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$:

1. يوجد $c \in [a,b[$ بحيث $c < t < b \Rightarrow 0 \leq f(t) \leq g(t)$.
2. يوجد $M \in \mathbb{R}$، و $c \in [a,b[$ بحيث
$c < t < b \Rightarrow 0 \leq f(t) \leq M \cdot g(t)$.
(عندما لا ينعدم g فإنّ هذا الشرط يؤول إلى أنّ $\dfrac{f}{g}$ محدود بجوار b.)
3. g لا ينعدم، ويقبل التابع $\dfrac{f}{g}$ نهايةً عدديّةً عند b.

الإثبات

1. من علاقة شال نجد أنّ طبيعة التكامل المعمّم $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ من طبيعة التكامل المعمّم $\int_c^b f(t)\,\mathrm{dt}$. إنّ التكامل المعمّم $\int_c^b g(t)\,\mathrm{dt}$ متقارب، فالتابع $G(x) = \int_c^x g(t)\,\mathrm{dt}$

محدود من الأعلى. ولمّا كان $\forall x \in [a,b[, F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{dt} \leq \int_c^x g(t)\,\mathrm{dt}$ ، فالتابع $F(x)$ محدودٌ من الأعلى فهو يقبل نهاية عدديّةً عند b، ومن ثمّ يتقارب التكامل المعمّم $\int_c^b f(t)\,\mathrm{dt}$ ، وهذا يعني تقارب التكامل $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$.

2. نتيجة مباشرة من (1.).

3. نفترض أنّ $\lim_{t\to b} \frac{f(t)}{g(t)} = l$ ، عندئذٍ يوجد $c \in [a,b[$ بحيث إذا كان $c < t < b$ كان

$0 \leq \frac{f(t)}{g(t)} \leq l+1$ أو $0 \leq f(t) \leq (l+1)g(t)$ ، وبذلك نعود إلى الحالة (2.). ■

نتائج

1. إذا كان f و g موجبين ومتكافئين عند b (وهذا يكافئ في حالة g لا ينعدم بجوار b أنّ $\lim_{t\to b} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$)، كان التكاملان المعمّمان $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ و $\int_a^b g(t)\,\mathrm{dt}$ من طبيعةٍ واحدة، أي: إمّا يتقاربان معًا أو يتباعدان معًا.
2. إذا كان $f(t)$ مهملًا أمام $g(t)$ بجوار b: $f(t) = \mathrm{o}_b\left(g(t)\right)$ أو كان $g(t)$ مهيمنًا على $f(t)$ بجوار b: $f(t) = \mathrm{O}_b\left(g(t)\right)$ ، وكان $\int_a^b g(t)\,\mathrm{dt}$ متقاربًا، كان $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ متقاربًا.

ملاحظة 4. ليس ضروريًّا أن يكون التابعان f و g موجبين على كلّ المجال $[a,b[$، إذ يكفي أن يكونا كذلك في جوارٍ للعنصر b. ويكفي أيضًا أن يكون كلٌّ منهما محافظًا على إشارة واحدة بجوارٍ للعنصر b، إذ نعود إلى حالة التوابع الموجبة بضرب التابع السالب بالعدد -1 .

أمثلة

1. إنّ التكامل $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{dt}}{2+t+t^5}$ معتلّ عند $+\infty$، وهو متقارب لأنّ $\displaystyle\forall t \geq 1, \frac{1}{2+t+t^5} \leq \frac{1}{t^5}$ و $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{dt}}{t^5}$ متقارب.

2. لدراسة التكامل المعمّم $\displaystyle I_{\alpha,\beta} = \int_e^{\infty} \frac{\mathrm{dt}}{t^\alpha \ln^\beta t}$ المعتلّ عند $+\infty$، نضع $\displaystyle\gamma = \frac{\alpha+1}{2}$، و $\displaystyle\delta = \frac{\alpha-1}{2}$ و $\displaystyle f(t) = \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t}$، و $\displaystyle g(t) = \frac{1}{t^\gamma}$، وعليه $\displaystyle f(t) = g(t) \cdot \frac{1}{t^\delta \ln^\beta t}$. نميّز ثلاث حالات:

① حالة $\alpha > 1$: عندئذٍ $\gamma > 1$، ومن ثمّ فإنّ $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$، ولمّا كان $\displaystyle\int_e^{\infty} g(t)\,\mathrm{dt}$ متقاربًا، فالتكامل $\displaystyle\int_e^{\infty} f(t)\,\mathrm{dt}$ متقاربٌ.

② حالة $\alpha < 1$: عندئذٍ $\gamma < 1$، ومن ثمّ فإنّ $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = +\infty$، وعليه يوجد $c \in [e,\infty[$ بحيث $t \geq c \Rightarrow f(t) \geq g(t)$، ولمّا كان $\displaystyle\int_e^{\infty} g(t)\,\mathrm{dt}$ متباعدًا، كان $\displaystyle\int_e^{\infty} f(t)\,\mathrm{dt}$ متباعدًا.

③ حالة $\alpha = 1$: عندئذٍ

$\displaystyle F(x) = \int_e^{x} f(t)\,\mathrm{dt} = \int_e^{x} \frac{\mathrm{dt}}{t \ln^\beta t} = \int_1^{\ln x} \frac{ds}{s^\beta}$ ونعلم من دراستنا لطبيعة التكامل $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{ds}{s^\beta}$ أنّ للتابع F نهايةً عدديّةً إذا وفقط إذا كان $\beta > 1$.

من حيث النتيجة، يتقارب التكامل $I_{\alpha,\beta}$ إذا وفقط إذا كان $\alpha > 1$ أو $(\alpha = 1 \wedge \beta > 1)$.

3. لدراسة التكامل $\displaystyle\int_e^\infty \frac{\ln^2 t}{t^2 - t + 1}\,\mathrm{dt}$ المعتلّ عند $+\infty$، نضع $f(t) = \dfrac{\ln^2 t}{t^2 - t + 1}$ و $g(t) = \dfrac{1}{t^2 \ln^{-2} t}$. إنّ f و g تابعين موجبين على المجال $[e, +\infty[$، و $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$، و $\displaystyle\int_e^\infty g(t)\,\mathrm{dt}$ متقارب حسب المثال (2.)، وعليه فإنّ $\displaystyle\int_e^\infty f(t)\,\mathrm{dt}$ متقارب.

4. لدراسة التكامل $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \left|t\right|^\alpha \cdot e^{\beta t}\,\mathrm{dt}$ المعتلّ عند $-\infty$، نضع $f(t) = \left|t\right|^\alpha \cdot e^{\beta t}$ و $g(t) = e^{\frac{\beta}{2}t}$. نميّز ثلاث حالات:

① حالة $\beta > 0$، لدينا f و g تابعان موجبان على المجال $]-\infty, -1]$، و $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$، و $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} g(t)\,\mathrm{dt}$ متقارب، وعليه فإنّ $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,\mathrm{dt}$ متقارب.

② حالة $\beta < 0$، f و g تابعان موجبان على المجال $]-\infty, -1]$، و $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = +\infty$، ومنه يوجد $c \le -1$ بحيث تتحقّق المتراجحة $f(t) \ge g(t)$ عندما $t \le c$، ولكن $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} g(t)\,\mathrm{dt}$ متباعد، إذن $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,\mathrm{dt}$ متباعدٌ أيضًا.

③ حالة $\beta = 0$، عندئذٍ $f(t) = \dfrac{1}{\left|t\right|^{-\alpha}}$ يتقارب التكامل إذا وفقط إذا كان $-\alpha > 1$ أو $\alpha < -1$.

من حيث النتيجة يتقارب التكامل المعمّم $\int_{-\infty}^{-1}|t|^{\alpha}\cdot e^{\beta t}\,\mathrm{dt}$ إذا وفقط إذا كان $\beta>0$ أو $(\beta=0\wedge\alpha<-1)$.

5. التكامل $\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{dt}$ معتلّ عند 0 وعند $+\infty$. إنّ التكامل $\int_1^{\infty}t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{dt}$ متقاربٌ مهما يكن $x\in\mathbb{R}$. أمّا التكامل $\int_0^{1}t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{dt}$ المعتلّ عند الصفر فهو متقارب إذا وفقط إذا كان $x>0$، وذلك لأنّ $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^{x-1}e^{-t}}{t^{x-1}}=1$. وعليه فإنّ التابع المهمّ $\Gamma(x)=\int_0^{\infty}t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{dt}$ المنسوب لأولَر معرّف على $]0,\infty[$، ونستطيع التحقّق بسهولة من أنّ $\Gamma(n+1)=n!$.

6. لتحديد طبيعة التكامل $\int_0^{\infty}\dfrac{1-it}{(1+it)^2}\,\mathrm{dt}$ المعتلّ عند $+\infty$، نكتب $\dfrac{1-it}{(1+it)^2}=\dfrac{1-3t^2}{(1+t^2)^2}+i\dfrac{t^3-3t}{(1+t^2)^2}$، ولمّا كان $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{t^3-3t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{dt}$ متباعدًا كان التكامل $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1-it}{(1+it)^2}\,\mathrm{dt}$ متباعدًا أيضًا.

4.1. التقارب بالإطلاق للتكاملات المعمّمة

تعريف 2. ليكن f تابعًا مضبوطًا على المجال غير التافه $[a,b[$ حيث a من $\mathbb{R}$ و b من $\overline{\mathbb{R}}$. نقول إنّ التكامل المعمّم $\int_a^{b}f(t)\,\mathrm{dt}$ **متقاربٌ بالإطلاق** إذا وفقط إذا كان التكامل المعمّم $\int_a^{b}|f(t)|\,\mathrm{dt}$ متقاربًا.

مبرهنة 5. ليكن f تابعًا مضبوطًا على المجال غير التافه $[a,b[$ حيث a من $\mathbb{R}$ و b من $\overline{\mathbb{R}}$. نفترض أنّ التكامل المعمّم $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ متقاربٌ بالإطلاق، عندئذٍ يتقارب التكامل المعمّم $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

الإثبات

أوّلًا: حالة $\mathbb{k}=\mathbb{R}$.

نعلم أنّ التابعين $f^+=\dfrac{|f|+f}{2}$ و $f^-=\dfrac{|f|-f}{2}$ مضبوطان موجبان ويحقّقان $f^+(t)\le|f(t)|$ ، و $f^-(t)\le|f(t)|$ ، وذلك أيًّا كان $t\in[a,b[$. ولمّا كان $\int_a^b|f(t)|\,\mathrm{d}t$ متقاربًا، كان كلّ من $\int_a^b f^+(t)\,\mathrm{d}t$ و $\int_a^b f^-(t)\,\mathrm{d}t$ متقاربًا، وعليه فإنّ التكامل المعمّم $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\big(f^+(t)-f^-(t)\big)\mathrm{d}t$ متقارب.

ثانيًا: حالة $\mathbb{k}=\mathbb{C}$.

نطبّق ما سبق على كلّ من $\operatorname{Re}f$ و $\operatorname{Im}f$ مع ملاحظة أنّ $|\operatorname{Re}f|\le|f|$ و $|\operatorname{Im}f|\le|f|$، فنجد المطلوب.

تكمن الأهميّة التطبيقيّة للمبرهنة السابقة في أنّها تعطي شرطًا كافيًا لتقارب تكاملٍ معمّمٍ عن طريق دراسة تكامل تابعٍ موجب، وهذا يتيح المقارنة مع التوابع المعياريّة، وهو ما سنراه في الأمثلة الآتية.

أمثلة

1. إنّ التكامل المعمّم $\displaystyle\int_1^\infty\frac{t\cos t}{2t^3+t\sin t+1}\,\mathrm{d}t$ متقارب بالإطلاق لأنّ

$$\begin{aligned}\forall t\in[1,\infty[,\left|\frac{t\cos t}{2t^3+t\sin t+1}\right|&\le\frac{t}{2t^3-t+1}\\&=\frac{t}{t^3+(t^3-t)+1}\le\frac{1}{t^2}\end{aligned}$$

مع علمنا أنّ $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{dt}}{t^2}$ متقاربٌ.

2. التكامل المعمّم $\int_1^{\infty} t\left(t^2 \sin t - \cos\frac{1}{t}\right)e^{-t^2}\,\mathrm{dt}$ متقاربٌ بالإطلاق. لإثبات ذلك نضع $g(t) = e^{-t/2}$, $f(t) = \left|t\left(t^2 \sin t - \cos\frac{1}{t}\right)e^{-t^2}\right|$.

من المتراجحة $f(t) \le t(t^2+1)\cdot e^{-t} = \left(t(t^2+1)\cdot e^{-t/2}\right)\cdot e^{-t/2}$

المحقّقة على $]1,\infty[$، نجد أنّ $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$ ، ولمّا كان $\int_1^{\infty} g(t)\,\mathrm{dt}$ متقاربا، كان $\int_1^{\infty} t\left(t^2 \sin t - \cos\frac{1}{t}\right)e^{-t^2}\,\mathrm{dt}$ متقاربًا بالإطلاق.

3. التكامل المعمّم $\int_0^{\infty} \frac{1+it}{t^3+1}\,\mathrm{dt}$ المعتلّ عند $+\infty$ متقارب لأنّه متقاربٌ بالإطلاق، إذ إنّ التكامل المعمّم $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{1+t^2}}{t^3+1}\,\mathrm{dt}$ متقاربٌ.

في كلّ من النتائج السابقة، من الضروري التوثّق من أنّ كلًا من التابعين يحافظ على إشارة واحدة بجوار b. سوف نرى لاحقًا مثالًا عن تابعين f و g ويحقّقان $f(t) = A(t)g(t)$ مع $\lim_{t\to b} A(t) = 1$ ، ومع ذلك فإنّ التكاملين $\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ و $\int_a^b g(t)\,\mathrm{dt}$ من طبيعتين مختلفتين.

ملاحظة 5. إنّ عكس المبرهنة السابقة خاطئ، إذ يوجد تكاملات معمّمة متقاربة وغير متقاربة بالإطلاق نقول إنّها نصف متقاربة، وهذا ما يبيّنه المثال الآتي.

مثال: ليكن α عددًا حقيقيًا من المجال $]0,1]$. إنّ التكامل $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin t}{t^{\alpha}}\mathrm{dt}$ المعتلّ عند $+\infty$ نصف متقارب. لدراسة تقارب هذا التكامل نضع $F(x)=\displaystyle\int_{\pi}^{x}\frac{\sin t}{t^{\alpha}}\mathrm{dt}$ ، و $G(x)=\displaystyle\int_{\pi}^{x}\frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\mathrm{dt}$. بإجراء مكاملة بالتجزئة نجد أنّ

$$F(x)=\frac{-1}{\pi^{\alpha}}-\frac{\cos x}{x^{\alpha}}-\alpha\cdot G(x)$$

إنّ التكامل المعمّم $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty}\frac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\mathrm{dt}$ متقاربٌ بالإطلاق، وذلك لأنّ $\forall t\in[\pi,\infty[,\left|\dfrac{\cos t}{t^{\alpha+1}}\right|\le\dfrac{1}{t^{\alpha+1}}$ ، و $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty}\frac{\mathrm{dt}}{t^{\alpha+1}}$ متقارب، إذن يقبل التابع G نهايةً عدديّةً عند $+\infty$ ، وعليه فإنّ F يقبل نهايةً عدديّةً عند $+\infty$ ، ومن ثَمّ يتقارب التكامل $\displaystyle\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin t}{t^{\alpha}}\mathrm{dt}$.

لإثبات تباعد التكامل بالإطلاق ندرس التابع $H(x)=\int_{\pi}^{x}\left|\sin t\right|/\,t^{\alpha}\,\mathrm{dt}$. ليكن k عددًا طبيعيًّا غير معدوم، من المتراجحة $\forall t\in[k\pi,(k+1)\pi],\dfrac{\left|\sin t\right|}{t^{\alpha}}\ge\dfrac{\left|\sin t\right|}{(k+1)^{\alpha}}$ ، نجد $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\left|\sin t\right|}{t^{\alpha}}\mathrm{dt}\ge\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\left|\sin t\right|}{(k+1)^{\alpha}}\mathrm{dt}$. من جهةٍ أخرى، التابع $t\mapsto\left|\sin t\right|$ يقبل العدد π دورًا له، ومنه $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\sin t\right|\mathrm{dt}=\int_{0}^{\pi}\sin t\,\mathrm{dt}=2$. ليكن الآن $n\ge 2$ عددًا طبيعيًّا، لدينا

$$\begin{aligned} H(n\pi) &= \int_{\pi}^{n\pi} \frac{\left|\sin t\right|}{t^{\alpha}}\,\mathrm{dt} = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\left|\sin t\right|}{t^{\alpha}}\,\mathrm{dt} \\ &\geq \sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\left|\sin t\right|}{(k+1)^{\alpha}}\,\mathrm{dt} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{(k+1)^{\alpha}} \end{aligned}$$

ولكنّ المجموع الأخير يسعى إلى $+\infty$ عندما يسعى n إلى $+\infty$ لأنّ $\alpha \leq 1$، إذن لا يقبل التابع H نهايةً عدديّةً عند $+\infty$، ومن ثمّ يتباعد التكامل $\int_{\pi}^{\infty}\left|\sin t\right| / t^{\alpha}\,\mathrm{dt}$، وهذا يعني أنّ التكامل المعمّم $\int_{\pi}^{\infty}\frac{\sin t}{t^{\alpha}}\,\mathrm{dt}$ غير متقارب بالإطلاق.

5.1. استخدام النشر المحدود في دراسة التكاملات المعمّمة

سنرى في الأمثلة الآتية أنّ النشر المحدود أداةٌ فعّالة في دراسة التكاملات المعمّمة. لنذكّر إذن أنّه إذا كان I مجالًا غير تافه من $\mathbb{R}$ و $a \in I$، و f تابعًا من الصف C^{n+1} على I فإنّ:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{O}_a(x-a)^{n+1}$$

مثالان

1. ليكن التابع $f(t) = \dfrac{e^t - \cos t}{t^2}$ المعرّف على $]0,1]$. لدينا $e^t - \cos t = (1+t) - 1 + \mathrm{O}(t^2)$، ومنه $f(t) = \dfrac{1}{t} + \mathrm{O}(1)$ بجوار الصفر.

ولكن $\int_0^1 \frac{\mathrm{dt}}{t}$ متباعد و $\int_0^1 1\cdot\mathrm{dt}$ متقارب، إذن $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{dt}$ متباعد.

2. ليكن التابع $f(t) = \dfrac{\ln(t+1) - \ln t}{\sqrt{t}}$ المعرّف على المجال $]0,\infty[$. إنّ التكامل $\int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{dt}$ معتلّ عند 0 وعند $+\infty$. التابع $f(t)$ مهملٌ أمام $g(t) = \dfrac{1}{t^{3/4}}$ بجوار 0، ولمّا كان $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{dt}$ متقاربًا، فالتكامل $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{dt}$ متقارب أيضًا. أمّا

في جوار $+\infty$ فإنّ التابع $f(t)$ يُكتب بالشكل $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}\ln\left(1+\dfrac{1}{t}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{t}}\left(\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t}\right)\right)=\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{t^{3/2}}\right)$ ، ولمّا كان التكامل المعمّم $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{t^{3/2}}\,\mathrm{dt}$ متقاربًا فالتكامل $\displaystyle\int_1^\infty f(t)\,\mathrm{dt}$ متقارب. وعليه فإنّ التكامل المعمّم $\displaystyle\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{dt}$ متقاربٌ.

6.1. تِقْنيات حساب التكاملات المعمّمة

سنشرح في هذه الفقرة كيفيّة الاستفادة من طرائق المكاملة في حساب قيمة تكامل معمّم بعد التوثّق من تقاربه.

1. المكاملة بالتجزئة: لدراسة وحساب تكاملٍ $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ معتلٍّ عند b مثلًا، يمكننا الاستفادة من تطبيق المكاملة بالتجزئة على التكامل المحدود $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}$ حيث $x\in[a,b[$. أمّا في حال كان التكامل معتلًّا عند a و b فإنّنا نعالج التكامل المحدود $\displaystyle\int_x^y f(t)\,\mathrm{dt}$ حيث $a<x\le y<b$.

مثال: لدراسة التكامل المعمّم $\displaystyle\int_0^1 (1-t)\ln(1-t)\,\mathrm{dt}$ المعتلّ عند 1، نضع $F(x)=\displaystyle\int_0^x (1-t)\ln(1-t)\,\mathrm{dt}$. لدينا

$$\begin{aligned}
F(x) &= -\frac{1}{2}(1-t)^2\ln(1-t)\Big]_0^x - \int_0^x \frac{1}{2}(1-t)\,\mathrm{dt}\\
&= -\frac{1}{2}(1-x)^2\ln(1-x)+\frac{x^2}{4}-\frac{x}{2}
\end{aligned}$$

ومنه $\displaystyle\lim_{x\to1}F(x)=-\frac{1}{4}$ ، ومن ثَمّ، فإنّ التكامل المعمّم متقارب و

$$\int_0^1 (1-t)\ln(1-t)\,\mathrm{dt}=-\frac{1}{4}\ .$$

2. **المكاملة بتغيير المتحوّل:** يمكننا أيضًا الاستفادة من هذه الطريقة ولكن بشروط.

مبرهنة 6. ليكن $]a,b[$ مجالاً غير تافه من $\mathbb{R}$، و $\varphi:]a,b[\to \mathbb{R}$ تابعًا متزايدًا تمامًا من الصفّ $\mathcal{C}^1$. نضع $\alpha = \lim\limits_{t\to a}\varphi(t), \beta = \lim\limits_{t\to b}\varphi(t)$، وليكن f تابعًا مستمرًّا على $]\alpha,\beta[$. عندئذٍ يكون التكاملان المعمّمان $\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{dt}$ و $\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{dt}$ من طبيعةٍ واحدة، ومتساويين في حالة التقارب.

الإثبات

ليكن $c \in]a,b[$، و $x \in]c,b[$. نعلم أنّ

$$\int_c^x f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{dt} = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(x)} f(s)\mathrm{ds}$$

فإذا كان التكامل المعمّم $\int_{\varphi(c)}^{\beta} f(s)\mathrm{ds}$ متقاربًا، كان للتابع $y \mapsto \int_{\varphi(c)}^{y} f(s)\mathrm{ds}$ نهايةٌ عدديّةٌ عند β، وكان للتابع

$$x \to \int_{\varphi(c)}^{\varphi(x)} f(s)\mathrm{ds} = \int_c^x f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{dt}$$

نهايةٌ عدديّةٌ عند b، ومنه نستنتج أنّ $\int_c^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{dt}$ متقارب. وبالعكس إذا كان التكامل المعمّم $\int_c^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{dt}$ متقاربًا، كان للتابع

$$x \mapsto \int_c^x f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{dt} = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(x)} f(s)\mathrm{ds}$$

نهايةٌ عدديّةٌ l_1 عند b. ليكن $\varepsilon > 0$، يوجد $c_1 \in]c,b[$ بحيث

$$c_1 < x < b \Rightarrow \left|\int_{\varphi(c)}^{\varphi(x)} f(s)\mathrm{ds} - l_1\right| < \varepsilon$$ ، فإذا كان

$\varphi(c_1) < y = \varphi(x) < \beta$، كان $c_1 < x < b$، وكان $\left|\int_{\varphi(c)}^{y} f(s)\mathrm{ds} - l_1\right| < \varepsilon$،

وعليه فإنّ التابع $y \mapsto \int_{\varphi(c)}^{y} f(s)\mathrm{ds}$ يقبل l_1 نهايةً له عند β، ومنه نستنتج أنّ

$\int_{\varphi(c)}^{\beta} f(s)\mathrm{ds}$ متقارب ولدينا $\int_{\varphi(c)}^{\beta} f(s)\mathrm{ds} = \int_{c}^{b} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{dt}$. وبالمثل نثبت أنّ التكاملين $\int_{a}^{c} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{dt}$ و $\int_{\alpha}^{\varphi(c)} f(s)\mathrm{ds}$ من طبيعةٍ واحدة وأنّهما متساويان في حالة التقارب. وعليه فالتكاملان المعمّمان $\int_{a}^{b} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{dt}$ و $\int_{\alpha}^{\beta} f(s)\mathrm{ds}$ من طبيعةً واحدة وهما متساويان في حالة التقارب.

ملاحظة 6. تبقى المبرهنة صحيحة في حالة φ تقابل متناقص تمامًا على $]a,b[$ ويأخذ قيمه في $]\beta,\alpha[$ ، ويكون $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,\mathrm{dt} = \int_{a}^{b} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{dt}$ في حالة التقارب.

مثال: لدراسة التكامل المعمّم $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{\sqrt{t}}\mathrm{dt}$ المعتلّ عند 0 وعند 1، نجري تغيير المتحوّل $\varphi:]0,1[\to]0,1[, t\mapsto \sqrt{t}$ حيث φ تابع متزايد تماما ومن الصفّ $\mathcal{C}^1$، وحسب المبرهنة السابقة تكون طبيعة التكامل $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{\sqrt{t}}\mathrm{dt}$ من طبيعة التكامل $\int_0^1 2\ln(1-s^2)\,\mathrm{d}\,s$ ويساويه في القيمة في حالة التقارب. وبإجراء مكاملة بالتجزئة نجد أنّ التابع $s\mapsto 2\ln(1-s^2)$ يقبل التابع

$$s\mapsto F(s) = 2(s+1)\ln(s+1) + 2(s-1)\ln(1-s) - 4s$$

تابعًا أصليًّا له، وعليه فإنّ التكامل $\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{\sqrt{t}}\mathrm{dt}$ متقارب لأنّ للتابع F نهايةً عدديّةً عند الواحد ويكون

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{\sqrt{t}}\mathrm{dt} = 4(\ln 2 - 1)$$

7.1. التكاملات المعمّمة والمتسلسلات

مبرهنة 7. ليكن f تابعًا موجبًا ومتناقصًا على المجال $[0,\infty[$. إنّ التكامل المعمّم $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{dt}$ والمتسلسلة $\left(\sum f(n)\right)$ من طبيعةٍ واحدةٍ.

الإثبات

أيًا كان $x \in [0,\infty[$ نضع $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{dt}$. ليكن $k \in \mathbb{N}$، لمّا كان f متناقصًا، كان $f(k+1) \le f(t) \le f(k)$ وذلك عندما $t \in [k,k+1]$، ومنه $f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{dt} \le f(k)$. ليكن $n \in \mathbb{N}^*$، نضع $S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k)$، عندئذٍ يتحقّق:

$$\int_0^n f(t)\,\mathrm{dt} = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{dt}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \le \int_0^n f(t)\,\mathrm{dt} \le \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

$$S_n - f(0) \le \int_0^n f(t)\,\mathrm{dt} \le S_n - f(n)$$

إنّ كلًّا من التابع $F(x)$ والمتتالية (S_n) متزايد. فإذا تقاربت المتسلسلة، تقاربت متتالية مجاميعها الجزئيّة (S_n) ومن ثمّ كانت محدودةً، وعليه فإنّ المتتالية $(F(n))$ محدودة، ومنه $F(x)$ محدودٌ، ومن ثَمّ فإنّ التكامل $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{dt}$ متقاربٌ. من جهةٍ أخرى، إذا تقارب التكامل $\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{dt}$، كان التابع $F(x)$ محدودًا، ومنه فالمتتالية (S_n) محدودة، ومن ثمّ تتقارب المتسلسلة $\left(\sum f(n)\right)$، وهو المطلوب إثباته. ■

8.1. تطبيق: متسلسلات ريمان ومتسلسلات بيرتران

ليكن $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$، عندئذٍ

1. تتقارب متسلسلة ريمان $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\geq 1}$ إذا وفقط إذا كان $\alpha>1$.
2. تتقارب متسلسلة بيرتران $\left(\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}\right)_{n\geq 2}$ إذا وفقط إذا كان $\alpha>1$ أو $(\alpha=1\wedge\beta>1)$.

الإثبات

1. نطبّق المبرهنة السابقة مع $f(t)=\frac{1}{t^\alpha}$، فيكون شرط تقارب المتسلسلة $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ هو ذاته شرط تقارب التكامل المعمّم $\int_1^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. نطبّق المبرهنة السابقة مع $f(t)=\frac{1}{t^\alpha \ln^\beta t}$، فيكون شرط تقارب المتسلسلة $\sum\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ هو ذاته شرط تقارب التكامل المعمّم $\int_2^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$. ■

مثالان معاكسان

1. مثال عن تابعين متكافئين بجوار نقطة الاعتلال وتكاملاهما من طبيعتين مختلفتين

ليكن $f(t)=\frac{\sin t}{\sqrt{t}}, g(t)=\frac{\sin t}{\sqrt{t}}+\frac{\sin^2 t}{t}$ تابعين معرّفين على المجال $[\pi,\infty[$.

نلاحظ أوّلًا أنّ التابعين السابقين متكافئان عند $+\infty$، وأنّ التكامل $\int_\pi^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ المعتلّ عند $+\infty$ متقارب. من جهةٍ أخرى بملاحظة أنّ $g(t)=\frac{\sin t}{\sqrt{t}}+\frac{1}{2t}-\frac{\cos 2t}{2t}$، وأنّ $\int_\pi^\infty\frac{\mathrm{d}t}{2t}$ متباعدٌ، نجد أنّ $\int_\pi^\infty g(t)\,\mathrm{d}t$ متباعد.

2. مثال عن تابع من الصف C^{∞} على $[1,\infty[$ وتكامله متقارب ولكن ليس له نهاية عند $+\infty$

ليكن التابع $f(t)=\sin(t^2)$ المعرّف على $[1,\infty[$، نعلم أنّ التابع لا يقبل نهايةً عدديّةً عند $+\infty$. من جهةٍ، أخرى ليكن

$$F(x)=\int_1^x f(t)\,\mathrm{dt}=\int_1^{\sqrt{x}}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{dt}$$

نعلم من تقارب التكامل $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\sin t}{t^{1/2}}\,\mathrm{dt}$ أنّ للتابع F نهايةً عدديّة عند $+\infty$،

ومنه نستنتج تقارب التكامل $\displaystyle\int_1^{\infty} f(t)\,\mathrm{dt}$.

2. التوابع المعرّفة بواسطة تكاملات

1.2. مقدّمة

سندرس في هذه الفقرة توابع من النمط $F:J\to\mathbb{R},x\mapsto\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{dt}$ حيث f تابعٌ لمتحوّلين معرّف على $J\times I$، و I و J مجالان غير تافهين من $\mathbb{R}$. حيث نبيّن شروطًا كافيةً لضمان مرور بعض الخصائص التحليليّة، مثل النهايات والاستمرار و قابليّة الاشتقاق، عبر عمليّة المكاملة.

جديرٌ بالذكر أنّنا نحتاج إلى التعامل مع المشتقّ الجزئي للتابع f بالنسبة للمتحوّل x. سندرس المشتقّات الجزئيّة بالتفصيل في البحث المتعلّق بالتوابع لعدّة متحولات، إلاّ أنّنا نحتاج في هذه المرحلة إلى التعامل حسابيًّا مع هذه المشتقّات. في حالتنا، إذا كان I و J مجالين غير تافهين من $\mathbb{R}$، و $f:J\times I\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto f(x,y)$، و $(x_0,t_0)\in J\times I$، فإنّنا نقول إنّ f يقبل مشتقًّا جزئيًّا بالنسبة للمتحوّل x عند العنصر (x_0,t_0) إذا وفقط إذا قبِلَ التابع

$$\Delta:J\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R},x\mapsto\frac{f(x,t_0)-f(x_0,t_0)}{x-x_0}$$

نهايةً عدديّةً عند x_0 وفي هذه الحالة نكتب $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t_0)=\lim_{x \underset{\neq}{\to} x_0}\Delta(x)$. أي إنّنا، عمليًّا، نثبّت t ونشتقّ عبارة $f(x,t)$ بالنسبة للمتحوّل x، علمًا أنّ قواعد حساب المشتقّات تبقى صحيحة في حالة المشتقات الجزئية.

فيما يأتي سنرمز بالرمز $\overline{J}=J\cup\{\inf J,\sup J\}$ إلى مجموعة عناصر J إضافةً إلى طرفيه.

بالنظر إلى أهميّة مبرهنة لوبيغ الآتية، وتجاوز إثباتها مستوى هذا البحث، سنوردها دون إثبات.

مبرهنة 1. (لوبيغ Lebesgue) ليكن I مجالاً غير تافهٍ من $\mathbb{R}$، ولتكن (f_n) متتالية توابعَ مضبوطةٍ على I، ومتقاربة ببساطة من تابعٍ مضبوطٍ $\overline{f}\in\mathcal{R}(I)$. نفترض وجود تابعٍ $g\in\mathcal{R}(I)$ تكامله $\int_I g(t)\,\mathrm{dt}$ متقارب ويحقّق $|f_n(t)|\le g(t)$، وذلك أيًّا كان $n\in\mathbb{N}$ و $t\in I$.

عندئذٍ تتقارب التكاملات $\int_I \overline{f}(t)\,\mathrm{dt}$ و $\int_I f_n(t)\,\mathrm{dt}$ وتتقارب المتتالية العدديّة $\left(\int_I f_n(t)\,\mathrm{dt}\right)$ من $\int_I \overline{f}(t)\,\mathrm{dt}$ أي $\int_I \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{dt}=\lim_{n\to\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{dt}$.

مثال

لنتأمّل المتتالية (u_n) حيث $u_n=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{dt}}{(1+t^2)\cdot\sqrt[n]{1+t^n}}$. نضع

$f_n(t)=\frac{1}{(1+t^2)\cdot\sqrt[n]{1+t^n}}$، $I=]0,+\infty[$. لدينا:

1. أيًّا كان العدد الطبيعي n، فإنّ التابع f_n مضبوط على I.
2. المتتالية (f_n) متقاربة ببساطةٍ من التابع $\overline{f}:I\to\mathbb{R}$ حيث

$$\overline{f}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+t^2}, & t\in]0,1]\\[2mm] \dfrac{1}{t(1+t^2)} & t\in]1,\infty[\end{cases}$$

وهو تابعٌ مضبوط على I.

3. أيًّا كان $(n,t)\in\mathbb{N}\times I$، كان $\left|f_n(t)\right|\leq \dfrac{1}{1+t^2}=g(t)$. التابع g تابعٌ مضبوطٌ على I وتكامله $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{dt}}{1+t^2}$ متقارب.

وحسب مبرهنة لوبيغ نجد أنّ المتتالية (u_n) متقاربة من

$$L=\int_0^{\infty}\overline{f}(t)\,\mathrm{dt}=\int_0^1\frac{\mathrm{dt}}{1+t^2}+\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{dt}}{t(1+t^2)}$$
$$=\left[\arctan t\right]_0^1+\left[\ln t-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_1^{\infty}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

مبرهنة 2. (مبادلة النهاية والتكامل) ليكن I و J مجالين غير تافهين من $\mathbb{R}$، وليكن التابع $\overline{f}:I\to\mathbb{k}$ من الصف $\mathcal{R}(I)$، والتابع

$$f:J\times I\to\mathbb{k},(x,t)\mapsto f(x,t)$$

وليكن $\overline{x}\in\overline{J}$. نفترض تحقّق الشروط الآتية

1. أيًّا كان $x\in J$، فإنّ التابع $t\mapsto f(x,t)$ من الصف $\mathcal{R}(I)$.
2. أيًّا كان $t\in I$، فإنّ التابع $x\mapsto f(x,t)$ يقبل $\overline{f}(t)$ نهايةً له عند أي $\overline{x}$. $\lim\limits_{x\to\overline{x}}f(x,t)=\overline{f}(t)$.
3. يوجد تابع $g\in\mathcal{R}(I)$ تكامله $\int_I g(t)\,\mathrm{dt}$ متقارب بحيث

$$\forall(x,t)\in J\times I,\left|f(x,t)\right|\leq g(t)$$

عندئذٍ تتقارب جميع التكاملات $\int_I\overline{f}(t)\,\mathrm{dt},\int_I f(x,t)\,\mathrm{dt}$ ويكون

$$\lim_{x\to\overline{x}}\int_I f(x,t)\,\mathrm{dt}=\int_I\overline{f}(t)\,\mathrm{dt}$$

أو بشكل مكافئ

$$\lim_{x\to\overline{x}}\int_I f(x,t)\,\mathrm{dt}=\int_I\lim_{x\to\overline{x}}f(x,t)\,\mathrm{dt}$$

الإثبات

إنّ تقارب التكاملات $\int_I f(x,t)\,\mathrm{dt}$ ينتج مباشرةً من الشرط

$$\forall(x,t)\in J\times I, \left|f(x,t)\right|\le g(t)$$

لتكن (x_n) متتالية من عناصر J تحقّق $\lim_{n\to\infty} x_n=\overline{x}$. أيًّا كان العدد الطبيعي n نعرّف التابع $f_n:I\to\mathbb{k}, t\mapsto f(x_n,t)$.

1. من الواضح أنّه أيًّا كان $n\in\mathbb{N}$ فإنّ f_n تابعٌ مضبوط.
2. وكذلك فإنّه أيًّا كان $t\in I$ ، فإنّ $\lim_{n\to\infty} f_n(t)=\overline{f}(t)$ أي إنّ (f_n) متقاربة ببساطة من $\overline{f}$.
3. من جهةٍ أخرى، لدينا $\forall(n,t)\in\mathbb{N}\times I, \left|f_n(t)\right|=\left|f(x_n,t)\right|\le g(t)$.

فحسب مبرهنة لوبيغ تتقارب التكاملات $\int_I \overline{f}(t)\,\mathrm{dt}$ و $\int_I f_n(t)\,\mathrm{dt}$ وتتقارب المتتالية العدديّة $\left(\int_I f(x_n,t)\,\mathrm{dt}\right)$ من $\int_I \overline{f}(t)\,\mathrm{dt}$.

نستنتج إذن أنّ $\lim_{x\to\overline{x}}\int_I f(x,t)\,\mathrm{dt}=\int_I \overline{f}(t)\,\mathrm{dt}$ ، وهو المطلوب إثباته. ■

مثال

إنّ التابع $F(x)=\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\ln t\cdot\sin(xt)}{x+t^2}\,\mathrm{dt}$ معرّف على المجال $[1,+\infty[$. لندرس النهاية $\lim_{x\to\infty}F(x)$.

نضع $I=]1,\infty[$ ، $J=[1,\infty[$ ، لدينا $f(x,t)=\dfrac{\ln t\cdot\sin(xt)}{x+t^2}$

1. أيًّا كان $x\in J$ ، فإنّ التابع $t\mapsto\dfrac{\ln t\cdot\sin(xt)}{x+t^2}$ مستمرّ فهو من الصف $\mathcal{R}(I)$.
2. أيًّا كان $t\in I$ ، فإنّ التابع $x\mapsto f(x,t)$ يقبل $\overline{f}(t)=0$ نهايةً له عند $+\infty$.

3. لدينا $g(t) = \dfrac{\ln t}{1+t^2} \geq \left|f(x,t)\right|, \forall(x,t) \in J \times I$ ، والتابع g من الصف $\mathcal{R}(I)$ ، وتكامله على I $\int_1^{\infty} g(t)\,\mathrm{dt}$ متقارب.

فحسب مبرهنة مبادلة النهاية والتكامل يكون $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \int_1^{\infty} \overline{f}(t)\,\mathrm{dt} = 0$.

مبرهنة 3. (مبرهنة الاستمرار) ليكن I و J مجالين غير تافهين من $\mathbb{R}$ ، وليكن التابع $f : J \times I \to \Bbbk, (x,t) \mapsto f(x,t)$. نفترض تحقّق الشروط الآتية:

1. أيًّا كان $x \in J$ ، فإنّ التابع $t \mapsto f(x,t)$ من الصف $\mathcal{R}(I)$.
2. أيًّا كان $t \in I$ ، فإنّ التابع $x \mapsto f(x,t)$ مستمرّ على J .
3. يوجد تابع $g \in \mathcal{R}(I)$ تكامله $\int_I g(t)\,\mathrm{dt}$ متقارب بحيث تتحقّق المتراجحة:

$$\forall(x,t) \in J \times I, \left|f(x,t)\right| \leq g(t)$$

عندئذٍ تتقارب جميع التكاملات $\int_I f(x,t)\,\mathrm{dt}$ ويكون التابع $F(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{dt}$ مستمرًّا على J .

الإثبات

إنّ تقارب جميع التكاملات $\int_I f(x,t)\,\mathrm{dt}$ ينتج مباشرةً من الشرط

$$\forall(x,t) \in J \times I, \left|f(x,t)\right| \leq g(t)$$

ليكن $a \in J$ ، ولنعرّف التابع $\overline{f} : J \to \Bbbk, x \mapsto f(a,t)$. لدينا

1. أيًّا كان $x \in J$ ، فإنّ التابع $t \mapsto f(x,t)$ من الصف $\mathcal{R}(I)$.
2. أيًّا كان $t \in I$ ، فإنّ التابع $x \mapsto f(x,t)$ مستمرّ عند a فهو يقبل $\overline{f}(t) = f(a,t)$ نهايةً له عند a .
3. $\forall(x,t) \in J \times I, \left|f(x,t)\right| \leq g(t)$ ، و $g \in \mathcal{R}(I)$ وتكامله $\int_I g(t)\,\mathrm{dt}$ متقارب.

فحسب مبرهنة مبادلة النهاية والتكامل ينتج $F(a)= \int_I f(a,t)\,\mathrm{dt} = \lim_{x\to a} F(x)$ ، ومنه F مستمرّ عند a ، ولمّا كان a عنصرًا كيفيًّا من J ، فإنّ F مستمرّ على J . ■

مثال

لنتأمّل التابع $F(x)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+x^2+t^2)}{x^2+t^2}\,\mathrm{dt}$ المعرّف على المجال $]0,+\infty[$. لإثبات استمرار F على المجال $]0,+\infty[$ يكفي إثبات استمراره على كلّ مجال $[a,b]$ حيث $0<a<b$. نضع $I=]0,\infty[\,, J=[a,b]$ و $f(x,t)=\dfrac{\ln(1+x^2+t^2)}{x^2+t^2}$. لدينا

1. أيًّا كان $x\in J$ ، فإنّ التابع $t\mapsto f(x,t)$ مستمرّ فهو من الصف $\mathcal{R}(I)$.
2. أيًّا كان $t\in I$ ، فإنّ التابع $x\mapsto f(x,t)$ مستمرّ على J .
3. لدينا $\forall (x,t)\in J\times I, \left|f(x,t)\right| \le \dfrac{\ln(1+b^2+t^2)}{a^2+t^2} = g(t)$ كما أنّ $g\in\mathcal{R}(I)$ وتكامله $\int_I g(t)\,\mathrm{dt}$ متقارب (فهو معتلّ عند $+\infty$ و $\lim_{t\to\infty} t\sqrt{t}g(t)=0$).

نستنتج من ذلك أنّ F مستمرّ على $[a,b]$ عندما $0<a<b$ ، ومن ثَمّ، فإنّ F مستمرّ على المجال $]0,\infty[$.

مبرهنة 4. (مبرهنة الاشتقاق) ليكن I و J مجالين غير تافهين من $\mathbb{R}$ ، وليكن التابع $f : J\times I \to \mathbb{k}, (x,t)\mapsto f(x,t)$. نفترض تحقّق الشروط الآتية:

1. أيًّا كان $x\in J$ ، فإنّ التابع $t\mapsto f(x,t)$ من الصف $\mathcal{R}(I)$ ، والتكامل المعمّم $\int_I f(x,t)\,\mathrm{dt}$ متقارب.
2. أيًّا كان $t\in I$ ، فإنّ التابع $x\mapsto f(x,t)$ اشتقاقيّ على J .
3. أيًّا كان $x\in J$ ، فإنّ التابع $t\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ من الصف $\mathcal{R}(I)$.

4. يوجد تابع $g \in \mathcal{R}(I)$ تكامله $\int_I g(t)\,\mathrm{dt}$ متقارب بحيث

$$\forall (x,t) \in J \times I, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \le g(t)$$

عندئذٍ تتقارب التكاملات $\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{dt}$ ويكون التابع $F(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{dt}$ اشتقاقيًّا على J ويكون $\forall x \in J, F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{dt}$.

الإثبات

نضع $\alpha = \inf J, \beta = \sup J$.

إنّ تقارب جميع التكاملات $\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{dt}$ ينتج مباشرةً من الشرط

$$\forall (x,t) \in J \times I, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \le g(t)$$

ليكن $a \in J \setminus \{\beta\}$، سنثبت أنّ التابع F اشتقاقيّ من اليمين عند a، وذلك بإثبات أنّ التابع

$$H : \tilde{J} =]a, \beta[\to \Bbbk, x \mapsto \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \int_I \frac{f(x,t) - f(a,t)}{x - a}\,\mathrm{dt}$$

يقبل نهايةً عدديّةً عند a عندما تسعى x إلى a من اليمين. أيًّا كان $(x,t) \in \tilde{J} \times I$ نضع $h(x,t) = \frac{f(x,t) - f(a,t)}{x - a}$، و $\bar{h}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)$. لدينا:

1. أيًّا كان $x \in \tilde{J}$، فإنّ التابع $t \mapsto h(x,t)$ من الصف $\mathcal{R}(I)$.
2. أيًّا كان $t \in I$، فإنّ التابع $x \mapsto h(x,t)$ يقبل $\bar{h}(t)$ نهايةً له عند a .
3. يوجد تابع $g \in \mathcal{R}(I)$ تكامله $\int_I g(t)\,\mathrm{dt}$ متقارب بحيث

$$\forall (x,t) \in J \times I, \left|h(x,t)\right| \le g(t).$$

عندئذٍ، وحسب مبرهنة مبادلة النهاية والتكامل، نستنتج أنّ التابع H يقبل $\int_I \overline{h}(t)\,\mathrm{dt}$ نهايةً له عندما تسعى x إلى a، ومن ثَمّ يقبل التابع F الاشتقاق من اليمين عند a ومشتقّه من اليمين هو $F_r'(a) = \int_I \overline{h}(t)\,\mathrm{dt}$.

وبطريقةٍ مشابهة نثبت أنّه أيًّا كان $a \in J \setminus \{\alpha\}$، فإنّ F يقبل الاشتقاق من اليسار عند a ومشتقّه من اليسار هو $F_l'(a) = \int_I \overline{h}(t)\,\mathrm{dt}$. وبملاحظة أنّ المشتقّ من اليمين يساوي المشتق من اليسار عند كل نقطة a مختلفة عن α وعن β، نستنتج أنّ التابع F اشتقاقيّ عند كلّ $a \in J$، وتتحقّق المساواة $F'(a) = \int_I \overline{h}(t)\,\mathrm{dt} = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(a,t)\,\mathrm{dt}$.

مثال

لنتأمّل التابع $F(x) = \int_\pi^\infty \frac{\ln t \cdot \sin(xt)}{t^3}\,\mathrm{dt}$. نضع $I =]\pi, \infty[$, $J =]-\infty, \infty[$ و $f(x,t) = \frac{\ln t \cdot \sin(xt)}{t^3}$. لدينا

1. أيًّا كان $x \in J$، فإنّ التابع $t \mapsto f(x,t)$ مستمرّ فهو من الصف $\mathcal{R}(I)$، و التكامل المعمّم $\int_I f(x,t)\,\mathrm{dt}$ متقارب (لأنّ $\left|f(x,t)\right| \le \frac{\ln t}{t^3}$).

2. أيًّا كان $t \in I$، كان التابع $x \mapsto \frac{\ln t \cdot \sin(xt)}{t^3}$ اشتقاقيّ على J. وكان $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\ln t \cdot \cos(xt)}{t^2}$.

3. أيًّا كان $x \in J$، فإنّ التابع $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ مستمرّ على I فهو من الصف $\mathcal{R}(I)$.

4. لدينا $\forall (x,t) \in J \times I, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{\ln t}{t^2} = g(t)$. التابع g من الصف $\mathcal{R}(I)$ وتكامله $\int_I g(t)\,\mathrm{d}t$ متقارب.

فحسب مبرهنة الاشتقاق نستنتج أنّ F اشتقاقيّ على $\mathbb{R}$ ويحقّق

$$\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \int_\pi^\infty \frac{\ln t \cdot \cos(xt)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

2.2. تطبيق: دراسة التابع غاما لأولَر

لقد عرّف أولر التابع Γ في القرن الثامن عشر بهدف تعميم التابع "عاملي" $n \mapsto n!$ على الأعداد الحقيقيّة، وبعد ذلك دُرِس، لأهميّته الكبيرة، من قبل رياضيّاتيّين عديدين في القرنين التاسع عشر والعشرين.

فإضافةً إلى تعميمه للتابع "عاملي"، يظهر هذا التابع في كثير من المجالات منها الإحصاء ونظريّة الأعداد والحساب التكاملي والمتسلسلات المتقاربة.

مبرهنة 5. ليكن $x \in]0,\infty[$ ، عندئذٍ يكون التكامل $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ متقاربًا.

الإثبات:

لدينا $\lim_{t\to\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{e^{-t/2}} = 0$ ، ومنه $\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ متقارب.

إذا كان $0 < x \leq 1$ ، فإنّ $t^{x-1}e^{-t} \underset{0}{\sim} t^{x-1}$ ، ومنه $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ متقارب.

إذا كان $x \geq 1$ ، فإنّ للتابع $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ نهاية حقيقيّة عند الصفر لأنّ $t^{x-1}e^{-t} \underset{0}{\sim} t^{x-1}$ ، ومنه $\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ متقارب.

نستنتج إذن أنّ $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ متقارب. ■

تعريف 3. نسمّي التابع $\Gamma :]0,\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ تابع غامّا لأولر.

مبرهنة 6. إنّ التابع Γ من الصف $\amalg^{\infty}$ على $]0,\infty[$ ، ويتحقّق

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0,\infty[, \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} (\ln t)^n \cdot t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{dt}$$

الإثبات:

سنثبت بالتدريج الخاصّة $P_n \equiv$ (التكامل $\int_0^{\infty} (\ln t)^n \cdot t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{dt}$ متقارب، والتابع Γ يقبل الاشتقاق n مرّة و $\forall x \in]0,\infty[, \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{\infty} (\ln t)^n \cdot t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{dt}$)، وذلك أيًّا كان $n \in \mathbb{N}^*$.

لنثبت صحّة P_1:

نضع $I =]0,\infty[$ ، $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}, J = [a,b], 0 < a < b < \infty$. لدينا

- أيًّا كان x من J فإنّ $t \mapsto f(x,t)$ تابع مضبوط، والتكامل $\int_0^{\infty} f(x,t)\,\mathrm{dt}$ متقارب.
- أيًّا كان t من I فإنّ $x \mapsto f(x,t)$ تابع اشتقاقيّ، و $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \ln t \cdot t^{x-1}e^{-t}$.
- أيًّا كان x من J فإنّ $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ تابع مضبوط.
- إذا عرّفنا التابع g بالشكل

$$g(t) = \begin{cases} \left|\ln t\right| t^{a-1}, & t \in]0,1] \\ \left|\ln t\right| t^{b-1}e^{-t}, & t \in]1,\infty[\end{cases}$$

تحقّقت المتراجحة $\forall (x,t) \in J \times I, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g(t)$. وبملاحظة أنّ g تابع مضبوط على $]0,\infty[$ وأنّ $\int_0^{\infty} g(t)\,\mathrm{dt}$ متقارب، وبتطبيق مبرهنة اشتقاق التكاملات التابعة لوسيط نستنتج أنّ التابع Γ اشتقاقيّ على كلّ مجال $[a,b]$ حيث $0 < a < b < \infty$ ويكون

$\forall x \in [a,b], \Gamma'(x) = \int_0^\infty \ln t \cdot t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{dt}$. إذن Γ اشتقاقيّ على $]0,\infty[$ ولدينا

$$\forall x \in]0,\infty[, \Gamma'(x) = \int_0^\infty \ln t \cdot t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{dt}\ .$$

لنفترض الآن صحّة P_n حيث $1 \leq n$، ولنثبت صحّة P_{n+1} :

نضع $I =]0,\infty[, J = [a,b], 0 < a < b < \infty, h(x,t) = (\ln t)^n \cdot t^{x-1} e^{-t}$. لدينا

- أيّا كان x من J فإنّ $t \mapsto h(x,t)$ تابع مضبوط، والتكامل $\int_0^\infty h(x,t)\,\mathrm{dt}$ متقارب.
- أيّا كان t من I فإنّ $x \mapsto h(x,t)$ تابع اشتقاقيّ، و
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = (\ln t)^{n+1} \cdot t^{x-1} e^{-t}\ .$$
- أيّا كان x من J فإنّ $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ تابع مضبوط.
- إذا عرّفنا التابع k بالصيغة

$$k(t) = \begin{cases} \left|\ln t\right|^{n+1} t^{a-1}, & t \in]0,1] \\ \left|\ln t\right|^{n+1} t^{b-1} e^{-t}, & t \in]1,\infty[\end{cases}$$

تحقّقت المتراجحة $\forall (x,t) \in J \times I, \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq k(t)$. وبملاحظة أنّ k تابع مضبوط على $]0,\infty[$ وأنّ $\int_0^\infty k(t)\,\mathrm{dt}$ متقارب، نستنتج بمقتضى مبرهنة اشتقاق التكاملات التابعة لوسيط أنّ التابع $\Gamma^{(n)}$ اشتقاقيّ على كلّ مجال $[a,b]$ حيث $0 < a < b < \infty$ ويكون

$$\forall x \in [a,b], \Gamma^{(n+1)}(x) = \int_0^\infty (\ln t)^{n+1} \cdot t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{dt}$$

إذن $\Gamma^{(n)}$ اشتقاقيّ على $]0,\infty[$ ولدينا

$\forall x \in]0,\infty[, \Gamma^{(n+1)}(x) = \int_0^{\infty} (\ln t)^{n+1} \cdot t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{dt}$. أي إنّ P_{n+1}

صحيحة وهذا يُكمل إثبات المبرهنة. ■

مبرهنة 7. إنّ Γ هو التابع الوحيد المعرّف على المجال $]0,\infty[$ الذي يحقّق الخواص الثلاث الآتية

1. $\Gamma(1) = 1$.
2. $\forall x \in]0,\infty[, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. التابع $G = \ln\circ\, \Gamma$ محدّب.

الإثبات:

لنثبت أوّلًا أنّ Γ يحقّق الخواصّ الثلاث.

1. $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\,\mathrm{dt} = 1$.
2. ليكن $0 < x$، عندئذٍ

$$\begin{aligned}\int_0^T t^x e^{-t}\,\mathrm{dt} &= \Big[-t^x e^{-t}\Big]_0^T + x\int_0^T t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{dt}\\ &= -T^x e^{-T} + x\int_0^T t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{dt}\end{aligned}$$

وبجعل T تسعى إلى $+\infty$ نجد $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

بشكلٍ خاص نثبت بالتدريج بسهولة أنّ $\forall n \in \mathbb{N}, \Gamma(n+1) = n!$.

3. ليكن $0 < x$. لدينا

$$\begin{aligned}&\forall \lambda \in \mathbb{R},\\ &\quad 0 \le \int_0^{\infty} (\lambda + \ln t)^2 \cdot t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{dt}\\ &\quad = \left(\int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{dt}\right)\lambda^2 + 2\left(\int_0^{\infty} \ln t \cdot t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{dt}\right)\lambda\\ &\qquad + \int_0^{\infty} (\ln t)^2 \cdot t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{dt}\\ &\quad = \Gamma(x)\lambda^2 + 2\Gamma'(x)\lambda + \Gamma''(x)\end{aligned}$$

فالتابع الثلاثي الحدود الأخير موجب (مهما تكن قيمة المتحوّل الحقيقي λ) فمميّزه سالب؛ أي إنّ $\Gamma'(x)^2 - \Gamma(x)\Gamma''(x) \le 0$.

وبملاحظة أنّ التابع G يقبل الاشتقاق مرّتين وأنّ

$$\forall x > 0, G''(x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma''(x) - \Gamma'(x)^2}{\Gamma(x)^2} \ge 0$$

نستنتج أنّ G محدّب.

من جهةٍ ثانية، ليكن H تابعًا يحقّق الخواص الثلاث. سنثبت أنّ $H = \Gamma$.

من الخاصّة (.2) نجد أنّ $\forall x > 0, \frac{\Gamma(x+1)}{H(x+1)} = \frac{\Gamma(x)}{H(x)}$ ، وعليه فإنّه يكفي أن نثبت أنّ $\forall x \in]0,1], \frac{\Gamma(x)}{H(x)} = 1$.

ليكن $x \in]0,1]$ ، و $1 < n$. بملاحظة أنّ $n + x = x(n+1) + (1-x)n$ وأنّ $n = \frac{x}{1+x}(n-1) + \frac{1}{1+x}(n+x)$ ومن تحدّب التابع $x \mapsto \ln H$ ، نجد

$$\ln H(n+x) \le x \ln H(n+1) + (1-x)\ln H(n)$$
$$\ln H(n) \le \frac{x}{1+x}\ln H(n-1) + \frac{1}{1+x}\ln H(n+x)$$

ومنه

$$H(n+x) \le H(n+1)^x H(n)^{1-x}$$
$$H(n) \le H(n-1)^{\frac{x}{1+x}} H(n+x)^{\frac{1}{1+x}}$$

وبالاستفادة من المساواة $H(n+1) = n!$ نجد

$$H(n+x) \le ((n+1)!)^x (n!)^{1-x} = n!(n+1)^x$$
$$(n!)^{1+x} \le ((n-1)!)^x H(n+x)$$

ومن ثمّ

$$(n-1)!(n-1)^x \le H(n+x) \le n!(n+1)^x$$

وبالمثل نثبت أنّ

$$(n-1)!(n-1)^x \leq \Gamma(n+x) \leq n!(n+1)^x$$

ومنه

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^x \leq \frac{\Gamma(n+x)}{H(n+x)} = \frac{\Gamma(x)}{H(x)} \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^x$$

وأخيرًا بجعل n تسعى إلى $+\infty$ نجد أنّ $\dfrac{\Gamma(x)}{H(x)} = 1$ ، وهذا يُثبت الخاصّة المطلوبة. ■

ملاحظة 1. تفيد المبرهنة السابقة في إيجاد صيغٍ مختلفة للتابع Γ ، وكذلك حساب بعض القيم الخاصّة له. سنذكر بعضها من دون إعطاء الإثبات في المبرهنة الآتية.

مبرهنة 8. لدينا

1. $\forall x > 0, \Gamma(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

2. $\forall x > 0, \dfrac{1}{\Gamma(x)} = x \cdot e^{\gamma x} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1+\dfrac{x}{k}\right) e^{-x/k}$ حيث $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n\right)$ هو ثابت أولر.

3. $\forall x \in]0,1[, \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$.

نتيجتان

1. $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

2. $\forall n > 1, \Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^n}\sqrt{\pi}$.

تمرينات ومسائل

التمرين 1. ادرس طبيعة التكاملات المعممّة التالية:

$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{dt}$	2	$\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{dt}$	1
$\int_1^{\infty} \frac{e^{\sin t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{dt}$	4	$\alpha \in \mathbb{R},\ \int_1^{\infty} \frac{t^{\alpha}}{\sqrt{1+e^t}}\,\mathrm{dt}$	3
$\int_1^{\infty} e^{-\sqrt{\ln t}}\,\mathrm{dt}$	6	$\alpha \in \mathbb{R},\ \int_0^{1} \frac{t^{\alpha}-1}{\ln t}\,\mathrm{dt}$	5
$\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{dt}$	8	$\int_1^{\infty} \frac{E(t)-1}{t^3-1}\,\mathrm{dt}$	7
$\int_a^{b} \frac{1}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}\,\mathrm{dt},\ \ a<b$	10	$\int_0^{\infty} \frac{\arctan t}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{dt}$	9
$\int_0^{1} \frac{\tan t - t}{t^{5/2}\sin t}\,\mathrm{dt}$	12	$\int_1^{\infty} \frac{e^{-t}-\cos(1/t)}{t}\,\mathrm{dt}$	11
$\int_1^{\infty} \frac{\sqrt[3]{1+t}-\sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{dt}$	14	$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{\cos t+\sqrt{t}}\,\mathrm{dt}$	13
$\int_1^{\infty} \ln(\cos(1/t))\,\mathrm{dt}$	16	$\int_0^{1} \frac{\mathrm{dt}}{\ln t}$	15

التمرين 2. ليكن α عددًا حقيقيًّا موجبًا تمامًا و β عددًا حقيقيًّا. جِدِ الشرط اللازم والكافي على α و β لكي تتقارب التكاملات المعمّمة التالية:

$I_2 = \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{dt}}{t^{\beta}(1+t^{\alpha})}$	2	$I_1 = \int_0^{1} \frac{\mathrm{dt}}{t^{\beta}(1+t^{\alpha})}$	1

3	$I_3 = \int_0^1 \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}\,\mathrm{dt}$	4	$I_4 = \int_1^\infty \frac{(1+t)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta}\,\mathrm{dt}$

التمرين 3. عيّن الشرط اللازم والكافي على $\alpha \in \mathbb{R}$ حتّى يتقارب التكامل المعمّم

$$\int_0^\infty \frac{t^\alpha + t^{2-\alpha}}{\sqrt{t} + t^3}\,\mathrm{dt}.$$

التمرين 4. ليكن $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ تابعًا مستمرًّا. نفترض أنّ التكامل $\int_1^\infty f(t)\,\mathrm{dt}$ متقارب.

أثبت أنّ التكامل $\int_1^\infty \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{dt}$ متقارب.

التمرين 5. ليكن f تابعًا مستمرًّا على $\mathbb{R}_+$. نعرّف F على $\mathbb{R}_+^*$ بالعلاقة

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{dt}.$$

1. ليكن $0 \le x_0 \le x$، أثبت أنّ $xF(x) = x_0F(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{dt}$.
2. أثبت أنّه إذا كان للتابع f نهاية l عند $+\infty$، فإنّ للتابع F النهاية نفسها.
3. هات مثالًا لتابع f ليس له نهاية عند $+\infty$ ولكن F يقبل 0 نهاية له عند ∞.
4. أثبت أنّه إذا كان $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ فإنّ $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = +\infty$.

التمرين 6. أثبت تقارب التكاملات المعمّمة الآتية واحسبها.

1	$\int_0^1 \frac{\mathrm{dt}}{\sqrt{t - t^2}}$	2	$\int_0^\infty \frac{\mathrm{dt}}{1+t^3}$
3	$\int_{-\infty}^\infty (4t^3 - 6t^5)e^{-t^2}\,\mathrm{dt}$	4	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan t)}{\cos^2 t}\,\mathrm{dt}$
5	$\int_0^1 \arctan\left(1/t\right)\mathrm{dt}$	6	$\int_{-\infty}^\infty \sqrt{\lvert t\rvert}e^{-\lvert t\rvert}\,\mathrm{dt}$

$\int_0^{\pi/2}\ln(\sin t)\,\mathrm{dt}$	8	$\int_0^{\pi/2}\ln(\cos t)\,\mathrm{dt}$	7
$\int_0^{\infty}\frac{\arctan(\pi t)-\arctan t}{t}\,\mathrm{dt}$	10	$\int_0^{\infty}\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)^{-\pi}\mathrm{dt}$	9

التمرين 7. ليكن العدد الحقيقيّ λ.

1. أثبت تقارب التكامل المعمّم $I_\lambda=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{dt}}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}$.
2. أثبت أنّ $I_\lambda=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{t^\lambda}{(1+t^2)(1+t^\lambda)}\mathrm{dt}$.
3. احسب قيمة I_λ بدلالة $\lambda\in\mathbb{R}$.

التمرين 8. ليكن التابع $f:]0,1[\to\mathbb{R}:t\mapsto\dfrac{-\ln t}{\sqrt{t}(1-t)^{3/2}}$.

1. أثبت تقارب التكامل المعمّم $I=\displaystyle\int_0^{1}f(t)\,\mathrm{dt}$.
2. جد تابعًا أصليًّا للتابع f على المجال $]0,1[$، واستنتج قيمة I.

التمرين 9. ليكن $f(x)=\displaystyle\int_x^{\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{dt}$، و $g(x)=\displaystyle\int_x^{\infty}\sin(t^2)\,\mathrm{dt}$.

1. أثبت أنّ التابعين f و g معرّفان على $[0,\infty[$، واشتقاقيّان على $]0,\infty[$. احسب $f'(x)$ و $g'(x)$.
2. أثبت أنّ التكاملين المعمّمين $\displaystyle\int_0^{\infty}f(x)\,\mathrm{dx}$ و $\displaystyle\int_0^{\infty}g(x)\,\mathrm{dx}$ متقاربان واحسب قيمتيهما.

التمرين 10. عيّن طبيعة التكامل المعمّم $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t}\mathrm{dt}$، واستنتج طبيعة التكامل

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{\sin t+\sqrt{t}}\mathrm{dt}.$$

التمرين 11. ليكن a و b عددين حقيقيّين و $0 < a < b$.

1. أثبت تقارب التكامل المعمّم $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{dt}$.

2. ليكن x و y عددين حقيقيّين بحيث $0 < x < y$. أثبت أنّ

$$\int_x^y \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{dt} = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{dt} - \int_{ay}^{by} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{dt}.$$

3. ليكن z عددًا حقيقيًّا موجبًا تمامًا. أثبت أنّ

$$e^{-bz} \ln \frac{b}{a} \leq \int_{az}^{bz} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{dt} \leq e^{-az} \ln \frac{b}{a}$$

4. استنتج أنّ $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{dt} = \ln \frac{b}{a}$.

التمرين 12. 1. أثبت تقارب التكامل المعمّم $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{dt}$.

2. أثبت أنّ $\forall t \in]0,1[, \dfrac{t-1}{t} \leq \ln t \leq t-1$.

3. ليكن $x \in]0,1[$. تحقّق أنّ $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\ln t}\,\mathrm{dt} = \int_0^{x^2} \frac{\mathrm{dt}}{\ln t}$.

4. استنتج أنّ $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{dt} = \ln 2$.

التمرين 13. ليكن a عددًا حقيقيًّا موجبًا تمامًا.

1. أثبت تقارب التكامل المعمّم $\displaystyle I = \int_0^{\infty} \frac{\ln t}{t^2 + a^2}\,\mathrm{dt}$.

2. أيًّا كان $\varepsilon > 0$ و $x > 0$ نضع $I_{\varepsilon,x} = \displaystyle\int_\varepsilon^x \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,\mathrm{dt}$.

أثبت صحّة المساواة

$$I_{\varepsilon,x} = \frac{2\ln a}{a}\left(\arctan\frac{a}{\varepsilon} - \arctan\frac{a}{x}\right) + \int_{a^2/\varepsilon}^{a^2/x} \frac{\ln t}{a^2+t^2}\,\mathrm{dt}$$

3. جِدْ معادلةً بسيطةً يحقّقها I، واستنتج قيمته.

التمرين 14.

1. أثبت تقارب التكامل المعمّم $\displaystyle\int_0^\infty (\arctan(t+1) - \arctan t)\,\mathrm{dt}$.
2. احسب $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+1} \arctan t\,\mathrm{dt}$.
3. احسب $\displaystyle\int_0^1 \arctan t\,\mathrm{dt}$.
4. استنتج قيمة التكامل $\displaystyle\int_0^\infty (\arctan(t+1) - \arctan t)\,\mathrm{dt}$.

التمرين 15. ادرس تقارب التكامل المعمّم $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+t^4\sin^2 t}\,\mathrm{dt}$.

التمرين 16. يهدف هذا التمرين إلى حساب قيمة التكامل $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{dt} = I$. أيًّا كان $n \in \mathbb{N}$ نضع $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin t}\,\mathrm{dt}$ و

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,\mathrm{dt}.$$

1. ليكن $n \in \mathbb{N}$. أثبت أنّ كلًّا من I_n و J_n معرّف.
2. ليكن $n \in \mathbb{N}^*$. أثبت أنّ $I_n - I_{n-1} = 0$، واستنتج قيمة I_n.

3. ليكن φ تابعًا من الصفّ $\mathcal{C}^1$ على المجال $[0,\pi/2]$. أثبت أنّ
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\varphi(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{dt}=0 .$$

4. بيّن أنّ التابع $t\mapsto \frac{1}{t}-\frac{1}{\sin t}$ يقبل التمديد إلى تابعٍ من الصفّ $\mathcal{C}^1$ على المجال $[0,\pi/2]$.

5. أثبت أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}(J_n-I_n)=0$.

6. أثبت أنّ $\lim\limits_{n\to\infty}J_n=I$.

7. استنتج قيمة I .

التمرين 17.

1. بيّن تقارب التكامل $\int_0^{\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{dt}$.

2. أثبت أنّ $\forall x\in]0,\infty[,\ \int_x^{\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{dt}=\frac{e^{-x^2}}{2x}-\int_x^{\infty}\frac{e^{-t^2}}{2t^2}\mathrm{dt}$.

3. استنتج مكافئًا بسيطًا للتابع $x\mapsto\int_x^{\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{dt}$ عند $+\infty$.

التمرين 18. ادرس نهايات المتتاليات المعطاة بحدّها العام:

.1 $\displaystyle\int_0^{\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^{-n}\sin\frac{t}{n}\,\mathrm{dt}$	.2 $\displaystyle\int_0^{1}\frac{1+nt^2}{(1+t^2)^n}\mathrm{dt}$
.3 $\displaystyle\int_0^{\pi/4}(\tan t)^n\,\mathrm{dt}$	.4 $\displaystyle\int_0^{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^k\mathrm{dt}$ $k\in\mathbb{N},$
.5 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{dt}}{t^n+e^t}$	.6 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{t^n}{t^{n+2}+1}\mathrm{dt}$

.7 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin nt}{nt+t^2}\,\mathrm{dt}$	.8 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\ln(1+t/n)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{dt}$
.9 $\displaystyle\int_0^{\infty}\arctan(nt)e^{-t^n}\,\mathrm{dt}$	.10 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin^{n+2}t}{t^2}\,\mathrm{dt}$
.11 $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-t}\sin^n t\,\mathrm{dt}$	.12 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{dt}}{1+t+\cdots+t^n}$

التمرين 19. أثبت صحّة ما يأتي:

$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{t}{e^t-1}\,\mathrm{dt}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$	$\displaystyle\int_0^{1}\frac{\ln^2 t}{1+t^2}\,\mathrm{dt}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$
$\displaystyle\int_0^{1}\frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{dt}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$	$\displaystyle\int_0^{1}\frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{dt}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$

التمرين 20. عيّن مجموعة التعريف وادرس الاستمرار وقابليّة الاشتقاق لكلٍّ من التوابع المعطاة بالصيغ الآتية:

1. $F(x)=\displaystyle\int_0^{1}\frac{\sin xt}{t+t^2}\,\mathrm{dt}$.

2. $G(x)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1-\cos xt}{t^2}e^{-t}\,\mathrm{dt}$.

3. $H(x)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{x+t}\,\mathrm{dt}$.

التمرين 21. احسب التكامل $\displaystyle\int_0^{1}\arctan t\,\mathrm{dt}$ واستنتج مع التعليل قيمة المجموع

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}\,.$$

التمرين 22. احسب التكامل $\int_0^1 \frac{t}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{dt}$ واستنتج مع التعليل قيمة المجموع
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+3)}$.

التمرين 23. ليكن التابع $F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{dt}}{\sqrt[4]{t^2 + x^2 t}}$.

1. أثبت أنّ F معرّفٌ ومستمرّ على $\mathbb{R}$، وأنّه زوجيّ.
2. أثبت أنّ F اشتقاقيّ على $\mathbb{R}^*$.
3. أثبت وجود $0 < \alpha$ بحيث $\lim_{x\to 0^+} F'(x) = \alpha = -\lim_{x\to 0^-} F'(x)$.
   واستنتج أنّ F غير اشتقاقيّ عند 0.
4. نظّم جدولًا بتغيّرات التابع F وارسم خطّه البياني.

التمرين 24. ليكن التابع: $F(x) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{dt}}{t^x(1+t)}$

1. أثبت أنّ F معرّف على $]0,1[$.
2. أثبت أنّ الخط ابياني $\mathcal{C}_F$ للتابع F متناظر بالنسبة للمستقيم $x = \frac{1}{2}$.
3. جِدْ مكافئًا للتابع F عند 0^+ وعند 1^-.
4. أثبت أنّ $\forall x \in]0,1[, F(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1} + t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{dt}$.
5. عيّن الحدّ الأدنى للتابع F.

التمرين 25. ليكن التابع: $F(x) = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{dt}}{t^x + 1}$

1. أثبت أنّ F من الصفّ $\mathcal{C}^1$ على $]1,\infty[$.

2. أثبت أنّ $\forall x \in]1,\infty[, F'(x) = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{t^x \ln t}{(t^x+1)^2}\left(\frac{1}{t^2}-1\right)\mathrm{dt}$.

3. ادرس نهايتي F عند $+\infty$ وعند 1^+.

4. استنتج تغيّرات التابع F.

التمرين 26. نعرّف التابع $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بالصيغة:

$$F(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{dt}$$

1. أثبت أنّ F قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

2. احسب $F(0)$ والنهايتين $\lim\limits_{x\to-\infty}F$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}F$.

3. نعرّف التابع $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بالعلاقة $G(x)=F(x^2)$.

أثبت أنّ $\forall x\in\mathbb{R},\ G'(x)=-2e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{dt}$

4. استنتج أنّ $\forall x\in\mathbb{R},\ G(x)=\dfrac{\pi}{4}-\left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{dt}\right)^2$.

5. استنتج قيمة التكامل $I=\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{dt}$.

التمرين 27. ليكن $F(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}e^{-x^2n^2}$. ادرس النهاية $\lim\limits_{x\to0}(xF(x))$.

التمرين 28.

1. أثبت أنّ التكامل $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}\mathrm{dt}$ متقارب.

2. أيًا كانت $x\in\mathbb{R}_+$ نعرّف $F(x)=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 t}{t^2}e^{-xt}\,\mathrm{dt}$ أثبت أنّ

التابع F مستمرّ على $\mathbb{R}_+$.

3. أثبت أنّ $xF(x) \leq 1 \quad \forall x > 0,$ ، واستنتج $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

4. أثبت أنّ F يقبل الاشتقاق مرّتين على $\mathbb{R}_+^*$.

5. احسب $\lim_{x \to +\infty} F'(x)$.

6. جِدْ صيغة بسيطة للمشتق الثاني F'' ، واستنتج صيغة للتابع F .

7. استنتج قيمة التكامل I ثمّ قيمة التكامل $J = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \mathrm{dt}$.

التمرين 29. ليكن التابع $F(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+tx} \mathrm{dt}$

1. أثبت أنّ F من الصف $\mathcal{C}^\infty$ على $[0,+\infty[$.

2. احسب $F^{(n)}(0)$ عندما $n \in \mathbb{N}$.

3. عيّن قيم $x \in [0,\infty[$ التي تتقارب عندها المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

ماذا تلاحظ ؟

التمرين 30. ليكن التابع $f : \mathbb{R}\times]0,+\infty[: (x,t) \mapsto \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$. نضع

$F(x) = \int_0^\infty f\left(x,t\right) \mathrm{dt}$.

1. أثبت أنّ F فرديّ، ومن الصفّ $\mathcal{C}^1$ على $\mathbb{R}$ ، واحسب $F'(x)$ عندما $\left|x\right| \neq 1$.

2. احسب $F(0)$ ، وجِدْ صيغة بسيطة للتابع F .

التمرين 31. ليكن التابع $F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-xt} \mathrm{dt}$.

1. أثبت أنّ F معرّف على المجال $[0,\infty[$ ومستمرّ على $]0,\infty[$.

2. عيّن $\lim_{x \to \infty} F(x)$.

3. أثبت أنّ F يقبل الاشتقاق مرّتين على $]0,\infty[$.
4. أعطِ صيغةً بسيطةً للتابع $F'(x)$.
5. نقبل أنّ F مستمرّ عند الصفر. احسب قيمة التكامل المعمّم $I=\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{dt}$.

التمرين 32. ليكن التابع $F(x)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-t}}{\sqrt{x+t}}\mathrm{dt}$

1. أثبت تقارب التكامل المعمّم $\int_0^{\infty}e^{-t}\,/\,\sqrt{t}\,\mathrm{dt}$ ، واستنتج أنّ F معرّف، ومستمرّ على $\mathbb{R}_+$.
2. أثبت أنّ F اشتقاقيّ على $]0,+\infty[$.
3. أثبت صحّة العلاقة $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \ F'(x)=F(x)-1\,/\,\sqrt{x}$ ، واستنتج $\lim\limits_{x\to 0^+}F'(x)$.
4. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cdot F(x)$ واستنتج مكافئًا للتابع F في جوار $+\infty$.

التمرين 33. ليكن $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. نفترض أنّ التكامل $\int_0^{\infty}\left|f\left(t\right)\right|\mathrm{dt}$ متقارب.

1. أثبت تقارب التكامل $F(x)=\int_0^{\infty}\frac{f(t)}{x+\sqrt{t}}\mathrm{dt}$ وذلك أيًا كان $x\in\mathbb{R}_+$.
2. أثبت أنّ F مستمرّ على $\mathbb{R}_+$.
3. ليكن $a>0$. أثبت أنّ F يقبل الاشتقاق على $\left[a,+\infty\right[$. ماذا تستنتج؟
4. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot F(x)$ واستنتج مكافئًا للتابع F في جوار $+\infty$.

التمرين 34. أثبت أنّ التابع $F(x)=\int_0^{\infty} e^{-t^2}\operatorname{ch}(tx)\,\mathrm{dt}$ ، معرّفٌ على $\mathbb{R}$ ، وأعطِ صيغةً بسيطة له. (اعلم أنّ $\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{dt}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$)

التمرين 35. ليكن التابع $F(x)=\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}t^x\,\mathrm{dt}$.

1. عيّن مجموعة تعريف F .
2. أثبت أنّ F قابل للاشتقاق على المجال $]-1,\infty[$.
3. جِد صيغة بسيطةً للمشتق $F'(x)$ على $]-1,\infty[$.
4. أثبت أنّ المقدار $\frac{t-1}{\ln t}$ محدود على المجال $]0,1[$ ، واستنتج النهاية $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
5. جِد صيغة بسيطةً للتابع $F(x)$ على $]-1,\infty[$ ، واستنتج أنّ $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\mathrm{dt}=\ln 2$.

التمرين 36. ليكن التابع $F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\mathrm{dt}$ والتابع $G(x)=\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\mathrm{dt}$.

1. أثبت أنّ G معرّف واشتقاقيّ على $\mathbb{R}$.
2. استنتج أنّ $\forall x\in\mathbb{R}, 2G'(x)=-xF(x)$.
3. أثبت أنّ G' اشتقاقيّ على $\mathbb{R}$.
4. جِدْ صيغةً بسيطة للمقدار $G(x)-G''(x)-F(x)$.
5. استنتج ممّا سبق أنّ F اشتقاقيّ على $\mathbb{R}^*$.
6. أثبت أنّ $\forall x\in\mathbb{R}^*, xF'(x)=F(x)-2G(x)$.

7. جِدْ علاقة بسيطةً بين F و F'' على $\mathbb{R}^*$.

8. استنتج صيغةً بسيطةً للتابع F على $\mathbb{R}$.

التمرين 37. لنعرّف التابعين $f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ و $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ ،

والمتتالية $\left(I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ حيث $I_n = \int_0^\infty t^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. ادرس النهاية $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)$.

2. أثبت أنّ كلًّا من التابعين f و g اشتقاقيّ على $\mathbb{R}$.

3. أثبت أنّ $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 + g(x) = \pi / 4$ ، واستنتج قيمة التكامل $I_0 = \int_0^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

4. أثبت أنّ $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$ ، واستنتج عبارة I_n بدلالة n.

التمرين 38. أيًّا يكن $x \in]0,1[$ ، نضع $F(x) = \int_1^\infty \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. أثبت أنّ التابع F اشتقاقيّ على المجال $]0,1[$ ، وجدْ صيغةً بسيطةً للمشتقّ $F'(x)$.

2. ادرس نهاية التابع F عند 0^+ .

3. استنتج أنّ $\forall x \in]0,1[, F(x) = -\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

4. ادرس نهاية التابع F عند 1^- .

التمرين 39. ليكن التابع $F(x) = \int_0^{\pi/2} \sin^x t\,\mathrm{d}t$ والتابع $G(x) = (x+1)F(x)F(x+1)$.

1. أثبت أنّ F معرّف ومستمرّ ومتناقص على المجال $]-1,\infty[$.

2. أثبت أنّ $\forall x \in]-1,\infty[, (x+2)F(x+1) = (x+1)F(x)$.

3. جِدْ مكافئًا للتابع F عند -1^+ .

4. أثبت أنّ G يقبل 1 دورًا له.

5. استنتج أنّ G ثابت على المجال $]-1,\infty[$.

التمرين 40. ليكن b, a عددين حقيقيّين بحيث $0 < a < b$. نعرّف متتالية التوابع $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بالعلاقة

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) = ae^{-nax} - be^{-nbx}$$

عيّن كلًّا من $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^{\infty}\left|f_n(x)\right|\mathrm{dx}\right)$ و $\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{dx}$ ، و

$\int_0^{\infty}(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x))\,\mathrm{dx}$. ماذا تلاحظ؟

التمرين 41. ليكن $E = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) : \int_0^{\infty}\left|f\left(t\right)\right|\mathrm{dt} < +\infty\}$.

1. بيّن أنّ E فضاء شعاعي.

2. أيًّا كان $f \in E$ وأيًّا كان $x \in \mathbb{R}_+^*$ أثبت أنّ التكامل $\int_0^{\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{dt}$ متقارب.

3. نعرّف التابع $L_f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ كما يلي:

$L_f(x) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{dt}$. أثبت أنّ $L_f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}_+^*)$.

4. أيًّا كان $f \in E$ وأيًّا كانت $x \in \mathbb{R}_+^*$ نضع $F(x) = \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{dt}$.

أثبت أنّ التكامل $\int_0^{\infty} xF(t)e^{-xt}\,\mathrm{dt}$ متقارب ويساوي $L_f(x)$

احسب كلًّا من $\lim_{x\to+\infty} L_f(x)$ و $\lim_{x\to+0} L_f(x)$.

الفصل الرابع: الفضاءات الشعاعيّة المنظّمة

في هذا الفصل يرمز $\mathbb{k}$ إلى أحد الحقلين: حقل الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$ أو حقل الأعداد العقديّة $\mathbb{C}$ ويشير الرمز $\left|\cdot\right|$ إلى القيمة المطلقة المعرّفة على $\mathbb{k}$.

1. تعريفات ومفاهيم أساسيّة

تعريف 1. ليكن E فضاءً شعاعيًّا على $\mathbb{k}$. نسمّي **نظيمًا** على E كلّ تطبيق $\left\|\cdot\right\| : E \to \mathbb{R}_+$ يحقّق الخواص الثلاث الآتية:

1. **معرّف:** $\forall x \in E, \left\|x\right\| = 0 \Rightarrow x = 0_E$.
2. **متجانس:** $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}, \left\|\lambda \cdot x\right\| = \left|\lambda\right| \cdot \left\|x\right\|$.
3. يحقّق **متراجحة المثلّث:** $\forall (x,y) \in E^2, \left\|x+y\right\| \le \left\|x\right\| + \left\|y\right\|$.

ونسمّي كلّ فضاءٍ شعاعيّ E مزوّد بنظيم $\left\|\cdot\right\|$ **فضاءً شعاعيًّا منظمًا**، ونرمز إليه بالرمز $\left(E, \left\|\cdot\right\|\right)$.

أسمينا الخاصّة الثالثة متراجحة المثلث لارتباطها بخاصّة معروفة في المثلّث وهي أنّ طول أيّ ضلع من أضلاع المثلّث أصغر أو يساوي مجموع طولَيّ الضلعين الأُخريين.

نتائج: ليكن الفضاء الشعاعيّ المنظّم $\left(E, \left\|\cdot\right\|\right)$، لدينا:

1. $\left\|0_E\right\| = 0$، و $\forall x \in E, \left\|x\right\| = \left\|-x\right\|$.
2. $\forall (x,y) \in E^2, \left|\left\|x\right\| - \left\|y\right\|\right| \le \left\|x+y\right\|$.

الإثبات

1. نستخدم خاصّة التجانس من خواصّ النظيم، مع $\lambda = 0$ فنجد أنّ $\left\|0_E\right\| = 0$، ومع $\lambda = -1$ فنجد أنّ $\left\|x\right\| = \left\|-x\right\|$.
2. ليكن x و y عنصرين من E، من متراجحة المثلّث نجد أنّ

$$\left\|x\right\| \le \left\|x+y\right\| + \left\|-y\right\| = \left\|x+y\right\| + \left\|y\right\|$$

ومنه $\|x+y\| \geq \|x\|-\|y\|$. بشكل مماثل نثبت أنّ $\|x+y\| \geq \|y\|-\|x\|$، وبذلك تتحقّق المتراجحة المطلوبة $\|x+y\| \geq \left|\|x\|-\|y\|\right|$. ■

أمثلة

1. إنّ الثنائيّة $\left(\mathbb{k},|\cdot|\right)$ فضاءٌ شعاعيّ منظّم استنادًا لما نعرفه عن خواص القيمة المطلقة على $\mathbb{k}$.

2. إنّ التطبيقات الثلاثة $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ المعرّفة على $\mathbb{k}^m$ على النحو الآتي: مهما يكن $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_m\right)$ من $\mathbb{k}^m$ يكُن

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m}\left|x_i\right|$$
$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left|x_i\right|^2}$$
$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m}\left|x_i\right|$$

تمثّل النظّم الأكثر شيوعًا على الفضاء الشعاعي $\mathbb{k}^m$. سوف نكتفي بإثبات أنّ $\|\cdot\|_2$ نظيم وذلك لأنّ الإثبات في حالة $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ بسيط للغاية.

ليكن $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_m\right), y=\left(y_1,y_2,\cdots,y_m\right)\in\mathbb{k}^m$ و $\lambda\in\mathbb{k}$.

لدينا

- إذا كان $\|x\|_2=0$ فإنّ $\sum_{i=1}^{m}\left|x_i\right|^2=0$، ومنه $\forall i\in\mathbb{N}_m, x_i=0$ ومن ثَمّ $x=0$.

- $\|\lambda\cdot x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left|\lambda\cdot x_i\right|^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left|\lambda\right|^2\cdot\left|x_i\right|^2}=|\lambda|\cdot\|x\|_2$

- إنّ المتراجحة $\|x+y\|_2\leq\|x\|_2+\|y\|_2$ تكافئ المتراجحة

$$\begin{aligned}\|x+y\|_2^2 &= \|x\|_2^2 + 2\operatorname{Re}\left(\sum_{i=1}^{m}\overline{x}_i \cdot y_i\right) + \|y\|_2^2 \\ &\le \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2 \cdot \|y\|_2 + \|y\|_2^2\end{aligned}$$

أو $\operatorname{Re}\left(\sum_{i=1}^{m}\overline{x}_i \cdot y_i\right) \le \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$ ، والمتراجحة الأخيرة نتيجةٌ واضحة

من متراجحة شوارتز $\left|\sum_{i=1}^{m}\overline{x}_i \cdot y_i\right| \le \|x\|_2 \cdot \|y\|_2$.

نستنتج إذن، أنّ التطبيق $\|\cdot\|_2$ نظيم على $\mathbb{k}^m$ ندعوه النظيم الإقليدي لارتباطه بالمسافة الإقليديّة بين عناصر $\mathbb{k}^m$.

3. ليكن E فضاءً شعاعيًّا بعده $m \in \mathbb{N}^*$ ، و $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \cdots, e_m)$ أساسًا فيه، نعرّف على E ثلاثة تطبيقات كما يأتي: ليكن $x = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot e_i$ عندئذٍ

$$\begin{aligned}\|x\|_1 &= \sum_{i=1}^{m}|x_i| \\ \|x\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{m}|x_i|^2} \\ \|x\|_\infty &= \max_{1\le i\le m}|x_i|\end{aligned}$$

إنّ التطبيقات الثلاثة $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ تعرّف نظمًا على E ، وهي مرتبطة بالأساس $\mathcal{E}$.

4. ليكن $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ ، و $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ فضاءين شعاعيّين منظّمين على $\mathbb{k}$ ، إنّ التطبيق $\|\cdot\|$ المعرّف على الفضاء الشعاعي $E \times F$ بالصيغة:

$$\forall (x,y) \in E \times F, \|(x,y)\| = \max\left(\|x\|_E, \|y\|_F\right)$$

يعرّف نظيمًا على $E \times F$.

5. بشكلٍ أعمّ، إذا كانت $(E_1,N_1),(E_2,N_2),\cdots,(E_m,N_m)$ فضاءات شعاعيّة منظّمة، وليكن $E=E_1\times E_2\times\cdots\times E_m$. نعرّف التطبيق $N:E\to\mathbb{R}_+$ على الوجه الآتي: أيًّا كان $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in E$ فإنّ $N(x)=\max\Big(N_1(x_1),N_2(x_2),\cdots,N_m(x_m)\Big)$. يُمكننا التحقّق بسهولة أنّ N نظيمٌ على E.

6. ليكن $E=\mathcal{C}([a,b])$ فضاء التوابع العدديّة المستمرّة على المجال غير التافه $[a,b]$. إنّ التطبيقات الثلاثة $\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2,\|\cdot\|_\infty$ المعرّفة على E كما يأتي:

$$\begin{aligned}\|f\|_1&=\int_a^b|f(t)|\,\mathrm{dt}\\ \|f\|_2&=\sqrt{\int_a^b|f(t)|^2\,\mathrm{dt}}\\ \|f\|_\infty&=\max_{t\in[a,b]}|f(t)|\end{aligned}$$

وذلك أيًّا كان $f\in E$ تمثّل النظم الأكثر استخدامًا على الفضاء E. هنا أيضًا سنكتفي بإثبات أنّ $\|\cdot\|_2$ نظيم وذلك لأنّ الإثبات في حالة $\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_\infty$ بسيط.

ليكن $f,g\in E$ و $\lambda\in\mathbb{k}$. لدينا:

- إذا كان $\|f\|_2=0$ فإنّ $\sqrt{\int_a^b|f(t)|^2\,\mathrm{dt}}=0$، ولمّا كان $|f|^2$ تابعًا مستمرًّا موجبًا تكامله على $[a,b]$ معدوم فإنّنا نستنتج أنّ $f=0$.
-

$$\begin{aligned}\|\lambda\cdot f\|_2&=\sqrt{\int_a^b|\lambda\cdot f(t)|^2\,\mathrm{dt}}\\ &=\sqrt{|\lambda|^2\cdot\int_a^b|f(t)|^2\,\mathrm{dt}}=|\lambda|\cdot\|f\|_2\end{aligned}$$

- إنّ المتراجحة $\|f+g\|_2 \le \|f\|_2 + \|g\|_2$ تكافئ المتراجحة

$$\begin{aligned}\|f+g\|_2^2 &= \|f\|_2^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\int_a^b \overline{f(t)}\cdot g(t)\,\mathrm{d}t\right) + \|g\|_2^2 \\ &\le \|f\|_2^2 + 2\|f\|_2\cdot\|g\|_2 + \|g\|_2^2\end{aligned}$$

أو $\mathrm{Re}\left(\int_a^b \overline{f(t)}\cdot g(t)\,\mathrm{d}t\right) \le \|f\|_2\cdot\|g\|_2$ ، والمتراجحة الأخيرة نتيجةٌ واضحة

من متراجحة شوارتز $\left|\int_a^b \overline{f(t)}\cdot g(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \|f\|_2\cdot\|g\|_2$.

نستنتج إذن، أنّ التطبيق $\|\cdot\|_2$ نظيمٌ على E .

تعريف 2. ليكن E فضاءً شعاعيًّا على $\mathbb{k}$. نقول عن النظيمين N_1, N_2 المعرّفين على E إنّهما **متكافئان** إذا وفقط إذا وُجد عددان حقيقيّان موجبان تمامًا α, β بحيث تتحقّق المتراجحة المضاعفة $\alpha\cdot N_1(x) \le N_2(x) \le \beta\cdot N_1(x)$ ، وذلك أيّا كان العنصر x من E ، ونكتب حينئذٍ $N_1 \sim N_2$.

يُمكننا التحقّق بسهولةٍ من أنّ العلاقة الثنائيّة $(\sim)$ هي علاقة تكافؤ على E (أي انعكاسيّة وتناظريّة ومتعدّية).

أمثلة

1. النظيمان $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ المعرّفان سابقًا على $\mathbb{k}^m$ متكافئان، وذلك بسبب المتراجحة الواضحة $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i| \le m\cdot\|x\|_\infty$.
2. النظيمان $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty$ المعرّفان سابقًا على $E = \mathcal{C}([0,1])$ غير متكافئين. لإثبات ذلك نفترض وجود $\beta > 0$ بحيث $\forall f \in E, \|f\|_\infty \le \beta\cdot\|f\|_1$. لتكن المتتالية (f_n) من عناصر E المعطاة بالصيغة $f_n(x) = x^n$. لدينا

$\frac{\beta}{n+1} = \beta \cdot \left\|f_n\right\|_1 \geq \left\|f_n\right\|_\infty = \forall n \in \mathbb{N}, 1$، وبجعل n تسعى إلى $+\infty$

نصل إلى التناقض الواضح $0 \leq 1$، وعليه فالنظيمان $\left\|\cdot\right\|_\infty, \left\|\cdot\right\|_1$ غير متكافئين.

تعريف 3. ليكن $\left(E, \left\|\cdot\right\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا على $\mathbb{k}$، و $a \in E$ و $r \geq 0$. نعرّف **الكرة المفتوحة** التي مركزها a ونصف قطرها r على أنّها المجموعة $B(a,r) = \{x \in E, \left\|x-a\right\| < r\}$، و**الكرة المغلقة** التي مركزها a ونصف قطرها r على أنّها المجموعة $\overline{B}(a,r) = \{x \in E, \left\|x-a\right\| \leq r\}$، و**السطح الكروي** الذي مركزه a ونصف قطره r على أنّه المجموعة $S(a,r) = \{x \in E, \left\|x-a\right\| = r\}$. نسمّي بشكلٍ خاصّ $S(0,1), \overline{B}(0,1), B(0,1)$ **الكرة الواحديّة المفتوحة**، **الكرة الواحديّة المغلقة**، **السطح الكروي الواحدي**، على الترتيب.

تعريف 4. ليكن $\left(E, \left\|\cdot\right\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا على $\mathbb{k}$، وليكن x و y عنصرين من E. نسمّي المقدار $\left\|x-y\right\|$ **المسافة** بين x و y ونرمز إليها بالرمز $d(x,y)$. وإذا كانت A و B مجموعتين غير خاليتين من E فإنّنا نعرّف مسافة x عن A بالصيغة $d(x,A) = \inf\left\{\left\|x-a\right\| : a \in A\right\}$، ونعرّف المسافة بين A و B بالصيغة $d(A,B) = \inf\left\{\left\|a-b\right\| : (a,b) \in A \times B\right\}$.

أمثلة

نزوّد $E = \mathcal{C}([0,1])$ فضاء التوابع الحقيقيّة المستمرّة على المجال $[0,1]$ بالنظيم $\left\|\cdot\right\|_\infty$ المعرّف سابقًا.

1. ليكن العنصرين f و g من E المعرّفين بالصيغة: $h(x) = x^2, g(x) = x$.

   نتحقّق بسهولة أنّ $d(g,h) = \frac{1}{4}$.

2. لتكن $A=\left\{f\in E:\forall x\in\left[0,1\right],f(x)>2\right\}$ ، والمطلوب حساب $d(g,A)$ حيث $\forall x\in[0,1],g(x)=1$.

ليكن $f\in A$ ، إنّ المتراجحة

$$\forall x\in\left[0,1\right],f(x)-g(x)\geq f(x)-1>2-1=1$$

تُثبت أنّ $\left\|f-g\right\|_{\infty}\geq 1$ ، ومن ثَمّ $d(g,A)\geq 1$. من جهةٍ أخرى، إذا تأمّلنا المتتالية (f_n) من عناصر A والمعرّفة بالصيغة $f_n(x)=\dfrac{2n+3}{n+1}$ على المجال $[0,1]$ نجد أنّ $\left\|f_n-g\right\|_{\infty}=\dfrac{n+2}{n+1}$ ، وهذا يبيّن أنّه أيًّا كان العدد الطبيعي n تحقّقت المتراجحة $1\leq d(g,A)\leq\dfrac{n+2}{n+1}$ ، وبجعْلِ n تسعى إلى $+\infty$ في المتراجحة المضاعفة الأخيرة نجد أنّ $d(g,A)=1$.

2. نهاية متتالية في فضاء شعاعيّ منظّم

تعريف 5. ليكن $\left(E,\left\|\cdot\right\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا على $\mathbb{k}$ ، ولتكن (x_n) متتاليةً من عناصر E ، و a عنصرًا من E . نقول إنّ (x_n) **متقاربة** من a إذا وفقط إذا تقاربت المتتالية الحقيقيّة $\left(\left\|x_n-a\right\|\right)$ من الصفر، ونكتب في هذه الحالة $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ أو $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a$.

ونقول إنّ (x_n) تحقّق **شرط كوشي** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

$$\forall\varepsilon>0,\exists n_{\varepsilon}\in\mathbb{N}:n\geq m\geq n_{\varepsilon}\Rightarrow\left\|x_n-x_m\right\|<\varepsilon$$

المبرهنة الآتية تتضمّن نتائج بسيطة ولكنّها مهمّة.

مبرهنة 1. ليكن $\left(E,\left\|\cdot\right\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا على $\mathbb{k}$ ، ولتكن (x_n) و (y_n) متتاليتين من عناصر E ، و a و b عنصرين من E . و λ و μ عنصرين من $\mathbb{k}$.

1. إذا كانت (x_n) متقاربة من a كانت المتتالية $\left(\left\|x_n\right\|\right)$ متقاربة من $\left\|a\right\|$.
2. إذا كانت (x_n) متقاربة فهي تحقّق شرط كوشي.

3. إذا كانت (x_n) تحقّق شرط كوشي فهي محدودة.
4. إذا كانت (x_n) و (y_n) متقاربتين من a و b على الترتيب كانت المتتالية $(\lambda x_n + \mu y_n)$ متقاربةً من $\lambda a + \mu b$.

الإثبات

1. نتيجة مباشرة للمتراجحة $\left\|x_n - a\right\| \leq \left|\left\|x_n\right\| - \left\|a\right\|\right|$.
2. لتكن (x_n) متتالية متقاربةً من العنصر a من E. ليكن $\varepsilon > 0$، يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث $n \geq n_0 \Rightarrow \left\|x_n - a\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$، وعليه فإنّ

$$\begin{aligned} m \geq n \geq n_0 \Rightarrow \left\|x_n - x_m\right\| &\leq \left\|x_n - a\right\| + \left\|a - x_m\right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

ومنه (x_n) تحقّق شرط كوشي.

3. إذا كانت (x_n) تحقّق شرط كوشي، نأخذ $\varepsilon = 1$ فيوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث

$m \geq n \geq n_0 \Rightarrow \left\|x_n - x_m\right\| < 1$، وعليه

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left\|x_n\right\| - \left\|x_{n_0}\right\| \leq \left\|x_n - x_{n_0}\right\| < 1$$

ومنه $n \geq n_0 \Rightarrow \left\|x_n\right\| \leq 1 + \left\|x_{n_0}\right\|$.

فإذا وضعنا $M = \max(1 + \left\|x_{n_0}\right\|, \left\|x_0\right\|, \left\|x_1\right\|, \cdots, \left\|x_{n_0}\right\|)$ وجدنا أنّ $\forall n \in \mathbb{N}, \left\|x_n\right\| \leq M$ ومن ثمّ فالمتتالية (x_n) محدودة.

4. من المتراجحة

$$\left\|(\lambda x_n + \mu y_n) - (\lambda a + \mu b)\right\| \leq \left|\lambda\right|\left\|x_n - a\right\| + \left|\mu\right|\left\|y_n - b\right\|$$

وبالاستفادة من مبرهنة الإحاطة نجد أنّ المتتالية $(\left\|(\lambda x_n + \mu y_n) - (\lambda a + \mu b)\right\|)$ متقاربة من الصفر ومنه $(\lambda x_n + \mu y_n)$ متقاربة من $\lambda a + \mu b$. ■

ملاحظة 1. رأينا في المبرهنة السابقة، أنّ كلّ متتالية متقاربة في فضاء شعاعيّ منظّم تحقّق شرط كوشي، ولكن العكس غير صحيح، وهذا ما يبيّنه المثال الآتي.

مثال: ليكن E فضاء التوابع الحقيقيّة المستمرّة على المجال $K=\left[0,\frac{1}{2}\right]$، و F فضاء التوابع الحدوديّة المعرّفة على المجال K. أي التوابع $f:K\to\mathbb{R},x\mapsto P(x)$ حيث P كثير حدود أمثاله حقيقيّة. إنّ F فضاء شعاعيّ جزئيّ في E. نزوّد الفضائين F و E بنظيم التوابع المستمرّة على المجال K المعرّف بالعلاقة $\left\|f\right\|_\infty=\sup\limits_{x\in[0,1/2]}\left|f(x)\right|$. لتكن المتتالية (f_n) من عناصر F والمعطاة بالصيغة $f_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}x^k$. نعلم من دراستنا لمتتاليات التوابع أنّ المتتالية السابقة متقاربة بانتظام؛ أي إنّها متقاربة بالنسبة للنظيم $\left\|\cdot\right\|_\infty$ نحو التابع $f(x)=\frac{1}{1-x}$ وهذا يقتضي أيضًا أنّها تحقّق شرط كوشي في E وفي F معًا. ولكن (f_n) لا يمكن أن تتقارب في F، وذلك لأنّه في حال تقاربها من تابع من F فهو بالضرورة f.

لنفترض وجود P كثير حدود أمثاله حقيقيّة بحيث $\forall x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],P(x)=f(x)$ عندئذٍ يتحقّق $\forall x\in K,(1-x)P(x)=1$ ومنه $\deg(P)+1=0$ وهذا تناقض. إذن f ليس عنصرًا من F، وهذا يعني أنّ (f_n) متتالية من عناصر F تحقّق شرط كوشي ولكنّها غير متقاربة في F.

تعريف 6. ليكن $\left(E,\left\|\cdot\right\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا على $\mathbb{k}$، نقول عن $\left(E,\left\|\cdot\right\|\right)$ إنّه **فضاءٌ تامٌّ** (أو **فضاء باناخ – Banach**) إذا وفقط إذا تقاربت فيه كلُّ متتاليةٍ تحقّقُ شرطَ كوشي.

أمثلة

1. نعلم أنّ كلّ متتالية حقيقيّة تحقّق شرط كوشي تكون متقاربة، وهذا يعني أنّ الفضاء الشعاعي المنظّم $\left(\mathbb{R},\left|\cdot\right|\right)$ تامّ.

2. الفضاء الشعاعي المنظّم $\left(\mathbb{C},\left|\cdot\right|\right)$ تامّ أيضًا. لإثبات ذلك نأخذ متتاليةً عقديّةً $(z_n = x_n + iy_n)$ تحقّق شرط كوشي حيث $x_n = \mathrm{Re}(z_n)$، و $y_n = \mathrm{Im}(z_n)$. من المتراجحتين $\left|x_n - x_m\right| \leq \left|z_n - z_m\right|$ و $\left|y_n - y_m\right| \leq \left|z_n - z_m\right|$، نستنتج أنّ كلًا من المتتاليتين الحقيقيّتين (x_n) و (y_n) تحقّقان شرط كوشي فهما متقاربتان من عددين حقيقيّين x و y. ومن المتراجحة $\left|z_n - (x+iy)\right| \leq \left|x_n - x\right| + \left|y_n - y\right|$ نستنتج أنّ (z_n) متقاربة من $x + iy$. بذلك نكون قد أثبتنا أنّ $\left(\mathbb{C},\left|\cdot\right|\right)$ تامّ.

3. بشكلٍ أعمّ، لتكن $(E_1,N_1),(E_2,N_2),\cdots,(E_m,N_m)$ فضاءات شعاعيّة منظّمة تامّة، وليكن $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_m$. نزوّد E بالنظيم المعرّف بالعلاقة. $N(x) = \max\left(N_1(x_1),N_2(x_2),\cdots,N_m(x_m)\right)$. إنّ (E,N) فضاءٌ تامّ. لإثبات ذلك نأخذ متتالية $\left(x_n = (x_{1n},x_{2n},\cdots,x_{mn})\right)$ من عناصر E تحقّق شرط كوشي. من المتراجحات

$$\forall k \in \mathbb{N}_m, N_k(x_{kn} - x_{km}) \leq N(x_n - x_m)$$

نستنتج أنّ كلّ متتالية (x_{kn}) تحقّق شرط كوشي في (E_k,N_k) فهي متقاربة من عنصرٍ $a_k \in E_k$. نضع $a = (a_1,a_2,\cdots,a_m)$. من المتراجحة $N(x_n - a) \leq \sum_{k=1}^{m} N_k(x_{kn} - a_k)$ نستنتج أنّ (x_n) متقاربة من $a \in E$ومنه (E,N) تامّ.

4. نستنتج ممّا سبق أنّ الفضاء المنظّم $\left(\mathbb{k}^m,\left\|\cdot\right\|_\infty\right)$ تامّ.

5. ليكن $E = \mathcal{C}([a,b])$ فضاء التوابع المستمرّة على المجال غير التافه $[a,b]$. نعلم من دراستنا لمتتاليات التوابع أنّ كلّ متتالية توابع تحقّق شرط كوشي بانتظام تكون متقاربة

بانتظام، وإذا كانت حدود تلك المتتالية توابع مستمرّة فإنّ نهايتها مستمرّة. نستنتج من ذلك أنّ $\left(E,\|\cdot\|_{\infty}\right)$ تامّ.

6. ليكن E فضاء التوابع الحدوديّة المعرّفة على $\left[0,\frac{1}{2}\right]$، نزوّد E بالنظيم $\|\cdot\|_{\infty}$. أثبتنا في مثالٍ سابق أنّ المتتالية (f_n) المعرّفة بالصيغة $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n} x^n$ تحقّق شرط كوشي ولكنّها غير متقاربة في $\left(E,\|\cdot\|_{\infty}\right)$، وهذا يعني أنّ الفضاء $\left(E,\|\cdot\|_{\infty}\right)$ غير تامّ.

تعريف 7. ليكن $\left(E,\|\cdot\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا على $\mathbb{k}$، ولتكن (x_n) متتالية من عناصر E. نقول إنّ **المتسلسلة** $\left(\sum x_n\right)$ **متقاربة** في $\left(E,\|\cdot\|\right)$ إذا وفقط إذا تقاربت متتالية مجاميعها الجزئيّة (S_n) حيث $\forall n\in\mathbb{N}, S_n=\sum_{k=0}^{n} x_k$. وفي هذه الحالة نكتب $\lim_{n\to\infty} S_n=\sum_{k=0}^{\infty} x_k$.

ونقول إنّ المتسلسلة $\left(\sum x_n\right)$ **متقاربة بالنظيم** إذا وفقط إذا تقاربت المتسلسلة الحقيقيّة $\left(\sum\|x_n\|\right)$.

مبرهنة 2. ليكن $\left(E,\|\cdot\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا على $\mathbb{k}$، ولتكن (x_n) متتالية من عناصر E. إذا تقاربت المتسلسلة $\left(\sum x_n\right)$ تقاربت متتالية حدّها العام (x_n) من العنصر 0_E

الإثبات

لتكن $\left(S_n=\sum_{k=0}^{n} x_k\right)$ متتالية المجاميع الجزئية للمتسلسلة $\left(\sum x_n\right)$.

إذا كانت $\left(\sum x_n\right)$ متقاربة كانت كلّ من المتتاليتين $(S_n)_{n\geq 1}$ و $(S_{n-1})_{n\geq 1}$ متقاربتين من نهايةٍ واحدةٍ $l\in E$، وعليه فإنّ المتتالية $(x_n=S_n-S_{n-1})$ متقاربة من 0_E. ■

مبرهنة 3. ليكن $\left(E,\left\|\cdot\right\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا على $\mathbb{k}$، ولتكن (x_n) متتالية من عناصر E. نفترض أنّ $\left(E,\left\|\cdot\right\|\right)$ تامّ، وأنّ المتسلسلة $\left(\sum x_n\right)$ متقاربة بالنظيم عندئذٍ تكون $\left(\sum x_n\right)$ متقاربة.

الإثبات

ليكن $\varepsilon > 0$، يوجد عندئذٍ عدد طبيعيّ n_0 بحيث $m \geq n \geq n_0 \Rightarrow \sum_{k=n}^{m}\left\|x_k\right\| < \varepsilon$

وعليه يكون $\left\|\sum_{k=n}^{m} x_k\right\| \leq \sum_{k=n}^{m}\left\|x_k\right\| < \varepsilon \Leftarrow m \geq n \geq n_0$ ومن ثمّ فإنّ $\left(\sum x_n\right)$ تحقّق شرط كوشي، ولمّا كان $\left(E,\left\|\cdot\right\|\right)$ تامًّا استنتجنا أنّها متقاربة وبذلك يكتمل الإثبات. ■

مبرهنة 4. (النقطة الثابتة في فضاءٍ تام) ليكن $\left(E,\left\|\cdot\right\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا تامًّا على $\mathbb{k}$، وليكن التطبيق $f: E \to E$. نفترض وجود عدد $k \in [0,1[$ بحيث يتحقّق شرط ليبشتز الآتي:

$$\forall (x,y) \in E^2, \left\|f(x)-f(y)\right\| \leq k\left\|x-y\right\|$$

عندئذٍ يوجد في E نقطة ثابتة وحيدة للتابع f أي $\exists ! x \in E : f(x) = x$.

الإثبات

لنثبت أولًا الوحدانيّة. نفترض وجود نقطتين ثابتتين x و y للتابع f في المجموعة E، عندئذٍ يتحقّق $f(x) = x$ و $f(y) = y$، وحسب شرط ليبشتز نجد $\left\|x-y\right\| \leq k\left\|x-y\right\|$، ومنه $\left\|x-y\right\|(1-k) \leq 0$، ولمّا كان $(1-k) > 0$ فإنّ $\left\|x-y\right\| = 0$ ومنه نستنتج أنّ $x = y$.

لإثبات الوجود، نعرّف المتتالية (x_n) بالتدريج كما يأتي: $x_0 \in E, \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$. أيًّا كان العدد الطبيعي n كان $\left\|x_{n+2}-x_{n+1}\right\| = \left\|f(x_{n+1})-f(x_n)\right\| \leq k\left\|x_{n+1}-x_n\right\|$، ومن ثمّ نستنتج بالتدريج أنّ $\forall n \in \mathbb{N}, \left\|x_{n+1}-x_n\right\| \leq k^n\left\|x_1-x_0\right\|$، ولمّا كان $k \in [0,1[$ كانت المتسلسلة

$\left(\sum(x_{n+1}-x_n)\right)$ متقاربة بالنظيم، فهي متقاربة في $\left(E,\|\cdot\|\right)$ لأنّه فضاءٌ تامّ، وليكن $\sigma=\sum_{n=0}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$. إنّ متتالية المجاميع الجزئيّة (S_n) للمتسلسلة $\left(\sum(x_{n+1}-x_n)\right)$ متقاربة من σ، ولكن

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, S_{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)=x_n-x_0$$

وعليه فإنّ (x_n) متقاربة من عنصرٍ $x\in E$.

من جهةٍ أخرى، نستنتج من المتراجحة $\|f(x_n)-f(x)\|\le k\|x_n-x\|$ أنّ (x_{n+1}) متقاربة من $f(x)$، ومن x لأنّها متتالية جزئيّة من (x_n)، ومن ثمّ $f(x)=x$، أي إنّ x نقطةٌ ثابتةٌ للتابع f، وبذلك يكتمل إثبات المبرهنة. ■

3. المجموعات المغلقة والمجموعات المفتوحة في فضاء شعاعيّ منظّم

تعريف 8. ليكن $\left(E,\|\cdot\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا على $\mathbb{k}$، و A مجموعة جزئيّة في E. نقول إنّ A **مغلقة** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط: إذا كانت المتتالية (x_n) من عناصر A متقاربة من عنصرٍ $l\in E$ كان l عنصرًا من A.

ونقول إنّ A **مفتوحة** إذا وفقط إذا كانت متمّمتها $E\setminus A$ مغلقة.

أمثلة

1. في فضاء شعاعيّ منظّم $\left(E,\|\cdot\|\right)$ المجموعتان E و ϕ مفتوحتان ومغلقتان في آنٍ معًا. ذلك لأنّ كلا المجموعتين مغلقة وكّل واحدة منهما متمّمة للأخرى.
2. كلّ الكرات المغلقة $\overline{B}(a,r)$ في فضاء شعاعيّ منظّم $\left(E,\|\cdot\|\right)$ مجموعات مغلقة.

   لكي نتحقّق من ذلك يكفي أن نأخذ متتالية (x_n) من عناصر $\overline{B}(a,r)$ متقاربة من عنصر l من E ونثبت أنّ $l\in\overline{B}(a,r)$. لدينا، وبالاستفادة من متراجحة المثلّث

$$\forall n\in\mathbb{N}, \|l-a\|\le\|l-x_n\|+\|x_n-a\|\le\|l-x_n\|+r$$

وبجعل n تسعى إلى $+\infty$ في المتراجحة الأخيرة نجد أنّ $\|l-a\| \leq r$ ومنه $l \in \bar{B}(a,r)$.

3. كلّ الكرات المفتوحة $B(a,r)$ في فضاء شعاعيّ منظّم $\left(E,\|\cdot\|\right)$ مجموعات مفتوحة. لكي نتحقّق من ذلك يكفي أن نأخذ متتالية (x_n) من عناصر $E \setminus B(a,r)$ متقاربة من عنصر l من E ونثبت أنّ $l \in E \setminus B(a,r)$.

بالاستفادة من متراجحة المثلّث نجد أنّ

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|l-a\| \geq \|x_n - a\| - \|l - x_n\| \geq r - \|l - x_n\|$$

وبجعل n تسعى إلى $+\infty$ في المتراجحة الأخيرة نجد أنّ $\|l-a\| \geq r$ ومنه $l \in E \setminus B(a,r)$.

مبرهنة 5. ليكن $\left(E,\|\cdot\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا على $\mathbb{k}$، ولتكن A و B مجموعتين مغلقتين في $\left(E,\|\cdot\|\right)$ عندئذٍ تكون المجموعتان $A \cap B$ و $A \cup B$ مغلقتين.

الإثبات

لتكن (x_n) متتالية من عناصر $A \cap B$ متقاربة من العنصر $l \in E$. إنّ (x_n) متتالية من عناصر المجموعة المغلقة A متقاربة من l إذن $l \in A$ وبالمثل $l \in B$، ومنه $l \in A \cap B$ وهذا يُثبت أنّ $A \cap B$ مغلقة.

لتكن الآن (x_n) متتالية من عناصر $A \cup B$ متقاربة من العنصر $l \in E$. إنّ إحدى المجموعتين A أو B تحتوي عددًا غير منتهٍ من عناصر (x_n) نفترض أنّ A هي تلك المجموعة. نُنشئ المتتالية الجزئيّة $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ بالشكل التالي : $\varphi(0)$ هو أصغر عدد طبيعي k يحقق $x_k \in A$، و $\varphi(1)$ هو أصغر عدد طبيعي k أكبر تمامًا من $\varphi(0)$ يحقق $x_k \in A$، وهكذا إذا كان $\varphi(n)$ معرّفًا عرّفنا $\varphi(n+1)$ على أنّه أصغر عدد طبيعي k أكبر تمامًا من $\varphi(n)$ يحقق $x_k \in A$. إنّ المتتالية $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ تنتمي عناصرها إلى A وهي متتالية جزئيّة من (x_n) فهي متقاربة من l أيضًا، وعليه $l \in A \subset A \cup B$. وهذا يُثبت أنّ $A \cup B$ مجموعة مغلقة. ■

مبرهنة 6. ليكن $\left(E,\left\|\cdot\right\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا على $\mathbb{k}$، ولتكن A و B مجموعتين مفتوحتين في $\left(E,\left\|\cdot\right\|\right)$ عندئذٍ تكون المجموعتان $A\cap B$ و $A\cup B$ مفتوحتين.

الإثبات

إنّ كلاًّ من $E\setminus A$ و $E\setminus B$ مجموعةٌ مغلقة وبمقتضى المبرهنة السابقة يتبيّن أنّ المجموعة $(E\setminus A)\cup(E\setminus B)=E\setminus(A\cap B)$ مغلقة، ومنه $A\cap B$ مفتوحة.

من جهة أخرى، وأيضًا بمقتضى المبرهنة السابقة يتبيّن أنّ المجموعة $(E\setminus A)\cap(E\setminus B)=E\setminus(A\cup B)$ مغلقة، ومنه $A\cup B$ مفتوحة. ■

تعريف 9. ليكن $\left(E,\left\|\cdot\right\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا على $\mathbb{k}$، و A مجموعة جزئيّة في E. نقول إنّ A **جوارٌ** للعنصر $x\in E$ إذا وفقط إذا وُجد $0<\delta$ بحيث تكون الكرة $B(x,\delta)$ محتواة في A.

مبرهنة 7. ليكن $\left(E,\left\|\cdot\right\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا على الحقل $\mathbb{k}$، ولتكن A مجموعة جزئيّة من E. إنّ القضيّتين الآتيتين متكافئتان:

1. A مجموعة مفتوحة.
2. A جوارٌ لكلّ عنصرٍ من عناصرها.

الإثبات

نفترض أنّ A مفتوحة، وأنّها ليست جوارًا للعنصر $x\in A$، عندئذٍ أيًّا كان العدد الطبيعي n كان $B(x,\frac{1}{n+1})\not\subset A$ ووُجد عنصر x_n من $B(x,\frac{1}{n+1})\setminus A$. إنّ المتتالية (x_n) تنتمي عناصرها إلى $E\setminus A$ من جهة وتحقّق $\forall n\in\mathbb{N},\left\|x_n-x\right\|<\frac{1}{n+1}$ فهي متقاربة من x، وهذا تناقض لأنّ $E\setminus A$ مجموعة مغلقة فلا بدّ أن تنتمي النهاية x إلى $E\setminus A$.

إذن A جوارٌ لكلّ عنصرٍ من عناصرها.

نفترض الآن أنّ A جوارٌ لكلّ عنصرٍ من عناصرها. لتكن (x_n) متتالية من عناصر $E\setminus A$ متقاربة من العنصر $x\in E$. نفترض أنّ $x\notin(E\setminus A)$ أي $x\in A$ فيوجد $0<\delta$ بحيث

$B(x,\delta) \subset A$ ومن ثَمّ يتحقّق لدينا $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n - x\| \geq \delta$ ، وهذا يناقض تقارب (x_n) من x ، نستنتج إذن أنّ $x \in (E \setminus A)$ ، ومنه $E \setminus A$ مغلقة ومن ثَمّ A مفتوحة. وهذا يُكمل الإثبات. ■

مبرهنة 8. ليكن $(E, \|\cdot\|)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا على $\mathbb{k}$ ، ولتكن $(A)_{i \in I}$ جماعةً من المجموعات المفتوحة في $(E, \|\cdot\|)$. عندئذٍ تكون المجموعة $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ مفتوحةً.

الإثبات

ليكن x من A ، فيوجد k من I بحيث $x \in A_k$ ، وعليه يوجد $\delta > 0$ بحيث $B(x,\delta) \subset A_k \subset A$. وبمقتضى المبرهنة السابقة تكون A مجموعة مفتوحة.■

نتيجة: ليكن $(E, \|\cdot\|)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا على $\mathbb{k}$ ، ولتكن $(A)_{i \in I}$ جماعة من المجموعات المغلقة في $(E, \|\cdot\|)$. عندئذٍ تكون المجموعة $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ مغلقةً.

الإثبات

يكفي أنّ نلاحظ أنّ $\bigcup_{i \in I} (E \setminus A_i) = E \setminus \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)$ ، ونطبّق المبرهنة السابقة على جماعة المجموعات المفتوحة $(E \setminus A_i)_{i \in I}$. ■

ملاحظة 2. إنّ اجتماع جماعة غير منتهية من المجموعات المغلقة ليس بالضرورة مجموعة مغلقة، كما أنّ تقاطع جماعة غير منتهية من المجموعات المفتوحة ليس بالضرورة مجموعة مفتوحة، ويكفي أن نتأمّل الجماعتين $\left(\left[\frac{1}{n+1}, \frac{n}{n+1}\right]\right)_{n \in \mathbb{N}}$ و $\left(\left]-\frac{1}{n+1}, \frac{n+2}{n+1}\right[\right)_{n \in \mathbb{N}}$ لكي نتوثّق من ذلك. ففي الحالة الأولى يكون الاجتماع هو $]0,1[$ وهي غير مغلقة، وفي الثانية يكون التقاطع هو المجموعة $[0,1]$ وهي غير مفتوحة.

4. لصاقة وداخل مجموعة في فضاء شعاعيّ منظّم

تعريف 10. ليكن $\left(E,\|\cdot\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا على $\mathbb{k}$، ولتكن A مجموعة جزئيّة من E، و x عنصرًا من E. نقول إنّ x **لاصقٌ** بالمجموعة A إذا وفقط إذا وُجدت متتالية (x_n) من عناصر A متقاربة من x. نسمّي مجموعة العناصر اللاصقة بالمجموعة A **لصاقةَ** A ونرمز إليها بالرمز $\overline{A}$.

مبرهنة 9. ليكن $\left(E,\|\cdot\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا على الحقل $\mathbb{k}$، ولتكن A مجموعة جزئيّة من E. إنّ $\overline{A}$ مجموعة مغلقة و $A \subset \overline{A}$ وتتحقّق المساواة إذا وفقط إذا كانت A مغلقة.

الإثبات

لنثبت أنّ $\overline{A}$ مغلقة. لتكن (x_n) متتالية من عناصر $\overline{A}$. أيًّا كان العدد الطبيعيّ n كان x_n عنصرًا من $\overline{A}$، ووُجدت متتالية $(x_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ من عناصر A متقاربة من x_n. ومن ثمّ يوجد عدد طبيعي $\varphi(n)$ بحيث يكون $\left\|x_{n,\varphi(n)} - x_n\right\| < \dfrac{1}{n+1}$. إنّ $\left(x_{n,\varphi(n)}\right)$ متتالية من عناصر A وتحقّق

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\|x_{n,\varphi(n)} - x\right\| \leq \left\|x_{n,\varphi(n)} - x_n\right\| + \left\|x_n - x\right\| \leq \frac{1}{n+1} + \left\|x_n - x\right\|$$

فهي متقاربة من x ومنه $x \in \overline{A}$، ومن ثَمّ $\overline{A}$ مغلقة.

إنّ الاحتواء $A \subset \overline{A}$ واضح إذ يكفي أن نأخذ المتتالية الثابتة $(x_n = x)$ لكلّ عنصرٍ x من A.

لنفترض الآن أنّ A مغلقة عندئذٍ أيّا كان x من $\overline{A}$، فتوجد متتالية (x_n) من عناصر A متقاربة من x، ولمّا كانت A مغلقة كان x عنصرًا من A، وعليه $\overline{A} \subset A$، ومنه نجد المساواة $\overline{A} = A$.

أمّا إذا كان $A = \overline{A}$، فإنّ A مغلقة وذلك بمقتضى الشقّ الأوّل من المبرهنة. ■

نتيجة: ليكن $\left(E,\|\cdot\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا على $\Bbbk$، ولتكن A مجموعة جزئيّة من الفضاء E. إنّ $\overline{A}$ أصغر مجموعة مغلقة في $\left(E,\|\cdot\|\right)$ تحتوي A (بمعنى أنّه إذا كانت B مجموعة مغلقة في $\left(E,\|\cdot\|\right)$ تحتوي A، كانت $\overline{A}$ محتواة في B).

الإثبات

نعلم من المبرهنة السابقة أنّ $\overline{A}$ مغلقة. من جهة أخرى لتكن B مجموعة مغلقة في $\left(E,\|\cdot\|\right)$ تحتوي A، وليكن x عنصرًا من $\overline{A}$، عندئذٍ توجد متتالية من عناصر A (ومن ثَمّ من عناصر B) متقاربة من x، ولأنّ B مغلقة فإنّ x عنصر من B، وعليه $\overline{A} \subset B$. ■

تعريف 11. ليكن $\left(E,\|\cdot\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا على $\Bbbk$، و A و B مجموعتين جزئيّتين من E. نقول إنّ A **كثيفة** في B إذا وفقط إذا كان $B \supset \overline{A}$. بمعنى آخر، مهما يكن العنصر b من B، توجد متتالية (a_n) من عناصر A متقاربة من b أي $b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

أمثلة

1. إنّ $\mathbb{Q}$ كثيفة في $\mathbb{R}$ لأنّ كلّ عدد حقيقيّ هو نهاية متتالية من الأعداد العاديّة.
2. ليكن $E = \mathcal{C}\left([0,1]\right)$ فضاء التوابع الحقيقيّة المستمرّة على المجال $[0,1]$، و F فضاء التوابع الحدوديّة على المجال ذاته. نزوّد الفضاءين بالنظيم $\|\cdot\|_\infty$. نعلم بمقتضى مبرهنة فايرشتراس أنّ كلّ تابع مستمرّ على $[0,1]$ هو نهاية منتظمة لمتتالية من التوابع الحدوديّة، وهذا يعني أنّ F مجموعة كثيفة في E.
3. ليكن $E = \mathcal{R}([a,b])$ فضاء التوابع الحقيقيّة المضبوطة على المجال غير التافه $[a,b]$، و F فضاء التوابع الدرجيّة على المجال ذاته. نزوّد E بالنظيم $\|\cdot\|_\infty$. إنّ F كثيفة في E.

تعريف 12. ليكن $\left(E,\|\cdot\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا على $\Bbbk$، ولتكن A مجموعة جزئيّة من E، و x عنصرًا من E. نقول إنّ x **عنصرٌ داخليّ** في المجموعة A إذا وفقط إذا وُجِد

$0<\delta$ بحيث $B(x,\delta)\subset A$ ، أي إذا وفقط إذا كانت A جوارًا للعنصر x . نسمّي مجموعة العناصر الداخليّة في المجموعة A **داخل** A ونرمز إليها بالرمز $\overset{\circ}{A}$.

مبرهنة 10. ليكن $\left(E,\|\cdot\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا على $\mathbb{k}$ ، ولتكن A مجموعة جزئيّة من E . إنّ $\overset{\circ}{A}$ مجموعة مفتوحة و $\overset{\circ}{A}\subset A$ وتتحقّق المساواة إذا وفقط إذا كانت A مفتوحة.

الإثبات

لنثبت أوّلًا أنّ $\overset{\circ}{A}$ مجموعة مفتوحة. ليكن x عنصرًا من $\overset{\circ}{A}$ عندئذ يوجد $\delta>0$ بحيث $B(x,\delta)\subset A$. ليكن الآن y عنصرًا من $B(x,\delta)$. لمّا كانت $B(x,\delta)$ مفتوحةً فإنّنا نجد $\eta>0$ بحيث $B(y,\eta)\subset B(x,\delta)\subset A$ ، ونستنتج أنّ y عنصرٌ داخليّ في A ، وعليه $B(x,\delta)\subset\overset{\circ}{A}$ ، ومن ثمّ $\overset{\circ}{A}$ مجموعة مفتوحة.

إنّ الاحتواء $\overset{\circ}{A}\subset A$ واضح. فإذا كان x عنصرًا من $\overset{\circ}{A}$ فإنّنا نجد $\delta>0$ بحيث $B(x,\delta)\subset A$ ومنه $x\in A$.

لنفترض أنّ A مفتوحة، وليكن $x\in A$ عندئذٍ يوجد $0<\delta$ بحيث يتحقّق $B(x,\delta)\subset A$ ، وتكون A جوارًا للعنصر x ومنه $x\in\overset{\circ}{A}$. نستنتج من ذلك أنّ $A\subset\overset{\circ}{A}$ ومن ثمّ $\overset{\circ}{A}=A$.

أمّا إذا كان $\overset{\circ}{A}=A$ ، كانت A مفتوحة وذلك بمقتضى الشقّ الأوّل من المبرهنة. ■

نتيجة: ليكن $\left(E,\|\cdot\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا على $\mathbb{k}$ ، ولتكن A مجموعة جزئيّة من E . إنّ $\overset{\circ}{A}$ أكبر مجموعة مفتوحة في $\left(E,\|\cdot\|\right)$ محتواة في A (بمعنى أنّه إذا كانت U مجموعة مفتوحة في $\left(E,\|\cdot\|\right)$ محتواة في A ، كانت U محتواةً في $\overset{\circ}{A}$).

الإثبات

نعلم من المبرهنة السابقة أنّ $\overset{\circ}{A}$ مفتوحة. من جهة أخرى لتكن $U \subset A$ مجموعة مفتوحة في $\left(E,\|\cdot\|\right)$، وليكن x عنصرًا من U. إنّ U جوارٌ للعنصر x، وكذلك تكونُ A، ومنه x عنصرٌ من $\overset{\circ}{A}$، ومن ثَمّ $U \subset \overset{\circ}{A}$، وهذا ما نودّ إثباته. ■

5. المجموعات المتراصّة في فضاء شعاعيّ منظّم

تعريف 13. ليكن $\left(E,\|\cdot\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا على $\mathbb{k}$، ولتكن A مجموعة جزئيّة من E. نقول إنّ A **متراصّة** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط: أيًّا تكن المتتالية (x_n) من عناصر A، توجد متتاليةٌ جزئيّة $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ متقاربة نحو عنصرٍ x من A.

أمثلة

1. في الفضاء الشعاعيّ المنظّم $\left(\mathbb{R},|\cdot|\right)$ كلّ مجموعة مغلقة ومحدودة تكون متراصّة:

   لإثبات ذلك نأخذ (x_n) متتالية من عناصر المجموعة المغلقة والمحدودة A. تُخبرنا مبرهنة Bolzano–Weirstrass للمتتاليات المحدودة في $\mathbb{R}$ أنّه توجد متتالية جزئيّة $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ متقاربة من عنصر $x \in \mathbb{R}$، ولمّا كانت A مغلقة كانت النهاية x عنصرًا من A بالضرورة، ومنه نستنتج أنّ A متراصّة.

2. في الفضاء الشعاعيّ المنظّم $\left(\mathbb{C},|\cdot|\right)$ كلّ مجموعة مغلقة ومحدودة تكون متراصّة.

   لإثبات ذلك نأخذ $(z_n = x_n + iy_n)$ متتالية من عناصر المجموعة المغلقة والمحدودة A حيث (x_n) و (y_n) متتاليتيّ الجزأين الحقيقي والتخيّلي للمتتالية (z_n) بالترتيب.

   إنّ كلًّا من (x_n) متتالية حقيقيّة محدودة فتوجد متتالية جزئيّة $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ متقاربة من عنصرٍ a. من جهةٍ أخرى $\left(y_{\varphi(n)}\right)$ متتالية حقيقيّة محدودة فتوجد متتالية جزئيّة $\left(y_{\varphi(\psi(n))}\right)$ متقاربة من عنصرٍ b. وعليه فإنّ المتتالية $\left(x_{\varphi(\psi(n))}\right)$ متقاربة من a

لأنّها متتالية جزئيّة من $\left(x_{\varphi(n)}\right)$، ومنه $\left(z_{\varphi(\psi(n))}\right)$ متقاربة من $a+ib$، ولمّا كانت A مغلقةً كان $a+ib$ عنصرًا من A، ومن ثَمّ A مجموعة متراصّة.

مبرهنة 11. ليكن $\left(E,\left\|\cdot\right\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا على $\mathbb{k}$، ولتكن A مجموعة متراصّة. عندئذٍ تكون A مغلقة ومحدودة.

الإثبات

لتكن (x_n) متتاليةً من عناصر A متقاربة من $x \in E$. لأنّ A متراصّة توجد متتاليةٌ جزئيّة $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ متقاربة نحو عنصرٍ l من A، ولمّا كانت (x_n) متقاربة من x كانت كلّ متتالية جزئيّة منها متقاربة من x، ومنه $l = x \in A$، ومن ثمّ A مجموعة مغلقة.

نفترض الآن أنّ A غير محدودة، يوجد عندئذٍ متتالية (x_n) من عناصر A تحقّق $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|x_n\right\| = +\infty$. لمّا كانت A متراصّة فتوجد متتاليةٌ جزئيّة $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ متقاربة نحو عنصرٍ l من A، وعليه فإنّ المتتالية $\left(\left\|x_{\varphi(n)}\right\|\right)$ متقاربة من $\left\|l\right\|$، ولكن $\left(\left\|x_{\varphi(n)}\right\|\right)$ متتالية جزئيّة من المتتالية $\left(\left\|x_n\right\|\right)$ فلا بدّ أن تحقّق $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|x_{\varphi(n)}\right\| = +\infty$، وهذا تناقض واضح.

نستنتج إذن أنّ A محدودة، وبذلك يكتمل إثبات المبرهنة. ∎

ملاحظة 3. إنّ عكس المبرهنة السابقة خاطئ وهذا ما يبيّنه المثال الآتي.

مثال : ليكن $E = \mathcal{C}\left(\left[0,2\pi\right],\mathbb{R}\right)$ فضاء التوابع الحقيقيّة المستمرّة على $\left[0,2\pi\right]$. نزوّد E بالنظيم $\left\|\cdot\right\|_2$ المعرّف بالعلاقة $\left\|f\right\|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi}\left|f(t)\right|^2 \mathrm{d}t}$. لتكن $A = \overline{B}(0,1)$ الكرة الواحديّة المغلقة بالنسبة لهذا النظيم وهي مجموعة مغلقة ومحدودة. لنتأمّل المتتالية (f_n) من عناصر E والمعرّفة بالصيغة $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx$. نلاحظ أنّ (f_n) متتالية من عناصر A، وذلك لأنّ $\left\|f_0\right\|_2 = 0$، و $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left\|f_n\right\|_2 = 1$. من جهةٍ أخرى يمكننا التحقّق بسهولة من أنّه أيًّا كان n و m من $\mathbb{N}^*$ فإنّ $\left\|f_n - f_m\right\|_2 = \sqrt{2}\cdot\left(1-\delta_{nm}\right)$ حيث

$\delta_{nm} = \begin{cases} 0, n = m \\ 1, n \neq m \end{cases}$. نفترض أنّه توجد متتالية جزئيّة $\left(f_{\varphi(n)}\right)$ متقاربة في A، فهي تحقّق شرط كوشي ويوجد عندئذٍ $n \in \mathbb{N}^*$ بحيث يتحقّق $\left\|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\right\|_2 < 1$، وهذا تناقض لأنّ $\left\|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\right\|_2 = \sqrt{2}$ وهذا يعني أنّه لا توجد متتالية جزئيّة كهذه، ومن ثَمّ A ليست متراصّة مع أنّها مغلقة ومحدودة.

مبرهنة 12. ليكن $\left(E, \|\cdot\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا على $\mathbb{k}$، ولتكن A مجموعة متراصّة. إذا كانت B مجموعة مغلقة محتواة في A، كانت B متراصّة.

الإثبات

لتكن (x_n) متتالية من عناصر B فهي متتالية من عناصر A، ولمّا كانت A متراصّة، فإنّنا نجد متتالية جزئيّة $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ متقاربة من عنصر $x \in A$، ولأنّ B مغلقة فإنّ x عنصرٌ من B، ومنه B مجموعة متراصّة. ■

مبرهنة 13. ليكن $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$، و $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ فضاءين شعاعيّين منظّمين على $\mathbb{k}$، ولتكن A مجموعة متراصّة في $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$، و B مجموعة متراصّة في $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$. عندئذٍ تكون المجموعة $A \times B$ مجموعة متراصّة في $\left(E \times F, \|\cdot\|\right)$ حيث $\|\cdot\|$ هو النظيم المعرّف بالعلاقة:

$$\forall (x, y) \in E \times F, \|(x, y)\| = \max\left(\|x\|_E, \|y\|_F\right)$$

الإثبات

لتكن (x_n, y_n) متتالية من عناصر $A \times B$. إنّ (x_n) متتالية من عناصر المجموعة المتراصّة A فتوجد متتالية جزئيّة $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ متقاربة من عنصرٍ a من A، ولكن $\left(y_{\varphi(n)}\right)$ متتالية من عناصر المجموعة المتراصّة B فتوجد متتالية جزئيّة $\left(y_{\varphi(\psi(n))}\right)$ متقاربة من عنصرٍ b من B، وعليه تكون المتتالية $\left(x_{\varphi(\psi(n))}\right)$ متقاربة من A، ومن ثمّ تكون المتتالية

$\left(x_{\varphi(\psi(n))}, y_{\varphi(\psi(n))}\right)$ الجزئيّة من (x_n, y_n) متقاربة من $(a,b) \in A \times B$، ومنه $A \times B$ متراصّة في الفضاء $\left(E \times F, \|\cdot\|\right)$.

يمكننا بسهولة إثبات صحّة النتيجة الآتية بالتدريج :

نتيجة: لتكن $\left(E_1, N_1\right), \left(E_2, N_2\right), \cdots, \left(E_m, N_m\right)$ فضاءات شعاعيّةً منظّمةً على $\mathbb{k}$، وأيًّا كان $k \in \mathbb{N}_m$، A_k مجموعة متراصّة في $\left(E_k, N_k\right)$. نزوّد الفضاء الشعاعيّ $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_m$ بالنظيم N المعطى كما يأتي: أيًّا كان العنصر $(x_1, x_2, \cdots, x_m) \in E$ كان:

$$N(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \max\left(N_1(x_1), N_2(x_2), \cdots, N_m(x_m)\right)$$

عندئذٍ تكون المجموعة $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m$ مجموعة متراصّة في $\left(E, N\right)$.

تطبيق: في الفضاء الشعاعيّ المنظّم $\left(\mathbb{k}^m, \|\cdot\|_\infty\right)$، كلّ مجموعة مغلقة ومحدودة تكون متراصّة.

الإثبات

لتكن A مجموعة مغلقة ومحدودة في $\left(\mathbb{k}^m, \|\cdot\|_\infty\right)$، يوجد عندئذٍ عنصرٌ $r > 0$ بحيث تكون A محتواةً في الكرة المغلقة $\overline{\mathcal{B}}(0,r)$ في $\mathbb{k}^m$. يمكننا التوثّق بسهولة أنّ $\overline{\mathcal{B}}(0,r) = \prod_{k=1}^{m} \overline{B}(0,r)$ حيث $\overline{B}(0,r)$ هي الكرة المغلقة التي مركزها 0 ونصف قطرها r في الفضاء $\left(\mathbb{k}, |\cdot|\right)$، وهي من ثَمّ مجموعة متراصّة. وباستخدام النتيجة الأخيرة نجد أنّ $\overline{\mathcal{B}}(0,r)$ متراصّة، ولمّا كانت A مجموعة مغلقة محتواة في المجموعة المتراصّة $\overline{\mathcal{B}}(0,r)$ فهي إذن متراصّة. ■

6. النهايات والاستمرار في الفضاءات الشعاعيّة المنظّمة

تعريف 14. ليكن $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$، و $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ فضاءين شعاعيّين منظّمين على $\mathbb{k}$، ولتكن A مجموعة غير خالية من E، وليكن التابع $f : A \to F$. لتكن a نقطة لاصقة

بالمجموعة A و $l \in F$. نقول إنّ f يقبل l **نهايةً** له عند a، ونكتب $\lim_a f = l$ أو $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$، إذا وفقط إذا تحقّق الشرط الآتي: مهما كانت المتتالية (x_n) من عناصر A المتقاربة من a، كانت المتتالية $\left(f(x_n)\right)$ متقاربةً من l.

مبرهنة 14. ليكن $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$، و $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ فضاءين شعاعيّين منظّمين على $\mathbb{k}$، ولتكن A مجموعة غير خالية من E، وليكن التابعان $f_1, f_2 : A \to F$. لتكن a نقطة لاصقة بالمجموعة A و $l_1, l_2 \in F$، و $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{k}$. نفترض أنّ $\lim_a f_1 = l_1$ و $\lim_a f_2 = l_2$، عندئذٍ يتحقّق

$$\lim_a(\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2) = \lambda_1 \cdot l_1 + \lambda_2 \cdot l_2$$

الإثبات

لتكن (x_n) متتالية من عناصر A المتقاربة من a، إنّ $\left(f_1(x_n)\right)$ متقاربة من l_1، و $\left(f_2(x_n)\right)$ متقاربة من l_2، وعليه تتقارب المتتالية $\left(\lambda_1 \cdot f_1(x_n) + \lambda_2 \cdot f_2(x_n)\right)$ من $\lambda_1 \cdot l_1 + \lambda_2 \cdot l_2$، ومنه نستنتج أنّ $\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2$ يقبل $\lambda_1 \cdot l_1 + \lambda_2 \cdot l_2$ نهايةً له عند a وهو المطلوب إثباته.

مبرهنة 15. لتكن $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$، و $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$، و $\left(G, \|\cdot\|_G\right)$ ثلاثة فضاءات شعاعيّة منظّمة على $\mathbb{k}$، ولتكن A و B مجموعتين غير خاليتين من E و F على الترتيب. ليكن التابعان $f : A \to B$، و $g : B \to G$. لتكن أخيرًا a نقطة لاصقة بالمجموعة A، نفترض أنّ $\lim_a f = b$. عندئذٍ تكون b نقطة لاصقة بالمجموعة B، وإذا كان $\lim_b g = c$، كان $\lim_a (g \circ f) = c$.

الإثبات

توجد متتالية (x_n) من عناصر A متقاربة من a، إنّ $\left(f(x_n)\right)$ متتالية من عناصر B متقاربة من b، ومنه b لاصقة بالمجموعة B، ومن ثمّ فإنّ المتتالية $\left(g\left(f(x_n)\right)\right)$ متقاربة من c. إذن $g \circ f$ يقبل c نهايةً له عند a، وبذلك يكتمل إثبات المبرهنة. ■

تعريف 15. ليكن $\left(E,\|\cdot\|_E\right)$، و $\left(F,\|\cdot\|_F\right)$ فضاءين شعاعيّين منظّمين على $\mathbb{k}$، ولتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من E، وليكن التابع $f : A \to F$ و $a \in A$. نقول إنّ f **مستمرّ عند** a إذا وفقط إذا قَبِل $f(a)$ نهايةً له عند a أي $\lim\limits_{a} f = f(a)$.

ونقول إنّ f **مستمرّ** على A إذا وفقط إذا كان f مستمرًّا عند كلّ عنصرٍ a من A.

كما نقول إنّ f **مستمرّ بانتظام** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط الآتي: إذا كانت (x_n) و (y_n) متتاليتين من عناصر A بحيث $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n - y_n\right) = 0$، كانت المتتالية $\left(f(x_n) - f(y_n)\right)$ متقاربة من الصفر.

ونقول أيضًا، إنّ f يحقّق **شرط ليبشتز** إذا وفقط إذا، وُجد عدد حقيقيّ موجب K بحيث:

$$\forall (x,y) \in A^2, \left\|f(x) - f(y)\right\|_F \le K \cdot \left\|x - y\right\|_E$$

مبرهنة 16. ليكن $\left(E,\|\cdot\|_E\right)$، و $\left(F,\|\cdot\|_F\right)$ فضاءين شعاعيّين منظّمين على $\mathbb{k}$، ولتكن A مجموعة غير خالية من E، وليكن التابع $f : A \to F$. إنّ القضيّتين الآتيتين صحيحتان :

1. إذا كان f مستمرًا بانتظام، كان مستمرًّا.
2. إذا حقّق f شرط ليبشتز، كان مستمرًّا بانتظام.

الإثبات

1. نفترض أنّ f مستمرّ بانتظام. ليكن a عنصرًا من A، ولتكن (x_n) متتالية من عناصر A متقاربة من a. لتكن المتتالية الثابتة $(y_n = a)$، إنّ $(x_n - y_n)$ متقاربة من الصفر، ولمّا كان f مستمرًّا بانتظام فإنّ المتتالية $\left(f(x_n) - f(y_n)\right)$ أو $\left(f(x_n) - f(a)\right)$ متقاربة من الصفر، ومن ثَمّ f مستمرّ عند a، ومنه f مستمرّ على A.

2. نفترض أنّ f يحقّق شرط ليبشتز، عندئذٍ يوجد عدد حقيقيّ موجب K بحيث: $\forall(x,y) \in A^2, \left\|f(x)-f(y)\right\|_F \leq K \cdot \left\|x-y\right\|_E$. لتكن المتتاليتان (x_n) و (y_n) من عناصر A بحيث $(x_n - y_n)$ متقاربة من الصفر.

إنّ المتراجحة $\forall n \in \mathbb{N}, \left\|f(x_n)-f(y_n)\right\|_F \leq K \cdot \left\|x_n - y_n\right\|_E$، تضمن تقارب المتتالية $\left(f(x_n)-f(y_n)\right)$ من الصفر، وهذا يُثبت أنّ f مستمرّ بانتظام.

■

ملاحظة 4. إنّ الاقتضاءين المعاكسين خاطئين في المبرهنة السابقة، وهذا ما يبيّنه المثالان

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. إنّ f مستمرّ على $\mathbb{R}$. لتكن المتتاليتان $(x_n = n)$ و $\left(y_n = n + \dfrac{1}{n}\right)$، لدينا $(x_n - y_n)$ متقاربة من الصفر، ولكن $\left(f(x_n)-f(y_n)\right)$ غير متقاربة من الصفر. إذن f غير مستمرّ بانتظام.

2. $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرّ بانتظام لأنّه مستمرّ على مجال مغلق ومحدود، ولكنّه لا يحقّق شرط ليبشتز، فلو افترضنا وجود عدد حقيقيّ موجب K بحيث:

$$\forall x \in [0,1], \left|\sqrt{x}-\sqrt{0}\right| \leq K \cdot \left|x-0\right|$$

لكان $\forall x \in]0,1], 1 \leq K \cdot \sqrt{x}$، وبأخذ النهاية من اليمين عند الصفر لطرفي المتراجحة نصل إلى التناقض $1 \leq 0$. إذن f لا يحقق شرط ليبشتز.

للمبرهنة الآتية أهميّة كبيرة في تعرُّف كثير من المجموعات المفتوحة والمجموعات المغلقة.

مبرهنة 17. ليكن $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$، و $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ فضاءين شعاعيّين منظّمين على $\mathbb{k}$ و $B \subset F$، وليكن $f : E \to F$ تابعًا مستمرًّا. عندئذٍ:

1. إذا كانت B مغلقة، كانت $f^{-1}(B)$ مغلقة.
2. إذا كانت B مفتوحة، كانت $f^{-1}(B)$ مفتوحة.

الإثبات

1. لتكن (x_n) متتالية من عناصر $f^{-1}(B)$ متقاربة من $x \in E$. لمّا كان f مستمرًّا، فإنّ $(f(x_n))$ متقاربة من $f(x)$، ولكن B مغلقة إذن $f(x) \in B$ ومنه $x \in f^{-1}(B)$، ومن ثمّ $f^{-1}(B)$ مغلقة.
2. إذا كانت B مفتوحة كانت $F \setminus B$ مغلقة، وكانت $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$ مغلقة في E، ومن ثمّ $f^{-1}(B)$ مفتوحة في E. ■

مبرهنة 18. ليكن $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$، و $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ فضاءين شعاعيّين منظّمين على $\mathbb{k}$، ولتكن A مجموعة متراصّة غير خالية من E، وليكن $f : A \to F$ تابعًا مستمرًّا. عندئذٍ يتحقّق ما يأتي

1. $f(A)$ مجموعة متراصّة في F.
2. f مستمرّ بانتظام.
3. عندما $F = \mathbb{R}$، فإنّ f يبلغ حدّيه الأعلى والأدنى على A. أي يوجد عنصران a, b من A بحيث $\forall x \in A, f(a) \le f(x) \le f(b)$، أو بشكلٍ مكافئ:

$$f(a) = \inf_{x \in A} f(x), f(b) = \sup_{x \in A} f(x)$$

الإثبات

1. لتكن $(y_n = f(x_n))$ متتالية من عناصر $f(A)$ حيث (x_n) متتالية من عناصر A، ولمّا كانت A متراصّة فإنّنا نجد متتالية جزئيّة $(x_{\varphi(n)})$ متقاربة من عنصرٍ $a \in A$، ولمّا كان f مستمرًّا فإنّ $\left(f(x_{\varphi(n)})\right)$ متقاربة من $f(a)$ وهو عنصرٌ من $f(A)$، وهذا يُثبت أنّ $f(A)$ متراصّة.
2. نفترض أنّ f غير مستمرّ بانتظام، توجد عندئذٍ متتاليتان $(x_n), (y_n)$ من عناصر A بحيث يكون $\lim_{n \to \infty} (x_n - y_n) = 0$، ولا تتقارب المتتالية $\left(f(x_n) - f(y_n)\right)$

من الصفر. يوجد إذن، $\varepsilon_0 > 0$ بحيث يتحقّق الشرط: مهما يكن العدد الطبيعي n يوجد عدد طبيعي $\varphi(n) > n$ بحيث $\left\|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\right\|_F \geq \varepsilon_0$. نضع $a_n = x_{\varphi(n)}, b_n = y_{\varphi(n)}$. إنّ $(a_n),(b_n)$ متتاليتان من عناصر A تحققان $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ ويتحقّق $\left\|f(a_n) - f(b_n)\right\|_F \geq \varepsilon_0$. لمّا كانت A متراصّة، فإنّنا نجد تابعًا متزايدًا تمامًا $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ بحيث تتقارب المتتالية $(a_{\psi(n)})$ من عنصرٍ $a \in A$، ومن ثمّ تتقارب المتتالية $(b_{\psi(n)})$ من a، وذلك بسبب المساواة $b_{\psi(n)} = a_{\psi(n)} + (b_{\psi(n)} - a_{\psi(n)})$ ولمّا كان f مستمرًّا كانت المتتاليتان $\left(f(a_{\psi(n)})\right),\left(f(b_{\psi(n)})\right)$ متقاربتين من $f(a)$، ومن ثمّ فإنّ $\left(f(a_{\psi(n)}) - f(b_{\psi(n)})\right)$ متقاربة من الصفر، وهذا يتناقض مع المتراجحة $\left\|f(a_{\psi(n)}) - f(b_{\psi(n)})\right\|_F \geq \varepsilon_0$. نستنتج إذن أنّ f مستمرّ بانتظام.

3. في هذه الحالة تكون $f(A)$ مجموعةً متراصّة من $\mathbb{R}$ فهي محدودة، ومن ثمّ توجد متتاليتان $\left(f(a_n)\right)$ و $\left(f(b_n)\right)$ من عناصر $f(A)$ متقاربتان من $\inf f(A), \sup f(A)$ على الترتيب، ولمّا كانت A متراصّة استطعنا إيجاد متتاليتين جزئيّتين $(a_{\varphi(n)}),(b_{\psi(n)})$ متقاربتين من a,b على الترتيب. ولأنّ f مستمرّ نستنتج أنّ المتتاليتين $\left(f(a_{\varphi(n)})\right),\left(f(b_{\psi(n)})\right)$ متقاربتان من $f(a), f(b)$ على الترتيب، ومنه $\inf f(A) = f(a)$ و $\sup f(A) = f(b)$ وهذا بالضبط ما نودّ إثباته.

■

7. التطبيقات الخطّيّة المستمرّة بين الفضاءات الشعاعيّة المنظّمة

مبرهنة 19. ليكن $\left(E,\|\cdot\|_E\right)$ و $\left(F,\|\cdot\|_F\right)$ فضاءين شعاعيّين منظّمين على $\mathbb{k}$، و f تطبيق خطّيّ من E إلى F أي $f \in \mathcal{L}(E,F)$. نفترض أنّ f مستمرّ عند 0_E، يوجد عندئذٍ، عددٌ حقيقيّ K بحيث $\forall x \in E, \left\|f(x)\right\|_F \leq K \cdot \|x\|_E$.

الإثبات

نفترض عدم وجود عددٍ حقيقيّ موجب K يحقّق $\forall x \in E, \left\| f(x) \right\| \le K \cdot \left\| x \right\|$ ، عندئذٍ يكون التابع $x \mapsto \dfrac{\left\| f(x) \right\|_F}{\left\| x \right\|_E}$ غير محدود من الأعلى على $E \setminus \{0_E\}$ ، وتوجد من ثَمّ متتالية (a_n) من عناصر $E \setminus \{0_E\}$ بحيث يكون $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left\| f(a_n) \right\|_F}{\left\| a_n \right\|_E} = +\infty$.

وبوضع $x_n = \dfrac{a_n}{\left\| a_n \right\|_E}$ ، نلاحظ أنّ (x_n) متتالية من عناصر الكرة الواحديّة المغلقة في E بحيث تسعى المتتالية $\left(\left\| f(x_n) \right\|_F \right)$ إلى $+\infty$ ، فهي غير معدومة بدءًا من حدّ $n_0 \in \mathbb{N}$.

نعرّف الآن المتتالية (y_n) بالصيغة $y_n = \dfrac{x_{n+n_0}}{\left\| f(x_{n+n_0}) \right\|_F}$. إنّ (y_n) متتالية من عناصر E متقاربة من 0_E ولكن المتتالية $(f(y_n))$ غير متقاربة من $0_F = f(0_E)$ لأنّ $\left\| f(y_n) \right\|_F = 1$ ، وهذا يناقض استمرار f عند 0_E ، ومنه نستنتج وجود عددٍ حقيقيّ موجب K يحقّق $\forall x \in E, \left\| f(x) \right\| \le K \cdot \left\| x \right\|$. ■

تمكّننا المبرهنة السابقة من إثبات النتائج الواردة في المبرهنة الآتية دون عناء.

مبرهنة 20. ليكن $\left(E, \left\| \cdot \right\|_E\right)$ و $\left(F, \left\| \cdot \right\|_F\right)$ فضاءين شعاعيّين منظّمين على $\mathbb{k}$ ، و f تطبيق خطّيّ من E إلى F أي $f \in \mathcal{L}(E,F)$. إنّ القضايا الثلاث الآتية متكافئة

1. f مستمرّ عند 0_E .
2. f مستمرّ على E .
3. يوجد عددٌ حقيقيّ K بحيث $\forall x \in E, \left\| f(x) \right\|_F \le K \cdot \left\| x \right\|_E$.

نرمز بالرمز $\mathcal{L}_c(E,F)$ إلى مجموعة التطبيقات الخطّيّة المستمرّة من E إلى F .

مبرهنة 21. ليكن $\left(E,\left\|\cdot\right\|_E\right)$ و $\left(F,\left\|\cdot\right\|_F\right)$ فضاءين شعاعيّين منظّمين على $\mathbb{k}$، نعرّف على الفضاء الشعاعيّ $\mathcal{L}_c(E,F)$ التطبيق $\left\|\cdot\right\|$ بالشكل الآتي: مهما يكن f من $\mathcal{L}_c(E,F)$ فإنّ $\left\|f\right\|=\sup\limits_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}}\dfrac{\left\|f(x)\right\|_F}{\left\|x\right\|_E}$. إنّ التطبيق $\left\|\cdot\right\|$ يعرّف نظيمًا على $\mathcal{L}_c(E,F)$.

نسمّي هذا النظيم **نظيم التطبيقات الخطّيّة المستمرّة** من E إلى F.

الإثبات

ليكن $f\in\mathcal{L}_c(E,F)$ بحيث $\left\|f\right\|=0$، عندئذٍ إذا كان $x\in E\setminus\{0_E\}$ كان $\left\|f(x)\right\|_F\leq 0\times\left\|x\right\|_E$، وهذا يعني أنّ f معدوم.

من جهةٍ أخرى، إذا كان $f\in\mathcal{L}_c(E,F)$ و $\lambda\in\mathbb{k}$ فإنّ $\left\|\lambda\cdot f\right\|=\left|\lambda\right|\cdot\left\|f\right\|$. أخيرًا ليكن f و g من الفضاء $\mathcal{L}_c(E,F)$، نأخذ الحدّ الأعلى لطرفيّ المتراجحة

$$\frac{\left\|f(x)+g(x)\right\|_F}{\left\|x\right\|_E}\leq\frac{\left\|f(x)\right\|_F+\left\|g(x)\right\|_F}{\left\|x\right\|_E}$$

فنجد أنّ $\left\|f+g\right\|\leq\left\|f\right\|+\left\|g\right\|$. بذلك نكون قد أثبتنا أنّ التطبيق $\left\|\cdot\right\|$ يعرّف نظيمًا على $\mathcal{L}_c(E,F)$. ■

فيما يلي نُجمل أهم خواصّ النظيم السابق.

مبرهنة 22. لتكن $\left(E,\left\|\cdot\right\|_E\right)$، و $\left(F,\left\|\cdot\right\|_F\right)$، و $\left(G,\left\|\cdot\right\|_G\right)$ ثلاثة فضاءات شعاعيّة منظّمة على $\mathbb{k}$، وليكن $f\in\mathcal{L}_c(E,F)$ و $g\in\mathcal{L}_c(F,G)$، عندئذٍ:

1. إذا حقّق العدد الحقيقيّ M الشرط $\forall x\in E,\left\|f(x)\right\|_F\leq M\cdot\left\|x\right\|_E$، كان $\left\|f\right\|\leq M$.
2. أيًّا يكن $x\in E$، فإنّ $\left\|f(x)\right\|_F\leq\left\|f\right\|\cdot\left\|x\right\|_E$.
3. $\left\|g\circ f\right\|\leq\left\|g\right\|\cdot\left\|f\right\|$.

الإثبات

إنّ إثبات $(.1)$ و$(.2)$ بسيط للغاية، وذلك بالاستفادة من حقيقة أنّ الحدّ الأعلى لمجموعة محدودة من الأعلى وغير خالية هو أصغر العناصر الراجحة عليها.

3. ليكن x من E عندئذٍ يكون

$$\left\|g\left(f(x)\right)\right\|_G \leq \|g\| \cdot \|f(x)\|_F \leq \left(\|g\| \cdot \|f\|\right) \cdot \|x\|_E$$

وحسب $(.1)$ نجد أنّ $\|g \circ f\| \leq \|g\| \cdot \|f\|$. ■

تمرين: أثبت أنّه إذا كان $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ ، فإنّ

$$\|f\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F$$

مبرهنة 23. ليكن $\left(E, \|\cdot\|_E\right)$ و $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ فضاءين شعاعيّين منظّمين على $\mathbb{k}$ ، نفترض أنّ $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ تامّ، عندئذٍ يكون الفضاء الشعاعيّ المنظّم $\left(\mathcal{L}_c(E,F), \|\cdot\|\right)$ تامًّا أيضًا.

الإثبات

لتكن (f_n) متتاليةً من عناصر $\mathcal{L}_c(E,F)$ تحقّق شرط كوشي. ليكن $x \in E$ ، نعلم من المتراجحة $\|f_n(x) - f_m(x)\|_F \leq \|f_n - f_m\| \cdot \|x\|_E$ أنّ المتتالية $\left(f_n(x)\right)$ تحقّق شرط كوشي في $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ فهي متقاربة لأنّ $\left(F, \|\cdot\|_F\right)$ تامّ. نعرّف التطبيق $f : E \to F, x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ الذي نتحقّق بسهولة أنّه خطّيّ. من جهةٍ أخرى، لمّا كانت المتتالية (f_n) تحقّق شرط كوشي فهي محدودة، ويوجد من ثمّ عدد حقيقيّ M بحيث $\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\| \leq M$ ، وبجعلِ n تسعى إلى $+\infty$ في المتراجحة

$$\forall x \in E, \|f_n(x)\|_F \leq \|f_n\| \cdot \|x\|_E \leq M \cdot \|x\|_E$$

نستنتج أنّ $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M \cdot \|x\|_E$ ، ومن ثَمّ f خطّي مستمرّ فهو عنصر من الفضاء $\mathcal{L}_c(E,F)$.

ليكن $0 < \varepsilon$، يوجد $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث يقتضي الشرطُ $m \geq n \geq n_0$ الشرطَ $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$. ليكن الآن x من E ، لدينا

$$m \geq n \geq n_0 \Rightarrow \left\| f_n(x) - f_m(x) \right\|_F \leq \left\| f_n - f_m \right\| \cdot \left\| x \right\|_E \leq \varepsilon \cdot \left\| x \right\|_E$$

وبجَعلِ m تسعى إلى $+\infty$ نجد أنّ $n \geq n_0 \Rightarrow \left\| f_n(x) - f(x) \right\|_F \leq \varepsilon \cdot \left\| x \right\|_E$ ، ومنه نستنتج أنّ

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left\| f_n - f \right\| \leq \varepsilon$$

وهذا يُثبت أنّ (f_n) متقاربة من f ، ومن ثمّ فالفضاء $\left(\mathcal{L}_c(E,F), \left\| \cdot \right\|\right)$ تامّ. ■

مبرهنة 24. ليكن $\left(E, \left\| \cdot \right\|_E\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا وتامًّا على $\mathbb{k}$ ، عندئذٍ تكون عناصر الكرة المفتوحة $B\left(I_E, 1\right)$ في الفضاء الشعاعيّ المنظّم $\left(\mathcal{L}_c(E,E), \left\| \cdot \right\|\right)$ قلوبةً في $\mathcal{L}_c(E,E)$.

الإثبات

يكفي أن نثبت أنّ كلّ عنصر من النمط $I_E - f$ ، حيث f عنصر من $\mathcal{L}_c(E,E)$ نظيمه $\left\| f \right\| < 1$ ، قلوبٌ. ليكن إذن f عنصرًا من $\mathcal{L}_c(E,E)$ يحقّق $\left\| f \right\| < 1$ ، ولتكن (S_n) المتتالية من عناصر $\mathcal{L}_c(E,E)$ المعرّفة كما يأتي:

$$S_n = I_E + f + f^2 + \cdots + f^n$$

يتبيّن لنا من المتراجحة $\left\| f^k \right\| \leq \left\| f \right\|^k$ أنّ المتسلسلة $\left(\sum f^n\right)$ متقاربة بالنظيم فهي متقاربة في الفضاء $\left(\mathcal{L}_c(E,F), \left\| \cdot \right\|\right)$ لأنّه تامّ.

نضع $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n \in \mathcal{L}_c(E,E)$. لدينا:

$$(I_E - f) \circ S_n - I_E = S_n \circ (I_E - f) - I_E = -f^{n+1}$$

ومنه

$$(I_E - f) \circ S - I_E = (I_E - f) \circ (S - S_n) - f^{n+1}$$
$$S \circ (I_E - f) - I_E = (S - S_n) \circ (I_E - f) - f^{n+1}$$

وبجعل n تسعى إلى $+\infty$ مستفيدين من المتراجحتين:

$$\left\|(I_E - f)\circ(S - S_n)\right\| \le \left\|I_E - f\right\|\cdot\left\|S - S_n\right\|$$
$$\left\|(S - S_n)\circ(I_E - f)\right\| \le \left\|I_E - f\right\|\cdot\left\|S - S_n\right\|$$

نجد أنّ $0 = (I_E - f)\circ S - I_E = S\circ(I_E - f) - I_E$، ومن ثَمّ $(I_E - f)$ قلوب ومقلوبه S. ■

8. الفضاءات الشعاعيّة المنظّمة المنتهيةُ البعد

مبرهنة 25. ليكن $\left(E,\left\|\cdot\right\|_E\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا بُعده $m \in \mathbb{N}^*$ على $\mathbb{k}$، وليكن $(e_1, e_2, \cdots, e_m)$ أساسًا في E. نزوّد $\mathbb{k}^m$ بالنظيم $\left\|\cdot\right\|_\infty$ المعروف. إنّ التطبيق الخطّيّ

$$\phi : \mathbb{k}^m \to E, x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \mapsto \sum_{k=1}^{m} x_k e_k$$

تقابلٌ مستمرّ هو وتقابله العكسي ϕ^{-1}.

الإثبات

يمكننا بسهولة التحقّق من أنّ ϕ تقابل خطّيّ وذلك بملاحظة أنّه خطّيّ ومتباين بين فضاءين شعاعيّين لهما البعد المنتهي نفسه m. لنثبت أنّ ϕ مستمرّ. ليكن $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in E$ لدينا

$$\left\|\phi(x)\right\|_E = \left\|\phi(\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot e_i)\right\|_E = \left\|\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \phi(e_i)\right\|_E$$
$$\le \sum_{i=1}^{m}\left|x_i\right|\cdot\left\|\phi(e_i)\right\|_E \le \left(\sum_{i=1}^{m}\left\|\phi(e_i)\right\|_E\right)\cdot\left\|x\right\|_\infty$$

ومنه ϕ مستمرّ.

من جهةٍ أخرى، ليكن التطبيق $\psi : \mathbb{k}^m \to \mathbb{R}, x \mapsto \left\|\phi(x)\right\|_E$. إنّ ψ مستمرّ على $\mathbb{k}^m$ لأنّه تركيب تطبيقين مستمرّين هما ϕ و $\left\|\cdot\right\|_E$، ولمّا كانت المجموعة $S(0,1)$ مغلقةً ومحدودةً في $\left(\mathbb{k}^m,\left\|\cdot\right\|_\infty\right)$ فهي متراصّة، ومن ثمّ فإنّ التابع المستمرّ ψ يبلغ حدّيه الأعلى والأدنى على

هذه المجموعة، فيوجد إذن، عنصران a و b من $S(0,1)$ بحيث $\forall x \in E, \|x\|_\infty = 1 \Rightarrow \alpha = \psi(a) \leq \psi(x) \leq \psi(b) = \beta$ ، وعليه

$$\forall x \in \mathbb{k}^m \setminus \{0\}, \alpha \leq \psi\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) = \left\|\phi\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right)\right\|_E \leq \beta$$

ومن ثَمّ $\forall x \in \mathbb{k}^m, \alpha \cdot \|x\|_\infty \leq \|\phi(x)\|_E \leq \beta \cdot \|x\|_\infty$.

إنّ $\|\phi(a)\|_E = \alpha > 0$ لأنّ ϕ متباين، فإذا وضعنا $y = \phi(x)$ في المتراجحة اليسرى، وجدنا أنّ $\forall y \in E, \|\phi^{-1}(y)\|_\infty \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \|y\|_E$ ، وهذا يُثبت أنّ ϕ^{-1} تطبيقٌ خطّيٌ مستمرّ.

■

مبرهنة 26. ليكن $(E, \|\cdot\|_E)$ و $(F, \|\cdot\|_F)$ فضاءين شعاعيّين منظّمين على $\mathbb{k}$ نفترض أنّ E منتهي البعد وأنّ $\dim E = m \in \mathbb{N}^*$ ، عندئذٍ:

1. الفضاء $(E, \|\cdot\|_E)$ تامّ.
2. كلّ مجموعة مغلقة ومحدودة في $(E, \|\cdot\|_E)$ متراصّة.
3. كلّ تطبيق $f \in \mathcal{L}(E, F)$ مستمرّ.
4. كلّ النظم على E متكافئة.

الإثبات

نزوّد $\mathbb{k}^m$ بالنظيم $\|\cdot\|_\infty$. ليكن $(e_1, e_2, \cdots, e_m)$ أساسًا في E ، نعلم أنّ التطبيق

$$\phi : \mathbb{k}^m \to E, x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \mapsto \sum_{k=1}^{m} x_k e_k$$

تقابل مستمرّ هو وتقابله العكسي ϕ^{-1} .

1. لتكن $(y_n = \phi(x_n))$ متتالية من عناصر E تحقّق شرط كوشي. من المتراجحة

$$\|x_n - x_m\|_\infty = \|\phi^{-1}(y_n) - \phi^{-1}(y_m)\|_\infty \leq \|\phi^{-1}\| \cdot \|y_n - y_m\|_E$$

نستنتج أنّ (x_n) تحقّق شرط كوشي في الفضاء المنظّم التامّ $\left(\mathbb{k}^m,\left\|\cdot\right\|_\infty\right)$، فهي إذن متقاربة من عنصر $x \in \mathbb{k}^m$، ولمّا كان ϕ مستمرًّا كانت المتتالية $(y_n = \phi(x_n))$ متقاربة من $\phi(x)$. إذن $\left(E,\left\|\cdot\right\|_E\right)$ تامّ.

2. لتكن A مجموعة مغلقة ومحدودة في الفضاء الشعاعيّ المنظّم $\left(E,\left\|\cdot\right\|\right)$. لمّا كانت A محدودة فإنّنا نجد عددًا حقيقيًّا M بحيث $\forall y \in A, \left\|y\right\| \leq M$، ومنه

$$\forall x \in \phi^{-1}(A), \left\|x\right\|_\infty = \left\|\phi^{-1}\left(\phi(x)\right)\right\|_\infty \leq \left\|\phi^{-1}\right\| \cdot \left\|\phi(x)\right\|_E \leq \left\|\phi^{-1}\right\| \cdot M$$

وعليه فإنّ $\phi^{-1}(A)$ محدودة. من جهةٍ أخرى، لتكن (x_n) متتالية من عناصر $\phi^{-1}(A)$ متقاربة من عنصر $x \in \mathbb{k}^m$، عندئذٍ تتقارب المتتالية $\left(\phi(x_n)\right)$ من $\phi(x) \in A$ لأنّ ϕ مستمرّ و A مغلقة، وعليه فإنّ $x \in \phi^{-1}(A)$، ومنه $\phi^{-1}(A)$ مغلقة. نستنتج ممّا سلف أنّ $\phi^{-1}(A)$ مغلقة ومحدودة في الفضاء $\left(\mathbb{k}^m,\left\|\cdot\right\|_\infty\right)$ فهي متراصّة، ولما كان ϕ مستمرًّا و $A = \phi\left(\phi^{-1}(A)\right)$، فإنّنا نستنتج أنّ A متراصّة في $\left(E,\left\|\cdot\right\|\right)$.

3. ليكن $f \in \mathcal{L}(E,F)$. نضع $g = f \circ \phi$، وليكن $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in \mathbb{k}^m$، لدينا

$$\begin{aligned}\left\|g(x)\right\|_E &= \left\|f\left(\sum_{k=1}^{m} x_k e_k\right)\right\|_E = \left\|\sum_{k=1}^{m} x_k f(e_k)\right\|_E \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} \left|x_k\right| \left\|f(e_k)\right\|_E \leq \left(\sum_{k=1}^{m} \left\|f(e_k)\right\|_E\right) \left\|x\right\|_\infty\end{aligned}$$

وهذا يُثبت أنّ g مستمرّ، ولمّا كان ϕ^{-1} مستمرًّا استنتجنا أنّ $f = g \circ \phi^{-1}$ مستمرّ، وهو المطلوب إثباته.

4. ليكن N_1, N_2 نظيمين على E. ليكن $I_E : (E, N_1) \to (E, N_2)$ التطبيق المطابق على E حيث زوّدنا المنطلق بالنظيم N_1 والمستقرّ بالنظيم N_2. إنّ هذا التطبيق مستمرّ لأنّه خطّي ومنطلقه منتهي البعد فيوجد ثابت موجب تمامًا β بحيث $\forall x \in E, N_2(x) \leq \beta \cdot N_1(x)$. وبشكلٍ مماثل يوجد ثابت موجب تمامًا α بحيث $\forall x \in E, N_1(x) \leq \alpha \cdot N_2(x)$، ومنه

$\forall x \in E, \dfrac{1}{\alpha} N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$ وهذا يعني يعني أنّ N_1 و N_2 متكافئان. ■

مبرهنة 27. نزوّد $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ بنظيم التطبيقات الخطّيّة المستمرّة $\|\cdot\|$. لتكن $\Omega = \mathcal{GL}(\mathbb{R}^n)$ مجموعة (زمرة) التقابلات الخطّيّة من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}^n$. إنّ Ω مجموعة مفتوحة في $\left(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|\right)$، والتطبيق $Inv : \Omega \to \Omega, A \mapsto A^{-1}$ مستمرّ على Ω.

الإثبات

ليكن $A \in \Omega$ و $\left\|A^{-1}\right\| = \dfrac{1}{\alpha}$. سنثبت أنّ الكرة المفتوحة التي مركزها A ونصف قطرها α محتواة في Ω.

ليكن $B \in \Omega$، بحيث $\|A - B\| < \alpha$. لدينا.

$$\left\|I - A^{-1} \circ B\right\| = \left\|A^{-1} \circ (A - B)\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \left\|A - B\right\| < \frac{\alpha}{\alpha} = 1$$

نستنتج أنّ التطبيق $A^{-1} \circ B$ تقابل، ومن ثمّ فإنّ B تقابل أو $B \in \Omega$.

ممّا سبق نجد أنّ $B(A, \alpha) \subset \Omega$. إذن Ω مجموعة مفتوحة في $\left(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|\right)$.

من جهةٍ أخرى، لدينا

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha\|x\| = \alpha\left\|A^{-1} \circ A(x)\right\| \leq \alpha\left\|A^{-1}\right\|\left\|A(x)\right\| = \left\|A(x)\right\|$$

ليكن $B \in \Omega$ بحيث $\beta = \|A - B\| < \alpha$. لدينا

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha\left\|x\right\| &\leq \left\|A(x)\right\| \\ &\leq \left\|A(x)-B(x)\right\| + \left\|B(x)\right\| \\ &\leq \beta\left\|x\right\| + \left\|B(x)\right\|\end{aligned}$$

ومنه

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, (\alpha-\beta)\left\|x\right\| \leq \left\|B(x)\right\|$$

فإذا وضعنا $x = B^{-1}(y)$ وجدنا

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, (\alpha-\beta)\left\|B^{-1}(y)\right\| \leq \left\|B^{-1}\circ B(y)\right\| = \left\|y\right\|$$

نستنتج من المتراجحة الأخيرة أنّ $\left\|B^{-1}\right\| \leq \dfrac{1}{\alpha-\beta}$. ومنه

$$\begin{aligned}\left\|Inv(A)-Inv(B)\right\| &= \left\|A^{-1}-B^{-1}\right\| \\ &= \left\|A^{-1}\circ(B-A)\circ B^{-1}\right\| \\ &\leq \left\|A^{-1}\right\|\cdot\left\|B-A\right\|\cdot\left\|B^{-1}\right\| \\ &\leq \frac{\beta}{\alpha(\alpha-\beta)}\end{aligned}$$

وعندما يسعى B إلى A ، فإنّ β يسعى إلى الصفر، و $Inv(B)$ يسعى إلى $Inv(A)$ ، ومنه Inv مستمرّ عند A . ممّا سبق نستنتج أنّ Inv مستمرّ على Ω، وهو المطلوب إثباته. ■

تمرينات ومسائل

التمرين 1. عيّن الشرط اللازم والكافي على $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ حتّى يعرّف التطبيق المعرّف بالعلاقة $N(x,y)=\sqrt{\alpha x^2+\beta y^2}$ نظيمًا على $\mathbb{R}^2$. ماذا تمثّل الكرةُ الواحديّة في هذه الحالة؟

التمرين 2. لتكن A و B مجموعتين حقيقيتين غير خاليتين. نعرّف المجموعتين

$$A+B=\left\{a+b : a\in A, b\in B\right\}$$

$$A-B=\left\{a-b : a\in A, b\in B\right\}$$

1. أثبت أنّ $\sup\left(A\cup B\right)=\max\left(\sup A,\sup B\right)$. ماذا عن $\sup\left(A\cap B\right)$؟
2. أثبت أنّ $\sup\left(A+B\right)=\sup A+\sup B$. ماذا عن $\sup\left(A-B\right)$؟

التمرين 3. ليكن $E=\mathcal{C}([0,1])$، وليكن $h\in E$. نعرّف التابع $N_h : E\to\mathbb{R}$ بالصيغة $N_h(f)=\sup\left\{\left|f(x)h(x)\right| : x\in[0,1]\right\}$.

1. جدْ شرطًا لازمًا وكافيًا حتّى يكون N_h نظيمًا على E.
2. متى يكون النظيمان $\left\|\cdot\right\|_\infty$ و N_h متكافئين؟

التمرين 4. ليكن $E=\mathcal{C}\left([0,1],\mathbb{R}\right)$ فضاء التوابع الحقيقيّة المستمرّة على المجال $[0,1]$. نزوّد E بالنظيم $\left\|\cdot\right\|_\infty$. ولتكن $A=\left\{f\in E : f(0)\geq 0\right\}$. عيّن داخل ولصاقة المجموعة A.

التمرين 5. عيّن داخل ولصاقة كلّ من المجموعات الآتية في الفضاء الشعاعي المنظّم $\left(\mathbb{R}^2,\left\|\cdot\right\|_\infty\right)$:

$\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 : \left\lvert x\right\rvert\neq 1,\left\lvert y\right\rvert\neq 1\right\}$	$\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y=0\right\}$
$\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0, y=\dfrac{1}{x^2}\right\}$	$\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 0, y=\sin\dfrac{1}{x}\right\}$

$\mathbb{R}\times\mathbb{Q}$	$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y+y^2<1\right\}$
$\mathbb{Q}\times\{0\}$	$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \lvert x\rvert=y^2\right\}$

التمرين 6. ليكن $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ فضاء التوابع الحقيقيّة القابلة للاشتقاق ومشتقّها مستمرّ على $[0,1]$. و $E=\left\{f\in\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) : f(0)=0\right\}$. نعرّف التطبيقين N_1 و N_2 على E بالصيغتين التاليتين: $N_1(f)=\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty$ و $N_2(f)=\|f+f'\|_\infty$.

1. أثبت أنّ N_1 نظيم على E.
2. إذا كان $f\in E$، أثبت أنّ
$$\forall x\in[0,1], f(x)=e^{-x}\int_0^x e^t\left(f(t)+f'(t)\right)\mathrm{dt}$$
3. أثبت أنّ N_2 نظيم على E.
4. أثبت أنّ N_1 و N_2 متكافئان.

التمرين 7. ليكن $E=\mathbb{R}[X]$ فضاء كثيرات الحدود بأمثال حقيقية ولتكن $a\in\mathbb{R}_+^*$، نعرّف التطبيق $\|\cdot\|_a$ بالصيغة

$$\forall P\in E, \|P\|_a=\left|P(a)\right|+\int_0^1\left|P'(t)\right|\mathrm{dt}$$

1. أثبت أنّ $\|\cdot\|_a$ يعرف نظيمًا على E.
2. ليكن a و b من $\mathbb{R}_+^*$ بحيث $b>1, a\neq b$، ولتكن $(P_n)_{n\geq1}$ متتالية كثيرات الحدود المعرفة بالشكل $P_n(X)=X^n$.
   a. نفترض أنّ $b>a$. احسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\|P_n\|_b}{\|P_n\|_a}$.
   b. هل النظيمان $\|\cdot\|_a$ و $\|\cdot\|_b$ متكافئان، ولماذا؟
3. ليكن a و b من المجال $[0,1]$، أثبت تكافؤ النظيمين $\|\cdot\|_a$ و $\|\cdot\|_b$.

التمرين 8. لتكن A مجموعة غير خالية من فضاء منظّم $\left(E,\left\|\cdot\right\|\right)$ و $y,x \in E$.

1. أثبت أنّ $\left|d(x,A)-d(y,A)\right| \leq \left\|x-y\right\|$.
2. أثبت أنّ $d(x,A)=d(x,\overline{A})$ وأنّ $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x,A)=0$.

ليكن $\left(E,\left\|\cdot\right\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا، ولتكن F_1 و F_2 مجموعتين مغلقتين منفصلتين ($F_1 \cap F_2 = \phi$). أثبت وجود مجموعتين مفتوحتين O_1 و O_2 بحيث $F_1 \subset O_1$ و $F_2 \subset O_2$ و $O_1 \cap O_2 = \phi$.

التمرين 9. ليكن $\left(E,\left\|\cdot\right\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا وتامًّا، ولتكن F مجموعة مغلقة غير خالية من E. وليكن $f : F \to F$ تطبيقًا يحقّق الشرط

$\forall (x,y) \in F^2 \left\| f\left(x\right)-f\left(y\right)\right\| \leq k\left\| x-y\right\|$، مع $k \in [0,1[$. نعرّف المتتالية (x_n) بالشكل التالي:

$$\begin{cases} x_0 \in F \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

1. أثبت أنّ $\forall n \in \mathbb{N}, \left\|x_{n+1}-x_n\right\| \leq k^n \left\|x_1-x_0\right\|$.
2. أثبت تقارب المتتالية (x_n) من عنصرٍ x من F.
3. أثبت أنّ x هو العنصر الوحيد من F الذي يحقّق $f(x)=x$.
4. أثبت أنّ $\forall n \geq 1, \left\|x_n - x\right\| \leq \dfrac{k}{1-k}\left\|x_n - x_{n-1}\right\|$.

التمرين 10. ليكن $\left(E,\left\|\cdot\right\|\right)$ فضاءً شعاعيًّا منظّمًا، ولتكن K مجموعة متراصّة من E. وليكن $f : K \to K$ تطبيقًا يحقّق الشرط

$$\forall (x,y) \in K^2, \left(x \neq y \Rightarrow \left\|f(x)-f(y)\right\| < \left\|x-y\right\|\right)$$

1. أثبت وجود عنصر وحيد $x \in K$ يحقّق $f(x)=x$.
2. أثبت أنّ المتتالية (x_n) المعرّفة بالشكل:

$$\begin{cases} x_0 \in K \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

متقاربةٌ من x .

التمرين 11. ليكن $E=\mathcal{C}([0,1])$. أثبت أنّ $\left(E,\left\|\cdot\right\|_1\right)$ ليس تامًّا.

التمرين 12. ليكن E فضاءً شعاعيًّا منظّمًا، وليكن F فضاءً شعاعيًّا جزئيًّا من E . ليكن $f\in\mathcal{L}(E)$ تطبيقًا خطّيًّا مستمرًّا من E إلى نفسه. بيّن، مع التعليل، الصحيح من الخاطئ من بين القضايا الآتية:

1. F مجموعة مغلقة.
2. إذا كان $\left(E,\left\|\cdot\right\|\right)$ تامًّا، كان $\left(F,\left\|\cdot\right\|\right)$ تامًّا.
3. إذا كان F منتهي البعد، كان $\left(F,\left\|\cdot\right\|\right)$ تامًّا.
4. إذا كانت $\operatorname{Im} f$ مفتوحة، كان f غامرًا.
5. A متراصّة $\Leftarrow$ $f(A)$ مغلقة.
6. A محدودة $\Leftarrow$ $f(A)$ محدودة.
7. A مفتوحة $\Leftarrow$ $f(A)$ مفتوحة.
8. A مفتوحة $\Leftarrow$ $f^{-1}(A)$ مفتوحة.

التمرين 13. ليكن $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ فضاء التوابع الحقيقيّة المستمرّة المعرفة على $[0,1]$. ليكن التطبيق

$$\left\|\cdot\right\|:E\to\mathbb{R},f\mapsto\sup_{t\in[0,1]}\left|t.f(t)\right|$$

1. تحقّق أنّ $\left\|\cdot\right\|$ نظيمٌ على E .

لتكن (f_n) المتتالية المعرفة على النحو الآتي

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall t\in[0,1],\ f_n(t)=\frac{1}{1+nt^2}$$

2. احسب $\left\|f_n\right\|_\infty$ و $\left\|f_n\right\|$.
3. هل النظيمان $\left\|\cdot\right\|_\infty$ و $\left\|\cdot\right\|$ متكافئان؟

4. نعرّف الفضاء الجزئي $F = \{ f \in E : f(0) = 0\}$. هل F مجموعة مغلقة في $\left(E, \left\| \cdot \right\|\right)$ ولماذا؟

التمرين 14. ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ولتكن $A \in \mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$. نعرّف التطبيق $U_A : \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}) : X \mapsto A \cdot X$. بيّن أنّ U_A مستمرّ، واحسب نظيمه عندما:

1. نزوّد $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ في المنطلق وفي المستقرّ بالنظيم $\left\| \cdot \right\|_1$.
2. نزوّد $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ في المنطلق وفي المستقرّ بالنظيم $\left\| \cdot \right\|_2$.
3. نزوّد $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ في المنطلق وفي المستقرّ بالنظيم $\left\| \cdot \right\|_\infty$.

التمرين 15. ليكن E فضاء التوابع التي تقبل الاشتقاق عددًا غير منتهٍ من المرات على المجال $[0,1]$ وتنعدم عند الصفر $E = \{f \in \mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}) : f(0) = 0\}$. نزوّد E بالنظيم $\left\| \cdot \right\|_\infty$.

1. أثبت أنّ التطبيق $T : E \to E : f \mapsto T(f)$، حيث $T(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$، مستمرّ على $\left(E, \left\| \cdot \right\|_\infty\right)$ واحسب نظيمه.
2. ادرس استمرار التطبيق $T : E \to E : f \mapsto T(f)$ حيث $T(f)(x) = f'(x) - f'(0)$ على $\left(E, \left\| \cdot \right\|_\infty\right)$.

التمرين 16. ليكن $E = \mathbb{R}_2[X]$ المزوّد بالنظيم $\left\| \cdot \right\|$ المعرّف بالعلاقة:

$$\left\| aX^2 + bX + c \right\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

وليكن التطبيق الخطي $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ حيث $\varphi(P)(X) = P(X+1) - P'(X)$.

1. احسب نظيم φ وعيّن $P_0 \in \overline{B}(0,1)$ بحيث يكون $\left\|\varphi(P_0)\right\| = \left\|\varphi\right\|$.
2. بين أنّ $\varphi(P)(X) = P(X) + \frac{1}{2} P''(0)$.

3. نزود الفضاء E بالنظيم $\|\cdot\|_1$ المعرّف بالعلاقة:

$$\left\|aX^2 + bX + c\right\|_1 = |a| + |b| + |c|.$$

احسب نظيم φ الموافق للنظيم $\|\cdot\|_1$.

التمرين 17. ليكن $E = \mathcal{C}^\infty([0,1])$، وليكن $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ المعرّف بالصيغة: $\Phi(f) = f'$.

1. نزوّد E في المنطلق والمستقرّ بالنظيم $\|\cdot\|_\infty$. هل Φ مستمر على $\left(E, \|\cdot\|_\infty\right)$؟
2. نزوّد E في المنطلق بالنظيم $\|\cdot\|_\infty$ وفي المستقرّ بالنظيم $\|\cdot\|_1$. هل $\Phi : \left(E, \|\cdot\|_\infty\right) \to \left(E, \|\cdot\|_1\right)$ مستمر؟

التمرين 18. ليكن E فضاء المتتاليات الحقيقية المتقاربة من الصفر.

1. أثبت أنّ التطبيق $\|(x_n)\|_\infty = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ يعرّف نظيمًا على E.
2. نعرّف التطبيق $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ الذي يربط بكل متتالية (x_n) المتتاليةَ (y_n) التي حدها العام $y_n = \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{0}^{n} x_i$. أثبت أن Φ مستمر واحسب نظيمه.

التمرين 19. ليكن $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ فضاء التوابع الحقيقيّة المستمرّة المعرفة على $[0,1]$.

ليكن التطبيق الخطي $u : \left(E, \|\cdot\|_2\right) \to \left(E, \|\cdot\|_\infty\right)$ المعرف على النحو التالي:

$$\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1], \quad u(f)(x) = \int_0^1 (x-t) \cdot f(t)\, \mathrm{d}t$$

أثبت أنّ u مستمر واحسب نظيمه.

التمرين 20. ليكن E فضاء التوابع الحقيقيّة المستمرّة على المجال $[0,1]$. نزوّد E بالنظيم $\|\cdot\|_1$.

1. ليكن $f \in E$، نعرّف التابع $T(f)$ على المجال $[0,1]$ بالصيغة $T(f)(x) = \int_0^1 f(t) \cdot e^{-xt}\, \mathrm{d}t$. أثبت أنّ $T(f)$ مستمرّ.

2. أثبت أنّ التطبيق : $T : E \to E : f \mapsto T(f)$ مستمرّ. (الفضاء E مزوّد بالنظيم $\|\cdot\|_1$ في المنطلق والمستقرّ).

نزوّد E بالنظيم $\|\cdot\|_2$.

3. ليكن f و g من E. بملاحظة أنّ المقدار $\int_0^1 \left(f(t) + x \cdot g(t) \right)^2 \mathrm{d}t$ موجب أيًّا كان $x \in \mathbb{R}$، أثبت أنّ: $\left| \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.

4. نعرّف التطبيق $\varphi : E \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_0^1 e^t \cdot f(t)\,\mathrm{d}t$. أثبت أنّ φ مستمرّ بالنسبة للنظيم $\|\cdot\|_2$ واحسب نظيمه.

التمرين 21. ليكن $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ فضاء التوابع الحقيقيّة المستمرّة على المجال $[0,1]$. نزوّد E بالنظيم $\|\cdot\|_\infty$.

1. أيًّا كان $f \in E$ نعرّف التابع $L(f)$ المعرّف على المجال $[0,1]$ بالصيغة $L(f)(x) = \int_0^1 e^{-t \cdot x} f(t)\,\mathrm{d}t$. أثبت أنّ التابع $L(f)$ مستمرّ.
2. أثبت أنّ التطبيق $L : E \to E, f \mapsto L(f)$ خطّي ومستمرّ.
3. احسب $\|L\|$ نظيم التطبيق L. (إرشاد: قد تفيدك المتراجحة $e^{-x} \geq 1 - x$).

التمرين 22. ليكن $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ فضاء التوابع الحقيقيّة المستمرّة على المجال $[0,1]$. نزوّد E بالنظيم $\|\cdot\|_\infty$، وكالعادة نزوّد $\mathbb{R}$ بالقيمة المطلقة كنظيم. ليكن u شكلًا خطّيًّا موجبًا على E، أي : $u : E \to \mathbb{R}$ خطّي ويحقّق الشرط : أيًّا كان التابع f الموجب على $[0,1]$، فإنّ $u(f) \geq 0$.

1. ليكن f و g من E بحيث $\forall x \in [0,1], f(x) \leq g(x)$. أثبت أنّ $u(f) \leq u(g)$.
2. استنتج أنّ $|u(f)| \leq u(|f|)$.

3. أثبت أنّ u مستمرّ، واحسب نظيمه $\|u\|$ بدلالة $u(n)$، حيث n هو التابع الثابت: $n:[0,1]\to\mathbb{R}:x\mapsto 1$.

التمرين 23. ليكن n عددًا طبيعيًّا غير معدوم، وليكن $E=\mathbb{R}[X]$ فضاء كثيرات الحدود بأمثال حقيقيّة و $F=\mathbb{R}_n[X]$ فضاء كثيرات الحدود بأمثال حقيقيّة التي درجتها أصغر أو تساوي n. نزوّد كلًّا من E و F بالنظيم المعرّف بالعلاقة:

$$\left\|\sum_k a_k X^k\right\|_\infty = \max_k |a_k|.$$

1. أثبت أنّ التطبيق $S:E\to E:P\mapsto P'$ غير مستمرّ.
2. بيّن أنّ التطبيق $T:F\to F:P\mapsto P'$ مستمرّ، واحسب نظيمه.
3. ليكن الآن التطبيق $U:E\to\mathbb{R}:P\mapsto P(0)$. أثبت أنّ U مستمرّ، واحسب نظيمه.
4. لتكن المجموعة $A=\{P\in E:P(0)\geq 0\}$. أوجد كلًا من $\overline{A}$ و $\mathring{A}$. هل A متراصّة؟

الفصل الخامس: التوابع لعدّة متحوّلات

ليكن n عددًا طبيعيًّا غير معدوم. نشير بالرمز $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ إلى الأساس القانوني للفضاء الشعاعي $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ الذي نزوّده بنظيم ما $\|\cdot\|$ لن نحدّده إلاّ عند اللزوم، ذلك أنّ كلّ النظم متكافئة في حالة الفضاءات الشعاعيّة المنتهية البعد، وغالبًا سنشير إلى هذا الفضاء الشعاعي المنظّم بالرمز المختصر $\mathbb{R}^n$. وسنزوّد الفضاء الشعاعيّ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ دومًا بالنظيم $|\cdot|$.

تعريف 1. ليكن x, y عنصرين من $\mathbb{R}^n$، نسمّي المجموعة

$$[x, y] = \{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\}$$

القطعة المستقيمة الواصلة بين x و y.

تعريف 2. نقول عن مجموعة جزئيّة A من $\mathbb{R}^n$ إنّها **محدّبة** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

$$\forall (x, y) \in A^2, [x, y] \subset A$$

ونقول إنّها **نجميّة** إذا وفقط إذا وُجِد عنصرٌ $s \in A$ بحيث يتحقّق الشرط: $\forall x \in A, [s, x] \subset A$.

ملاحظة 1. من الواضح أنّ كلَّ مجموعةٍ محدّبةٍ نجميّةٌ ولكن العكس غير صحيح فالمجموعة $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ نجميّة إذ يكفي أن نأخذ $s = (0,0)$، ولكنّها ليست محدّبة فالعنصران $X = (2,0)$ و $Y = (0,2)$ ينتميان إلى A ولكن العنصر $Z = (1,1)$ ينتمي إلى القطعة المستقيمة $[X, Y]$ ولكنّه لا ينتمي إلى A أي $[X, Y] \not\subset A$.

تعريف 3. نسمّي **تابعًا لعدّة متحوّلات** (حقيقيّة) كلّ تابعٍ

$$f : A \to \mathbb{R}^m, x \mapsto \left(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)\right)$$

منطلقه مجموعة جزئيّة A غير خالية من $\mathbb{R}^n$ ومستقرّه $\mathbb{R}^m$. حيث $1 \le m, n$ عددان طبيعيّان، و $f_1, f_2, \cdots, f_m$ توابع حقيقيّة معرّفة على A نسمّيها مركّبات f.

وإذا كان $m = 1$ قلنا إنّ f تابع حقيقيّ لعدّة متحولات حقيقيّة، وفي الحالة المعاكسة قلنا إنّ f تابعٌ شعاعيّ لعدّة متحولات حقيقيّة.

أمثلة

1. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,(x,y,z)\mapsto(xyz^2,x+y-z)$.
2. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,(x,y)\mapsto\left(x-y,\sin(xy),x^2-2y\right)$.
3. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto\prod_{k=1}^{n}x_k$.

أوّلًا: التوابع الحقيقيّة لعدّة متحوّلات

1. النهايات والاستمرار

نذكّر بتعريف نهاية تابع عند نقطة لاصقة بمجموعة تعريفه:

تعريف 4. لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{R}^n$، وليكن التابع $f:A\to\mathbb{R}$، ولتكن $a\in\overline{A}$ نقطة لاصقة بِ A و $l\in\mathbb{R}$. نقول إنّ f يقبل l **نهايةً** له عند a إذا وفقط إذا تحقّق الشرط:

أيًّا كانت المتتالية (x_n) من عناصر A المتقاربة من a كانت المتتالية $\left(f(x_n)\right)$ متقاربة من l.

وفي هذه الحالة نكتب $\lim_{x\to a}f(x)=l$ أو $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}l$ أو $\lim_a f=l$.

مبرهنة 1. لتكن A مجموعة جزئيّة غير خالية من $\mathbb{R}^n$، وليكن التابعين $f,g:A\to\mathbb{R}$، و $a\in\overline{A}$ نقطة لاصقة بِ A و $\alpha,\beta,l,m\in\mathbb{R}$. نفترض أنّ $\lim_a g=m,\lim_a f=l$ عندئذٍ:

1. $\lim_a(\alpha\cdot f+\beta\cdot g)=\alpha\cdot l+\beta\cdot m$.
2. $\lim_a(f\cdot g)=l\cdot m$.
3. إذا كان g لا ينعدم على A، و $m\neq 0$، كان $\lim_a\frac{f}{g}=\frac{l}{m}$.

الإثبات:

لتكن (x_n) متتالية من عناصر A متقاربة من a عندئذٍ تكون المتتالية $\left(f(x_n)\right)$ متقاربة من l والمتتالية $\left(g(x_n)\right)$ متقاربة من m وباستخدام خواص العمليّات الحسابية على نهايات المتتاليات الحقيقيّة نجد أنّ

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha\cdot f+\beta\cdot g)(x_n)=\alpha\cdot l+\beta\cdot m$. ومنه $\lim\limits_{a}(\alpha\cdot f+\beta\cdot g)=\alpha\cdot l+\beta\cdot m$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(f\cdot g)(x_n)=l\cdot m$. ومنه $\lim\limits_{a}(f\cdot g)=l\cdot m$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f}{g}(x_n)=\dfrac{l}{m}$. ومنه $\lim\limits_{a}\dfrac{f}{g}=\dfrac{l}{m}$. ■

إنّ المبرهنة الآتية نتيجة مباشرة للمبرهنة السابقة.

مبرهنة 2. لتكن A مجموعة غير خالية من $\mathbb{R}^n$ ، وليكن التابعين $f,g:A\to\mathbb{R}$ ، و $a\in A$ ، و $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. نفترض أنّ f و g مستمرّان عند a عندئذٍ:

1. كلّ من التابعين $\alpha\cdot f+\beta\cdot g$ و $f\cdot g$ مستمرّ عند a .
2. إذا كان g لا ينعدم على A ، كان $\dfrac{f}{g}$ مستمرًّا عند a .

نتيجة

ليكن $P(X_1,X_2,\cdots,X_n),Q(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ كثيريّ حدود بـ n متحولًا وبأمثال حقيقيّة. إنّ التابع المعطى بالصيغة

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{P(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$$

مستمرّ على مجموعة تعريفه $D=\{x\in\mathbb{R}^n:Q(x)\neq 0\}$.

الإثبات

ليكن $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ إنّ التابع $p_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto x_i$ مستمرّ على $\mathbb{R}^n$ لأنّه خطّي على فضاء منتهي البعد. ومن ثمّ فإنّ كلًّا من التابعين $x\mapsto P(x)$ و

$x \mapsto Q(x)$ مستمرّ على $\mathbb{R}^n$ لأنّهما مجموع وجداء ضرب توابع مستمرّة، وعليه فإنّ f مستمرّ على D. ■

1.1. دراسة نهاية تابع بواسطة المسارات

نسمّي **مسارًا** مارًّا بالنقطة a كلّ تابع $\varphi :]0,1] \to A$ يحقّق $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = a$.

تُخبرنا مبرهنة نهاية مركّب تابعين أنّه إذا كان f يقبل l نهاية له عند a وكان φ مسارًا مارًّا بالنقطة a فإنّ $\lim\limits_{t\to 0^+} f\circ\varphi = l$.

أمثلة

1. لدراسة نهاية التابع $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ المعرّف على $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ عند النقطة $(0,0)$، نعرّف المسارين φ_1, φ_2 المارّين بالنقطة $(0,0)$ بالصيغتين $\varphi_1(t) = (t,0), \varphi_2(t) = (t,t)$. نلاحظ أنّ $\lim\limits_{t\to 0} f\circ\varphi_1 = 0$، وهذا يعني أنّه إذا قبل التابع f نهاية l عند $(0,0)$ فإنّ $l = 0$، ولكن $\lim\limits_{t\to 0} f\circ\varphi_2 = \dfrac{1}{2}$، ومن ثمّ فإنّ $l = \dfrac{1}{2}$، وهذا تناقض. إذن ليس للتابع f نهاية عند $(0,0)$.

2. لدراسة نهاية التابع $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ المعرّف على $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ عند النقطة $(0,0)$، نعرّف مسارًا مارًّا بالنقطة $(0,0)$ بالصيغة $\varphi(t) = (t,0)$. نلاحظ أنّ $\lim\limits_{t\to 0} f\circ\varphi = 0$، وهذا يعني أنّه إذا قبل f نهاية l عند $(0,0)$ فلا بدّ أن يكون $l = 0$. لإثبات أنّ $\lim\limits_{(0,0)} f = 0$ يكفي أن نجد تابعًا g يحقّق $\lim\limits_{(0,0)} g = 0 \wedge \Big(\forall (x,y) \neq (0,0), \big|f(x,y)\big| \leq g(x,y)\Big)$. باستخدام المتراجحة المعروفة $\big|xy\big| \leq \dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$، نجد

$$\forall(x,y)\neq(0,0),\left|f(x,y)\right|\leq\frac{1}{2}\left|y\right|$$

وبأخذ $g(x,y)=\frac{1}{2}\left|y\right|$ نستنتج أنّ $\lim\limits_{(0,0)} f=0$.

2. المشتقات الجزئية

تعريف 5. لتكن A مجموعةً مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^n$، و $f:A\to\mathbb{R}$ تابعًا لعدّة متحوّلات، و $a\in A$.

1. ليكن h من $\mathbb{R}^n$ وليكن التابع $\phi_h(t)=f(a+t\cdot h)$ المعرّف بجوارٍ للصفر في $\mathbb{R}$. نقول إنّ f **يقبل الاشتقاق باتّجاه** h عند a، إذا، وفقط إذا، قبلَ التابع $t\mapsto\phi_h(t)$ الاشتقاق عند الصفر، وفي هذه الحالة نسمّي العددَ $d_af(h)=\phi_h{}'(0)$ مشتقّ f باتجاه h عند a .
2. ليكن $i\in\mathbb{N}_n$. نقول عن f إنّه **يقبل الاشتقاق بالنسبة للمتحوّل** x_i عند a إذا وفقط إذا قبلَ الاشتقاق باتّجاه عنصر الأساس القانوني e_i، ونسمّي العددَ المشتقّ للتابع السابق عند الصفر المشتقّ الجزئي بالنسبة للمتحوّل x_i للتابع f عند a، ونرمز إليه بالرمز $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=d_af(e_i)$ أو $f'_{x_i}(a)$. وإذا قَبلَ التابع f الاشتقاق بالنسبة للمتحوّل x_i عند كلّ عنصرٍ $x\in A$، فإنّنا نعرّف التابع
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}:A\to\mathbb{R},x\mapsto\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$
ونسمّيه **المشتقّ الجزئي** للتابع f بالنسبة للمتحوّل x_i .
3. إذا قَبِلَ التابع f مشتقًّا جزئيًّا بالنسبة لكل متحوّل من متحوّلاته عند a، فإنّنا نعرّف **تدرّج** التابع f عند a على أنّه
$$\nabla_af=\operatorname{grad}f(a)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\frac{\partial f}{\partial x_2}(a),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

أمثلة

1. ليكن التابع $f(x,y)=2x^2y+1$ ، ولننظر فيما إذا كان قابلًا للاشتقاق باتجاه العنصر $h=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ عند النقطة $a=(1,-1)$. إنّ التابع

$\phi_h(t)=f(a+th)=2\left(1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2\left(-1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)+1$ اشتقاقيّ عند الصفر ومشتقّه $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، ومنه يقبل f مشتقًّا باتجاه h عند a وقيمة هذا المشتق هي $d_af(h)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. لنتأمّل التابع

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,x^2+y^2=0\end{cases}$$

ولندرس قابليّة f للاشتقاق بالنسبة للمتحوّلين x و y عند $a=(0,0)$. إنّ التابع

$$t\mapsto f_1(t)=f(a+t\cdot e_1)=\begin{cases}1/t, & t\neq 0\\ 0, & t=0\end{cases}$$

غير قابل للاشتقاق عند الصفر، إذن f لا يقبل الاشتقاق بالنسبة للمتحوّل x عند $(0,0)$.

من جهةٍ أخرى، إنّ التابع $t\mapsto f_2(t)=f(a+t\cdot e_2)=0$ قابلٌ للاشتقاق عند الصفر، ومن ثمّ فإنّ التابع f يقبل الاشتقاق بالنسبة للمتحوّل y عند $(0,0)$، و $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

3. إنّ التابع

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,x^2+y^2=0\end{cases}$$

غير مستمرّ عند $(0,0)$ ولكنّه يقبل مشتقّين جزئيّين $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$، وهذا يبيّن أنّ التابع يمكن أن يقبل مشتقّاتٍ جزئيّةً عند نقطة دون أن يكون مستمرًّا عندها.

4. ليكن $P(X_1,X_2,\cdots,X_n),Q(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ كثيريّ حدود بـ n مجهولًا وبأمثال حقيقيّة. إنّ التابع الكسريّ المعطى بالصيغة: $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$، يقبل مشتقّات جزئيّة بالنسبة لكل متحوّل من متحوّلاته على مجموعة تعريفه $D=\{x\in\mathbb{R}^n : Q(x)\neq 0\}$، وإذا كان $a\in D$ و $i\in\mathbb{N}_n$ فإنّ

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=\frac{\frac{\partial P}{\partial x_i}(a)\cdot Q(a)-P(a)\cdot\frac{\partial Q}{\partial x_i}(a)}{Q(a)^2}$$

ملاحظات

1. إذا كان $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$، فإنّ التابع f يقبل الاشتقاق بالنسبة للمتحوّل x_i عند a إذا وفقط إذا قبلَ التابع $x\mapsto f_i(x)=f(a_1,\cdots,a_{i-1},x,a_{i+1},\cdots,a_n)$ (المعرّف بجوارٍ لـ a_i في $\mathbb{R}$) الاشتقاقَ عند a_i. وفي هذه الحالة يكون $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=f_i'(a_i)$.

2. إنّ عمليّة الاشتقاق بالنسبة لأحد المتحوّلات تؤول إلى اشتقاق تابع لمتحوّل واحد، ومن ثمّ فإنّ قواعد قابليّة الاشتقاق وحساب المشتقّات التي نعرفها في حالة التوابع لمتحوّل واحد تنطبق على قابليّة الاشتقاق بالنسبة لأحد المتحوّلات، وعلى حساب المشتقّات الجزئيّة الموافقة. ومنه المبرهنة الآتية التي لا يحتاج إثباتها إلى كثيرٍ من الجهد.

مبرهنة 3. لتكن A مجموعةً مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^n$، و $f,g:A\to\mathbb{R}$ تابعين لعدّة متحوّلات، و $a\in A$، و $i\in\mathbb{N}_n$ و $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. نفترض أنّ كلًّا من f و g يقبل مشتقًّا جزئيًّا بالنسبة للمتحول x_i عند a عندئذٍ

1. يقبل التابع $\lambda f+\mu g$ مشتقًّا جزئيًّا بالنسبة للمتحول x_i عند a ويكون
$$\frac{\partial(\lambda f+\mu g)}{\partial x_i}(a)=\lambda\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)+\mu\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$$
2. يقبل التابع $f\cdot g$ مشتقًّا جزئيًّا بالنسبة للمتحول x_i عند a ويتحقّق
$$\frac{\partial(f\cdot g)}{\partial x_i}(a)=g(a)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)+f(a)\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)$$
3. وإذا كان g لا ينعدم على A فإنّ التابع f/g يقبل مشتقًّا جزئيًّا بالنسبة للمتحول x_i عند a ويتحقّق:
$$\frac{\partial\left(f/g\right)}{\partial x_i}(a)=\frac{1}{g(a)^2}\left(g(a)\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)-f(a)\frac{\partial g}{\partial x_i}(a)\right)$$

تعريف 6. لتكن A مجموعةً مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^n$، و $f:A\to\mathbb{R}$ تابعًا لعدّة متحوّلات. نقول إنّ f من **الصف** $\mathcal{C}^0$ إذا وفقط إذا كان مستمرًّا على A. وإذا كان p عددًا طبيعيًّا، فإنّنا نقول إنّ f من **الصف** $\mathcal{C}^{p+1}$ إذا وفقط إذا قَبِل مشتقًّا جزئيًّا بالنسبة لكلّ متحوّل من متحولاته على A وكانت كلّ تلك المشتقّات الجزئيّة من **الصف** $\mathcal{C}^p$. ونقول إنّ f من الصفّ $\mathcal{C}^\infty$ إذا وفقط إذا كان من الصفّ $\mathcal{C}^p$، وذلك أيًّا كان العدد الطبيعي p.

إذا كان i و j و k من $\mathbb{N}_n$ و $a\in A$، فإنّنا نرمز بالرمز $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)$ إلى المشتقّ الجزئي بالنسبة للمتحوّل x_j للتابع $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ عند النقطة a، وبالرمز $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_k\partial x_j\partial x_i}(a)$ إلى المشتقّ الجزئي بالنسبة للمتحوّل x_k للتابع $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ عند النقطة a، وبالمثل نعرّف الرمز

$\dfrac{\partial^p f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\cdots\partial x_{i_p}}(a)$ ، وهو يمثّل مشتقًّا جزئيًّا من المرتبة p . وأخيرًا نستعمل الرمز المختصر $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$ بدلًا من $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a)$ و $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_i^3}(a)$ بدلًا من $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_i \partial x_i}(a)$ ، وهكذا.

مثالان

1. ليكن P,Q كثيريّ حدود بـ n مجهولًا وبأمثال حقيقيّة. إنّ التابع الكسريّ المعطى بالصيغة: $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ، من الصف C^∞ على مجموعة تعريفه $D=\{x\in\mathbb{R}^n : Q(x)\neq 0\}$ ، ذلك أنّه يمكن كتابة المشتقّات الجزئيّة للتابع f بشكل توابع كسريّة مقاماتها $Q(x)^p$.

2. لنتأمّل التابع

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{x^4}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,x^2+y^2=0\end{cases}$$

نعلم أنّ f يقبل مشتقّين جزئيّين $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ على $\mathbb{R}^2$ ولدينا

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^5+4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & ,\ x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,\ x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{-2x^4y}{(x^2+y^2)^2} & ,\ x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,\ x^2+y^2=0\end{cases}$$

من الواضع أنّ التابعين السابقين مستمرّان على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. كما أنّ المتراجحتين

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \le \frac{6\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^5}{(x^2+y^2)^2} = 6\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \le \frac{2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^5}{(x^2+y^2)^2} = 2\sqrt{x^2+y^2}$$

تضمنان استمرارهما عند $(0,0)$، ومن ثَمّ فإنّ كلا التابعين مستمرّ، وعليه فإنّ f من الصفّ $\mathcal{C}^1$ على $\mathbb{R}^2$.

لدراسة انتماء التابع إلى الصفّ $\mathcal{C}^2$، نبيّن فيما إذا كان كلّ من التابعين $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ من الصفّ $\mathcal{C}^1$ على $\mathbb{R}^2$. فعلى سبيل المثال التابع $\frac{\partial f}{\partial y}$ يقبل مشتقًّا جزئيًا بالنسبة للمتحول y على $\mathbb{R}^2$، ولدينا

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{2x^4(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3} & ,\ x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & ,x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

وباستخدام المسارين $\varphi_1(t) = (0,t)$, $\varphi_2(t) = (t,t)$ المارّين بالنقطة $(0,0)$ نجد أنّ التابع $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ غير مستمرّ عند $(0,0)$، ومن ثمّ فإنّ f ليس من الصفّ $\mathcal{C}^2$ لأنّ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ غير مستمرّ.

مبرهنة 4. (شوارتز–Schwarz) لتكن A مجموعةً مفتوحة غير خالية من $\mathbb{R}^n$ وليكن $f : A \to \mathbb{R}$ و $a \in A$. ليكن i و j عنصرين من $\mathbb{N}_n$ نفترض أنّ المشتقّين الجزيّيين

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ و $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ معرّفان على A ومستمرّان عند a، عندئذٍ يكون

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

الإثبات

ليكن $(e_i)_{1\le i\le n}$ الأساس القانوني في $\mathbb{R}^n$. وليكن $0<\delta$ بحيث $B(a,\delta)\subset A$ وليكن $(s,t)\in\mathbb{R}^2$ بحيث $\left\|se_i + te_j\right\| < \delta$. ولنعرّف التابع

$$\Delta(s,t) = f(a + s\cdot e_i + t\cdot e_j) - f(a + s\cdot e_i) - f(a + t\cdot e_j) + f(a)$$

على المجموعة $B\big((0,0),\delta\big)$ المحتواة في $\mathbb{R}^2$. إنّ التابع المعطى بالصيغة

$$g(s) = f(a + s\cdot e_i + t\cdot e_j) - f(a + s\cdot e_i)$$

اشتقاقيّ بين 0 و s، و

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + x\cdot e_i + t\cdot e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + x\cdot e_i)$$

وهذا يتيح لنا استخدام مبرهنة التزايدات المحدودة لنستنتج وجود عددٍ $\alpha\in]0,1[$ بحيث

$$\begin{aligned}\Delta(s,t) &= g(s) - g(0) = s\cdot g'(\alpha\cdot s)\\ &= s\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \alpha\cdot s\cdot e_i + t\cdot e_j) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + \alpha\cdot s\cdot e_i)\right)\end{aligned}$$

ولمّا كان التابع $h(y) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a + \alpha\cdot s\cdot e_i + y\cdot e_j)$ اشتقاقيًّا بين 0 و t و

$h'(y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a + \alpha\cdot s\cdot e_i + y\cdot e_j)$، استنتجنا حسب مبرهنة التزايدات المحدودة مجدّدًا، وجود عددٍ $\beta\in]0,1[$ بحيث

$$\begin{aligned}\Delta(s,t) &= g(s)-g(0)\\ &= s\cdot(h(t)-h(0))\\ &= s\cdot t\cdot h'(\beta\cdot t)\\ &= s\cdot t\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a+\alpha\cdot s\cdot e_i+\beta\cdot t\cdot e_j)\end{aligned}$$

أو

$$\frac{\Delta(s,t)}{s\cdot t}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a+\alpha\cdot s\cdot e_i+\beta\cdot t\cdot e_j)$$

ولمّا كان التابع $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ مستمرًّا عند a، استنتجنا أنّ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)=\lim_{(s,t)\to(0,0)}\frac{\Delta(s,t)}{s\cdot t}$$

وأخيرًا نستطيع المبادلة بين i و j وبين s و t لنجد أنّ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)=\lim_{(s,t)\to(0,0)}\frac{\Delta(s,t)}{s\cdot t}$$

ونستنتج المساواة $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(a)$ المطلوبة. ■

ملاحظة 2. إنّ شرط استمرار المشتقّين الجزئيّين $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ عند a في المبرهنة السابقة ضروري وهذا ما يبيّنه المثال الآتي:

مثال

ليكن التابع

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,x^2+y^2=0\end{cases}$$

من الواضح أنّ f يقبل مشتقّين جزئيين $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ وأنّ

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\frac{yx^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,x^2+y^2=0\end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,x^2+y^2=0\end{cases}$$

من جهةٍ أخرى نلاحظ أنّ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=0$ ، ومن ثمّ فإنّ $\frac{\partial f}{\partial x}$ يقبل مشتقًّا جزئيًّا بالنسبة للمتحوّل y عند النقطة $(0,0)$ وأنّ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)=0$ ، وكذلك فإنّ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=x$ وهذا يعني أنّ $\frac{\partial f}{\partial y}$ يقبل مشتقًّا جزئيًّا بالنسبة للمتحوّل x عند النقطة $(0,0)$ وأنّ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)=1\neq 0=\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

3. قابليّة المفاضلة

تعريف 7. لتكن A مجموعةً مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^n$ ، و $f:A\to\mathbb{R}$ تابعًا لعدّة متحوّلات، و $a\in A$ ، نقول إنّ f **قابل للمفاضلة** عند a إذا وفقط إذا قبلَ مشتقًّا جزئيًّا بالنسبة لكل متحول من متحولاته عند a وقبِلَ التابعُ

$$h=(h_1,h_2,\cdots,h_n)\mapsto \frac{f(a+h)-f(a)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot h_i}{\|h\|}$$

الصفرَ نهايةً له عندما يسعى h إلى الصفر بقيم مختلفة عنه، وفي هذه الحالة نسمّي الشكل الخطّي

$$\mathrm{d}f(a):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}, h\mapsto \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot h_i$$

تفاضل f عند a. كما نسمّي مصفوفته بالأساس القانوني **مصفوفة جاكوبي** للتابع f عند a ونرمز إليها بالرمز

$$\mathrm{J}f(a) = \mathrm{mat}(\mathrm{d}f(a),\mathcal{E}_n,\mathcal{E}_1)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

وفي هذه الحالة يكون $\mathrm{d}f(a)(h) = \mathrm{J}f(a)\cdot h$ حيث مثّلنا العنصر h بالمصفوفة العمود $h = {}^t(h_1 \ h_2 \ \cdots \ h_n)$.

وإذا رمزنا بالرمز

$$\nabla f(a) = {}^t\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\frac{\partial f}{\partial x_2}(a),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

إلى العنصر من $\mathbb{R}^n$ الذي مركّباته المشتقات الجزئيّة للتابع f عند a أمكننا أن نكتب $\mathrm{d}f(a)(h) = \left\langle \nabla f(a), h\right\rangle$ حيث $\left\langle \cdot,\cdot\right\rangle$ هو الجداء السلّمي الإقليدي على $\mathbb{R}^n$.

وإذا كان f قابلًا للمفاضلة عند كلّ عنصر من A فإنّنا نقول إنّ f قابل للمفاضلة على A، ونعرّف التطبيق $\mathrm{d}f : A \to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}), x \mapsto \mathrm{d}f(x)$ ونسمّيه **تفاضل** التابع f.

مبرهنة 5. لتكن A مجموعةً مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^n$، و $f : A \to \mathbb{R}$ تابعًا لعدّة متحوّلات، و $a \in A$، عندئذٍ تكون القضايا الثلاث الآتية متكافئة:

① f قابل للمفاضلة عند a.

② يوجد تطبيقٌ خطّي $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ بحيث يقبل التابع

$$h \mapsto \frac{f(a+h) - f(a) - u(h)}{\left\|h\right\|}$$

الصفرَ نهايةً له عندما يسعى h إلى الصفر بقيم مختلفة عنه.

③ يوجد جوار W للصفر في $\mathbb{R}^n$ وتابعٌ $\varepsilon : W \to \mathbb{R}$ بحيث $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ ويتحقّق

$$\forall h \in W, a + h \in A, f(a+h) = f(a) + u(h) + \left\|h\right\|\varepsilon(h)$$

الإثبات

①⇐②: يكفي أن نعرّف التطبيق u بالشكل $u:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, h \mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot h_i$.

②⇐③: نعرّف W بالشكل $W = A - a = \{x - a, x \in A\}$، وهو جوارٌ للصفر في $\mathbb{R}^n$. كما نعرّف التابع

$$\varepsilon : W \to \mathbb{R}, h \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(a+h)-f(a)-u(h)}{\|h\|}, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases}$$

حيث نلاحظ أنّ $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$ ، وأنّ

$$\forall h \in W, f(a+h) = f(a) + u(h) + \|h\|\varepsilon(h)$$

③⇐①: ليكن $i \in \mathbb{N}_n$. ليكن التابع $t \mapsto g(t) = f(a + t\cdot e_i)$ المعرّف بجوارٍ للصفر في $\mathbb{R}$. بملاحظة أنّ

$$\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t} = \lim_{t\to 0}\left(u(e_i) + \frac{|t|}{t}\|e_i\|\cdot\varepsilon(t\cdot e_i)\right) = u(e_i)$$

نستنتج أنّ f يقبل مشتقًّا جزئيًّا بالنسبة للمتحول x_i عند a وأنّ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = u(e_i)$.

ونتحقّق بسهولة أنّ التابع

$$h \mapsto \frac{f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot h_i}{\|h\|} = \varepsilon(h)$$

يقبل الصفرَ نهايةً له عندما يسعى h إلى الصفر بقيم مختلفة عنه، ومن ثَمّ فإنّ f قابلٌ للمفاضلة عند a، ويكتمل بذلك إثبات المبرهنة. ■

ملاحظة 1. يمكن التعبير عن الشرط في القضيّة ③ في المبرهنة السابقة بالشكل $f(a+h) = f(a) + u(h) + o(\|h\|)$ حيث يشير الرمز $o(\|h\|)$ إلى تابع مهملٍ أمام التابع $h \mapsto \|h\|$.

أمثلة

1. ليكن $f : I \to \mathbb{R}$ تابعًا معرّفًا على المجال المفتوح غير الخالي I. نفترض أنّ f اشتقاقيّ عند a. إنّ f قابلٌ للمفاضلة عند a، وتفاضله عند a يُكتب بالشكل
$$\mathrm{d}f(a) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h \mapsto f'(a) \cdot h$$

2. ليكن $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ تابعًا خطّيًّا، وليكن $a \in \mathbb{R}^n$. لمّا كانت العلاقة $f(a+h) = f(a) + f(h)$ محققة مهما كان h من $\mathbb{R}^n$ استنتجنا باستخدام المبرهنة 3. مع $W = \mathbb{R}^n, \varepsilon(h) = 0$ أنّ f قابلٌ للمفاضلة عند a وأنّ $\mathrm{d}f(a) = f$.

3. نزوّد $\mathbb{R}^n$ بالنظيم الإقليدي $\left\| \cdot \right\|_2$ المشتقّ من الجداء السلمي الإقليدي $\langle , \rangle$. لتكن M مصفوفة مربّعة متناظرة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$، ولنعرّف التابع q على $\mathbb{R}^n$ بالشكل $q(x) = \langle Mx, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_i x_j$. حيث اخترنا تمثيل عناصر $\mathbb{R}^n$ بأعمدة. ليكن $a, h \in \mathbb{R}^n$. لدينا
$$\begin{aligned} q(a+h) &= \langle M(a+h), a+h \rangle \\ &= q(a) + \langle Ma, h \rangle + \langle Mh, a \rangle + \langle Mh, h \rangle \\ &= q(a) + \langle 2Ma, h \rangle + \langle Mh, h \rangle \end{aligned}$$
حيث استفدنا من تناظر المصفوفة M.

من الواضح أنّ التطبيق $h \mapsto \langle 2Ma, h \rangle$ خطّي، وإذا عرّفنا التابع ε بالشكل
$$\varepsilon(h) = \begin{cases} \dfrac{\langle Mh, h \rangle}{\left\| h \right\|_2}, & h \neq 0 \\ 0, & h = 0 \end{cases}$$
وجدنا أنّ $\lim_0 \varepsilon = 0$ وأنّ $\langle Mh, h \rangle = \varepsilon(h) \cdot \left\| h \right\|_2$، واستنتجنا أنّ التابع q قابل للمفاضلة عند a وتفاضله هو التطبيق $h \mapsto \langle 2Ma, h \rangle$.

لاحظ أنّه عندما تكون M هي المصفوفة الواحديّة نجد أنّ التابع $x \mapsto \left\|x\right\|_2^2$ قابل للمفاضلة عند كلّ عنصر a من $\mathbb{R}^n$، وتفاضله عند a هو التطبيق الخطّي $h \mapsto \left\langle 2a, h\right\rangle$.

مبرهنة 6. لتكن A مجموعةً مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^n$، و $f : A \to \mathbb{R}$ تابعًا لعدّة متحوّلات، و $a \in A$، نفترض أنّ f قابل للمفاضلة عند a عندئذٍ يكون f مستمرًّا عند a.

الإثبات

لمّا كان f قابلًا للمفاضلة عند a، وُجِدَ تطبيق خطّي $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ وتابعٌ ε معرّف بجوارٍ W للصفر في $\mathbb{R}^n$ يحقّق $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$ بحيث يتحقّق $\forall h \in W, f(a+h) = f(a) + u(h) + \left\|h\right\| \cdot \varepsilon(h)$. ولكن u تطبيق خطّيّ منطلقه منتهي البعد فهو مستمرّ عند الصفر، وعليه فإنّ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$، ومن ثمّ فإنّ f مستمرّ عند a. ■

مبرهنة 7. لتكن A مجموعةً مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^n$، و $f, g : A \to \mathbb{R}$ تابعين لعدّة متحوّلات، و $a \in A$، نفترض أنّ كلًّا من f و g قابل للمفاضلة عند a، وليكن $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ عندئذٍ:

1. التابع $\lambda f + \mu g$ قابل للمفاضلة عند a و
$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \mathrm{d}f(a) + \mu \mathrm{d}g(a)$$
2. التابع $f \cdot g$ قابل للمفاضلة عند a و
$$\mathrm{d}(f \cdot g)(a) = g(a) \cdot \mathrm{d}f(a) + f(a) \cdot \mathrm{d}g(a)$$
3. إذا كان g لا ينعدم على A، كان التابع $\dfrac{f}{g}$ قابلًا للمفاضلة عند a وكان
$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a) \cdot \mathrm{d}f(a) - f(a) \cdot \mathrm{d}g(a)}{g(a)^2}$$

الإثبات

لمّا كان كلّ من f و g قابلًا للمفاضلة عند a ، وُجدَ تطبيقان خطّيان $u,v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ وتابعان ε,δ معرّفان بجوارين U,V للصفر في $\mathbb{R}^n$ يحقّقان $\lim\limits_{0} \varepsilon = 0$ و $\lim\limits_{0} \delta = 0$ بحيث يتحقّق

$$\forall h \in U, f(a+h) = f(a) + u(h) + \left\|h\right\| \cdot \varepsilon(h)$$
$$\forall h \in V, g(a+h) = g(a) + v(h) + \left\|h\right\| \cdot \delta(h)$$

من جهة أخرى، إنّ $W = U \cap V$ جوارٌ للصفر في $\mathbb{R}^n$ ويتحقّق

1. أيًّا كان $h \in W$ فإنّ:

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(a+h) = (\lambda f + \mu g)(a) + (\lambda u + \mu v)(h)\\ + \left\|h\right\| \cdot (\lambda\varepsilon + \mu\delta)(h)\end{aligned}$$

وبملاحظة أنّ $\lim\limits_{0}(\lambda\varepsilon + \mu\delta) = 0$ وأنّ التطبيق $\lambda u + \mu v$ خطّيّ نستنتج أنّ التابع $\lambda f + \mu g$ قابل للمفاضلة عند a وأنّ

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \mathrm{d}f(a) + \mu \mathrm{d}g(a)$$

2. ليكن $h \in W$ لدينا:

$$\begin{aligned}(f \cdot g)(a+h) &= (f(a) + u(h) + \left\|h\right\| \cdot \varepsilon(h))\\ &\quad \times (g(a) + v(h) + \left\|h\right\| \cdot \delta(h))\\ &= (f \cdot g)(a) + g(a)u(h) + f(a)v(h) + \left\|h\right\| \cdot \psi(h)\end{aligned}$$

حيث $\psi(h) = f(a)\delta(h) + g(a)\varepsilon(h) + \left\|h\right\|\varepsilon(h)\delta(h)$ ، وبملاحظة أنّ $\lim\limits_{0}\psi = 0$ وأنّ $h \mapsto g(a)u + f(a)v$ خطّي نستنتج أنّ $f \cdot g$ قابل للمفاضلة عند a و $\mathrm{d}(f \cdot g)(a) = g(a) \cdot \mathrm{d}f(a) + f(a) \cdot \mathrm{d}g(a)$.

3. أوّلًا في حالة f ثابت ويساوي الواحد. ليكن $h \in W$ لدينا:

$$\begin{aligned} \frac{1}{g}(a+h) &= \frac{1}{g(a)+v(h)+o\left(\left\|h\right\|\right)} \\ &= \frac{1}{g(a)}\left(\frac{1}{1+v(h)\,/\,g(a)+o\left(\left\|h\right\|\right)}\right) \\ &= \frac{1}{g(a)}\left(1-\frac{v(h)}{g(a)}+o\left(\left\|h\right\|\right)\right) \\ &= \frac{1}{g(a)}-\frac{v(h)}{g(a)^2}+o\left(\left\|h\right\|\right) \end{aligned}$$

وهذا يُثبت أنّ التابع $\dfrac{1}{g}$ قابلٌ للمفاضلة عند a و

$\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{g}\right)(a) = \dfrac{-v}{g(a)^2} = \dfrac{-\mathrm{d}g(a)}{g(a)^2}$، وبتطبيق البند الثاني من المبرهنة على f و

$\dfrac{1}{g}$ نجد أنّ $\dfrac{f}{g}$ قابل للمفاضلة عند a وأنّ

$$\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)\cdot \mathrm{d}f(a) - f(a)\cdot \mathrm{d}g(a)}{g(a)^2} \qquad \blacksquare$$

مبرهنة 8. لتكن A مجموعةً مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^n$، و $f : A \to \mathbb{R}$، و $a \in A$.
نفترض أنّ f يقبل مشتقّات جزئيّة بالنسبة لكلّ متحوّلٍ من متحوّلاته عند كلّ نقطة من A وأنّ تلك المشتقّات مستمرّةٌ عند النقطة a عندئذٍ يكون f قابلًا للمفاضلة عند a.

الإثبات

سنكتفي بإثبات حالة $n = 2$ حيث إنّ الحالة العامّة تُعالج بالطريقة نفسها. نزوّد $\mathbb{R}^2$ بالنظيم $\left\|\cdot\right\| = \left\|\cdot\right\|_\infty$، وهذا لا يشكّل انتقاصًا من العموميّة إذ إنّ كلّ النظم على $\mathbb{R}^2$ متكافئة.
لتكن إذن النقطة $(a,b) \in A$ محقّقةً لشروط المبرهنة.
سنثبت فيما يأتي أنّ $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \Delta(h,k) = 0$ حيث

$$\Delta(h,k)=\frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-h\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)-k\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{\left\|(h,k)\right\|}$$

يوجد $\eta>0$ بحيث $B\big((a,b),\eta\big)\subset A$.

ليكن $\varepsilon>0$ ، يوجد $\delta\in]0,\eta[$ بحيث إذا كان $\left\|(h_1,k_1)\right\|<\delta$ كان

ليكن $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(a+h_1,b+k_1)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}\wedge\left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(a+h_1,b+k_1)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right|$

$(h,k)\in\mathbb{R}^2$ بحيث $\left\|(h,k)\right\|<\delta$. نضع

$$\Delta_1=f(a+h,b+k)-f(a,b+k)-h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$$
$$\Delta_2=f(a,b+k)-f(a,b)-k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

لدينا

$$\begin{aligned}\Delta_1&=\int_0^h\frac{\partial f}{\partial x}(a+x,b+k)\,\mathrm{dx}-\int_0^h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\,\mathrm{dx}\\&=\int_0^h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a+x,b+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right)\mathrm{dx}\\\Delta_2&=\int_0^k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b+y)\,\mathrm{dy}-\int_0^k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\,\mathrm{dy}\\&=\int_0^k\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b+y)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)\mathrm{dy}\end{aligned}$$

وبجمع العلاقتين الأخيرتين نجد أنّ

$$\begin{aligned}\left|\Delta(h,k)\right|\cdot\left\|(h,k)\right\| &= \left|\Delta_1+\Delta_2\right|\\ &\le \left|\int_0^h\left|\frac{\partial f}{\partial x}(a+x,b)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\right|\mathrm{dx}\right|\\ &\quad+\left|\int_0^k\left|\frac{\partial f}{\partial y}(a,b+y)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right|\mathrm{dy}\right|\\ &\le \left|h\right|\frac{\varepsilon}{2}+\left|k\right|\frac{\varepsilon}{2}\le\left\|(h,k)\right\|\cdot\varepsilon\end{aligned}$$

أو $\left|\Delta(h,k)\right|\le\varepsilon$ ، وهذا يثبت أنّ $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)}\Delta(h,k)=0$ ، ومن ثمّ فإنّ f قابلٌ للمفاضلة عند (a,b) . ■

ملاحظة 2. إنّ عكس المبرهنة السابقة غير صحيح، وهذا ما يبيّنه المثال الآتي:

مثال: لنتأمّل التابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعطى بالصيغة

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

إنّ f اشتقاقيّ على $\mathbb{R}$ و

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

وهو من ثمّ قابل للمفاضلة عند الصفر، ولكن من السهل رؤية أنّ f' غير مستمرّ عند الصفر ذلك أنّه لا يقبل نهايةً عند الصفر.

نتيجة: لتكن A مجموعةً مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^n$ ، و $f:A\to\mathbb{R}$ من الصف $\mathcal{C}^1$ على A ، عندئذٍ يكون f قابلًا للمفاضلة على A .

4. القيم الحدّيّة محليًّا والنقاط الحرجة

تعريف 8. لتكن A مجموعة غير خالية من $\mathbb{R}^n$ ، و $f:A\to\mathbb{R}$ و $a\in A$.

1. نقول إنّ f يبلغ **قيمة صغرى محليًّا** عند a إذا وفقط إذا وُجد $0 < \delta$ بحيث $\forall x \in A, \|x - a\| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(a)$.

وإذا تحقّق الشرط $\forall x \in A \setminus \{a\}, \|x - a\| < \delta \Rightarrow f(x) > f(a)$، قلنا إنّ f يبلغ قيمة صغرى تامّة محليًّا عند a.

2. نقول إنّ f يبلغ **قيمة عظمى (أو كبرى) محليًّا** عند a إذا وفقط إذا وُجد $0 < \delta$ بحيث $\forall x \in A, \|x - a\| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(a)$.

وإذا تحقّق الشرط $\forall x \in A \setminus \{a\}, \|x - a\| < \delta \Rightarrow f(x) < f(a)$، قلنا إنّ f يبلغ قيمة عظمى تامّة محليًّا عند a.

3. نقول إنّ f يبلغ **قيمة حدّيّة محليًّا** (أو قيمة قصوى محليًّا)عند a إذا بلغ قيمة صغرى أو عظمى محليًّا عند a.

مبرهنة 9. لتكن A مجموعة غير خالية من $\mathbb{R}^n$، و $f : A \to \mathbb{R}$ و $a \in \mathring{A}$ نقطة من داخل A. نفترض أنّ f يبلغ قيمةً حدّيّة محليًّا عند a عندئذٍ إذا كان المشتقّ $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ معرّفًا كان معدومًا.

الإثبات

في الحقيقة، إنّ التابع لمتحوّل حقيقي واحد $t \mapsto f(a + (t - a_k) \cdot e_k)$ يبلغ قيمة حدّيّة محليًّا عند a_k وهو اشتقاقيّ عندها فمشتقّه معدوم، ومن ثمّ فإنّ $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$. ■

ملاحظة 3. يمكن أن يقبل التابع f مشتقًّا جزئيًّا معدومًا بالنسبة لكل متحوّل من متحوّلاته عند نقطةٍ a من دون أن يبلغ قيمةً حدّيّة محليًّا عند تلك النقطة. والتابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ عند النقطة $a = 0$ مثالٌ على ذلك.

تعريف 9. لتكن A مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{R}^n$ ، و $f: A \to \mathbb{R}$ تابعٌ يقبل مشتقّات جزئيّة بالنسبة لكل متحوّل من متحوّلاته عند كلّ نقطة من A . نقول عن $a \in A$ إنّها **نقطة حرجة** إذا وفقط إذا تحقّق الشرط

$$\forall k \in \mathbb{N}_n, \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$$

وإذا كانت $a \in A$ نقطة حرجة بالنسبة للتابع f ولا يبلغ عندها قيمةً حدّيّة محليًّا، فإنّنا نقول في هذه الحالة إنّ a **نقطة سرج (أو سرجيّة)** بالنسبة للتابع f .

1.4. تحديد طبيعة النقاط الحرجة

عندما تكون $a \in \mathring{A}$ نقطةً حرجةً بالنسبة للتابع $f: A \to \mathbb{R}$ ، فهي إمّا أن تكون نقطة سرج أو يبلغ f عندها قيمةً حدّيّة محليًّا. لتحديد ذلك نلجأ إلى دراسة إشارة التابع $\Delta(x) = f(a+x) - f(a)$ وذلك بجوار الصفر، فإذا حافظ التابع السابق على إشارة موجبة على جوارٍ للصفر بلغ f قيمة صغرى محليًّا عند a ، وإذا حافظ على إشارة سالبة على جوارٍ للصفر بلغ f قيمة عظمى محليًّا عند a ، أمّا إذا غيّر إشارته على كلّ جوارٍ للصفر كانت a نقطة سرج.

إحدى الوسائل المفيدة في هذا الإطار هي المسارات المارّة بالصفر فمثلًا إذا كان $\varphi_1, \varphi_2 :]0,1[\to \mathbb{R}^n$ مسارين مارّين بالصفر أي $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi_1(t) = \lim\limits_{t \to 0^+} \varphi_2(t) = 0$ ووُجد $c \in]0,1[$ بحيث $\forall t \in]0,c[, \Delta(\varphi_1(t)) > 0, \Delta(\varphi_2(t)) < 0$ ، فإنّ هذا يعني أنّ التابع Δ يبلغ قيمًا موجبة تمامًا وقيمًا سالبةً تمامًا على أيّ جوارٍ للصفر، وعليه فإنّ a نقطة سرج.

2.4. الحدّان الأدنى والأعلى لتابع حقيقيّ

أمثلة

1. ليكن التابع

$$f: D \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 + y^2 - xy$$

حيث $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

إنّ التابع f مستمرّ على المجموعة المتراصّة D فهو يبلغ حدّيه الأدنى والأعلى على هذه المجموعة أي يوجد عنصران $(a,b),(c,d) \in D$ بحيث:

$$\forall (x,y) \in D, f(a,b) \le f(x,y) \le f(c,d)$$

إنّ f يبلغ قيمةً حدّيّة محليًّا عند كلّ من (a,b) و (c,d)، فإذا انتمت إحداهما إلى داخل D كانت بالضرورة نقطة حرجة وإلاّ فهي لا تنتمي إلى داخل D فهي عنصرٌ من المجموعة

$$\begin{aligned} C = D \setminus \overset{\circ}{D} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \\ &= \{(\cos t, \sin t) : t \in [0,2\pi]\} \end{aligned}$$

نستنتج من ذلك أنه علينا إيجاد النقاط الحرجة للتابع f والتي تنتمي إلى $\overset{\circ}{D}$، وكذلك ينبغي دراسة التابع على المجموعة C. لتكن الآن (x,y) نقطةٍ حرجةً عندئذٍ تتحقّق المعادلتان

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - x &= 0 \end{aligned}$$

وبحلّ جملة المعادلتين نجد أنّ $(x,y) = (0,0)$ هي النقطة الحرجة الوحيدة للتابع، ويبلغ التابع عندها القيمة $f(0,0) = 0$.

لدراسة التابع على C يكفي أن ندرس التابع $g(t) = f(\cos t, \sin t)$ على المجال $[0,2\pi]$، وبسهولة نجد أنّ g يبلغ حدّه الأدنى عند $\pi / 4$ و $5\pi / 4$ ولدينا $g(\pi / 4) = 3 / 2$ وأنّ g يبلغ حدّه الأعلى عند $3\pi / 4$ و $7\pi / 4$ ولدينا $g(3\pi / 4) = 1 / 2$.

نستنتج إذن، أنّ الحدّ الأدنى للتابع f هو $\inf_D f = 0$ ويبلغه عند النقطة $(0,0)$، وأنّ الحدّ الأعلى للتابع f هو $\sup_D f = 3 / 2$ ويبلغه عند النقطتين $\pm\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2. ليكن التابع

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},(x,y) \mapsto \frac{x}{x^2+y^2+1}$$

والمطلوب إثبات أنّ f يبلغ حدّيه الأدنى والأعلى على $\mathbb{R}^2$.

نلاحظ أنّ التابع f من الصف $\mathcal{C}^1$ على $\mathbb{R}^2$.

نبحث أوّلًا عن النقاط الحرجة للتابع، وهي حلول جملة المعادلتين

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2+1)^2} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-2xy}{(y^2+x^2+1)^2} &= 0 \end{aligned}$$

فنجد أنّ للتابع نقطتين حرجتين فقط هما $A=(-1,0)$ و $B=(1,0)$، وأنّ

$f(B)=\dfrac{1}{2}, f(A)=-\dfrac{1}{2}$.

لنثبت الآن أنّ f يبلغ حدّيه الأدنى والأعلى على $\mathbb{R}^2$. من المتراجحة

$\dfrac{r}{r^2+1} = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+1} \geq \left|f(x,y)\right|$ حيث $r=\sqrt{x^2+y^2}$، ومن حقيقة

أنّ $0 = \lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{r}{1+r^2}$، نستنتج وجود $R>1$ يحقّق الشرط

$$\sqrt{x^2+y^2} > R \Rightarrow \left|f(x,y)\right| < \frac{1}{2}$$

ولأنّ f مستمرّ على المجموعة $D_R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq R\}$

المتراصّة، فإنّه يبلغ حدّيه الأعلى والأدنى على هذه المجموعة فيوجد C و D من

D_R بحيث:

$$\forall(x,y)\in D_R, f(C)\leq f(x,y)\leq f(D)$$

ولمّا كان $A,B\in D_R$، فإنّ $f(D)\geq\dfrac{1}{2}, f(C)\leq-\dfrac{1}{2}$، ولكن إذا كان

$\sqrt{x^2+y^2}>R$ ، فإنّ $f(C)\le -\dfrac{1}{2}<f(x,y)<\dfrac{1}{2}\le f(D)$ وعليه يتحقّق الشرط

$$\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2, f(C)\le f(x,y)\le f(D)$$

أي إنّ f يبلغ حدّيه الأعلى والأدنى على $\mathbb{R}^2$ عند النقطتين C و D على الترتيب. ولمّا كانت كلّ من C و D نقطة حرجة بالنسبة للتابع f استنتجنا أنّ $A=C, B=D$ ، ومن حيث النتيجة لدينا

$$\min_{\mathbb{R}^2} f=f(-1,0)=-\frac{1}{2},\qquad \max_{\mathbb{R}^2} f=f(1,0)=\frac{1}{2}$$

3.4. تطبيق: مستقيم الارتجاع

ليكن $n\ge 2$ عددًا طبيعيًّا، و $P=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)\}$ مجموعة من n نقطة في المستوي $\mathbb{R}^2$. نفترض أنّ العناصر $x_1,x_2,\cdots,x_n$ ليست كلّها متساوية، ونريد إيجاد معادلة مستقيم $y=ax+b$ يكون أقرب ما يمكن "بطريقة ما" إلى النقاط السابقة مجتمعةً. نسمّي هذا المستقيم **مستقيم الارتجاع** الموافق لمجموعة النقاط P .

إحدى الوسائل المستخدمة هي البحث عن $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ بحيث يكون المقدار

$$f(a,b)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)^2$$

أصغر ما يمكن، أي إيجاد $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ بحيث يكون $f(\alpha,\beta)\le f(a,b)$ وذلك أيًّا كان $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

لأجل سلاسة كتابة العبارات سنعمد إلى استخدام الرموز: $\overline{x}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$ و $\overline{x^2}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ و $\overline{xy}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$. وبذلك يُكتب التابع بالصيغة:

$$f(a,b) = \overline{x^2}\cdot a^2 + 2\overline{x}ab + b^2 - 2\overline{xy}a - 2\overline{y}b + \overline{y^2}$$
$$= \left\langle M\cdot\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\right\rangle - 2\overline{xy}a - 2\overline{y}b + \overline{y^2}$$

حيث M هي المصفوفة

$$M = \begin{pmatrix}\overline{x^2} & \overline{x}\\ \overline{x} & 1\end{pmatrix}$$

وهذه المصفوفة حقيقيّة متناظرة فيوجد أساس متعامد نظامي (v_1, v_2) للفضاء $\mathbb{R}^2$ من أشعّتها الذاتيّة، ولمّا كان كلّ من محدّد وأثر المصفوفة M موجبًا تمامًا استنتجنا أنّ لها قيمتين ذاتيّتين $\mu \geq \lambda > 0$، وإذا كان (A,B) ممثّلًا لمركبتيّ العنصر (a,b) في الأساس (v_1, v_2) أي $(a,b) = Av_1 + Bv_2$ استطعنا كتابة f بصيغة مختصرة

$$f(a,b) = \lambda(A - A_0)^2 + \mu(B - B_0)^2 + C_0$$

حيث A_0, B_0, C_0 أعدادٌ حقيقيّة. وعليه فإنّ:

$$f(a,b) \geq \lambda\Big[(A - A_0)^2 + (B - B_0)^2\Big] + C_0$$

ومن ثمّ فإنّ $f(a,b)$ يسعى إلى $+\infty$ عندما يسعى $(A - A_0)^2 + (B - B_0)^2$ إلى $+\infty$ أو بشكلٍ أوضح عندما يسعى $a^2 + b^2$ إلى $+\infty$. وهذا يُثبت أنّ f يبلغ حدّه الأدنى عند نقطةٍ $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$، وهذه النقطة لا بدّ أن تكون نقطةً حرجةً بالنسبة للتابع f.

لنبحث إذن عن النقاط الحرجة للتابع f.

لتكن $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ نقطة حرجة عندئذٍ

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) = 2\overline{x^2}a + 2\overline{x}b - 2\overline{xy} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial b}(a,b) = 2\overline{x}a + 2b - 2\overline{y} = 0$$

وبحلّ جملة المعادلتين السابقتين نجد أنّ للتابع f نقطةً حرجةً وحيدةً (α, β) حيث

$$\alpha = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}, \beta = \overline{y} - \alpha\overline{x}$$

ملاحظة 4. يمكن فهم المسألة السابقة على أنّها إيجاد أقرب عنصرٍ من الفضاء المولّد بالجملة $(1,x)$ إلى مجموعة النقاط، وبهذه الطريقة يمكننا تعميم الفكرة عل النحو الآتي: لتكن $(e_1,e_2,\cdots,e_m)$ جملة حرّة من التوابع الحقيقيّة لمتحوّل حقيقيّ واحد، وليكن $V=\mathrm{vect}(e_1,e_2,\cdots,e_m)$. نريد إيجاد أقرب عنصر من V إلى مجموعة النقاط $\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)\}$ أو إيجاد أعدادٍ حقيقيّة $a_1,a_2,\cdots,a_m$ بحيث يكون المقدار

$$f(a_1,a_2,\cdots,a_m)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(a_1e_1(x_i)+a_2e_2(x_i)+\cdots+a_me_m(x_i)-y_i\right)^2$$

أصغر ما يمكن، وتُعالج هذه المسألة بطريقة مشابهة لتلك المتعلّقة بمستقيم الارتجاع.

ثانيًا: التوابع الشعاعيّة لعدّة متحوّلات

1. قابليّة المفاضلة

تعريف 10. لتكن A مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{R}^n$، و $a\in A$، و

$$f:A\to\mathbb{R}^m,x\mapsto(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x))$$

تابعًا لعدّة متحوّلات. نقول إنّ f **قابلٌ للمفاضلة** عند a، إذا وفقط إذا، كان كلّ تابع $f_j:A\to\mathbb{R}$ ($1\le j\le m$)، قابلًا للمفاضلة عند a، ونسمّي التطبيق الخطّيّ

$$\mathrm{d}f(a):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m,h\mapsto(\mathrm{d}f_1(a)(h),\mathrm{d}f_2(a)(h),\cdots,\mathrm{d}f_m(a)(h))$$

تفاضل f عند a.

ونسمّي مصفوفة هذا التطبيق في الأساسين القانونيّين **مصفوفة جاكوبي** للتابع f عند a أي

$$\mathrm{J}f(a)=\mathrm{mat}\left(\mathrm{d}f(a),\mathcal{E}_n,\mathcal{E}_m\right)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le n}}$$

وفي الحالة الخاصّة عندما يكون $m=n$، فإنّنا نرمز بالرمز

$$\frac{\partial(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}(a)=\det\big(\mathrm{J}f(a)\big)$$

إلى **محدّد جاكوبي** للتابع f عند a.

وإذا كان التابع f قابلًا للمفاضلة عند كلّ عنصرٍ $x\in A$، قلنا إنّ f قابلٌ للمفاضلة على A، وعرّفنا التابع

$$\mathrm{d}f: A\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m), x\mapsto \mathrm{d}f(x)$$

وأسميناه **تفاضل** f.

وأخيرًا، إذا كان $p\in\mathbb{N}$، فإنّنا نقول إنّ f من الصفّ $\mathcal{C}^p$ إذا وفقط إذا كانت كلّ مركّبة من مركّباته من الصفّ $\mathcal{C}^p$.

تعريف 11. (المؤثّرات التفاضليّة الشهيرة) لتكن A مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{R}^n$.

1. ليكن $f:A\to\mathbb{R}$ تابعًا يقبل مشتقّات جزئيّة بالنسبة لكل متحول من متحوّلاته.
   نعرّف التابع $\mathrm{grad}(f)$ على A بالصيغة:

$$\nabla f(x)={}^t\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x),\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

2. ليكن $f:A\to\mathbb{R}^n$ تابعًا يقبل مشتقّات جزئيّة بالنسبة لكل متحول من متحوّلاته.
   نعرّف التابع $\mathrm{div}(f)$ بالشكل:

$$\mathrm{div}(f): A\to\mathbb{R}, x\mapsto \mathrm{div}(f)(x)=tr(\mathrm{J}f(x))=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x)$$

3. نفترض $n=3$، وليكن $f:A\to\mathbb{R}^n$ تابعًا يقبل مشتقّات جزئيّة بالنسبة لكل متحول من متحوّلاته. نعرّف التابع $\mathrm{rot}(f)$ على A ويأخذ قيمه في $\mathbb{R}^3$ بالصيغة:

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}(f)(x)&=\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(x)-\frac{\partial f_2}{\partial x_3}(x),\frac{\partial f_1}{\partial x_3}(x)-\frac{\partial f_3}{\partial x_1}(x),\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x)-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x)\right)\\&=(\nabla\wedge f)(x)\end{aligned}$$

إنّ إثبات المبرهنتين الآتيتين بسيط ومتروك للقارئ.

مبرهنة 10. لتكن A مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{R}^n$، و $a \in A$، و $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$، و $f, g : A \to \mathbb{R}^m$ تابعين قابلين للمفاضلة عند a، عندئذٍ يكون التابع $\lambda f + \mu g$ قابلًا للمفاضلة عند a ويكون $\mathrm{d}(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda \mathrm{d}f(a) + \mu \mathrm{d}g(a)$.

مبرهنة 11. لتكن A مجموعةً مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^n$، و $f : A \to \mathbb{R}^m$ تابعًا لعدّة متحوّلات، و $a \in A$، عندئذٍ تكون القضايا الثلاث الآتية متكافئة:

① f قابل للمفاضلة عند a.

② يوجد تطبيقٌ خطّي $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ بحيث يقبل التابع

$$h \mapsto \frac{f(a+h) - f(a) - u(h)}{\|h\|}$$

الصفرَ نهايةً له عندما يسعى h إلى الصفر بقيم مختلفة عنه.

③ يوجد جوار W للصفر في $\mathbb{R}^n$ وتابعٌ $\varepsilon : W \to \mathbb{R}^m$ بحيث $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ و تابعٌ $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ويتحقّق الشرط:

$$\forall h \in W, f(a+h) = f(a) + u(h) + \|h\| \varepsilon(h)$$

مبرهنة 12. لتكن A مجموعةً مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^n$، و B مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{R}^m$، وليكن $f : A \to B$ تابعًا قابلًا للمفاضلة عند $a \in A$، وليكن $g : B \to \mathbb{R}^p$ تابعًا قابلًا للمفاضلة عند $b = f(a)$. عندئذٍ يكون التابع $g \circ f$ قابلًا للمفاضلة عند a، ويكون

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g(b) \circ \mathrm{d}f(\mathrm{a})$$

الإثبات

نضع $v = \mathrm{d}g(b), u = \mathrm{d}f(a)$ لتسهيل الكتابة. يوجد، بحسب المبرهنة السابقة، جوار U للصفر في $\mathbb{R}^n$ وتابعٌ $\varepsilon : U \to \mathbb{R}^m$ بحيث $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ ويتحقّق

$$\forall h \in U, a + h \in A \wedge f(a+h) = f(a) + u(h) + \|h\| \varepsilon(h)$$

وجوارٌ V للصفر في $\mathbb{R}^m$ وتابعٌ $\psi : V \to \mathbb{R}^p$ بحيث $\lim\limits_{k \to 0} \psi(k) = 0$ ويتحقّق

$$\forall k \in V, b+k \in B \wedge g(b+k) = g(b) + v(k) + \|k\|\psi(k)$$

نعرّف التابع

$$K : U \to \mathbb{R}^m, h \mapsto u(h) + \|h\|\varepsilon(h)$$

من الواضح أنّ $\lim_{h\to 0} K(h) = 0$ ، فيوجد W جوارٌ للصفر في $\mathbb{R}^n$ بحيث

$$\forall h \in W, K(h) \in V \wedge b + K(h) \in B \wedge \|\varepsilon(h)\| \le 1$$

نلاحظ أنّ

$$\begin{aligned} \forall h \in W, \|K(h)\| &= \left\|u(h) + \|h\|\varepsilon(h)\right\| \\ &\le \|u(h)\| + \|h\|\|\varepsilon(h)\| \le \left(\|u\| + 1\right)\|h\| \end{aligned}$$

نستطيع إذن أن نكتب $K(h) = \|h\|\psi_1(h)$ حيث ψ_1 تابعٌ محدود على W.

من جهةٍ أخرى نرى أنّه مهما يكن h من W يتحقّق

$$\begin{aligned} g\circ f(a+h) &= g(b + K(h)) \\ &= g(b) + v(K(h)) + \|K(h)\|\psi(K(h)) \\ &= g(b) + v(u(h)) + \|h\| v\big(\varepsilon(h)\big) + \|K(h)\|\psi(K(h)) \\ &= g(b) + v(u(h)) + \|h\|\underbrace{\Big(v\big(\varepsilon(h)\big) + \psi_1(h)\cdot\psi(K(h))\Big)}_{\varphi(h)} \\ &= g\circ f(a) + v\circ u(h) + \|h\|\varphi(h) \end{aligned}$$

وبملاحظة أنّ $\lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0$ ، نستنتج استنادًا إلى المبرهنة السابقة أنّ $g\circ f$ قابل للمفاضلة عند a وأنّ $\mathrm{d}(g\circ f) = v\circ u = \mathrm{d}g(b)\circ \mathrm{d}f(\mathrm{a})$ ، وهذا يُكمل إثبات المبرهنة.

نتيجة: في هذه الحالة نستنتج مصفوفة جاكوبي لتركيب تابعين:

$$\mathrm{J}(g\circ f)(a) = \mathrm{J}g\big(f(a)\big)\times \mathrm{J}f(a)$$

والتي تُكتب بالتفصيل كما يأتي:

$$\forall i \in \mathbb{N}_p, \forall j \in \mathbb{N}_n, \frac{\partial (g\circ f)_i}{\partial x_j}(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}\big(f(x)\big)\cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x)$$

2. قاعدة السلسلة في الاشتقاق

لتكن A مجموعةً مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^n$ ، و I مجالًا مفتوحًا غير خالٍ من $\mathbb{R}$ ، و $f : A \to \mathbb{R}$ تابعًا قابلًا للمفاضلة على A (اشتقاقيًّا). وليكن

$$\varphi : I \to A, t \mapsto \left(\varphi_1(t), \varphi_n(t), \cdots, \varphi_n(t)\right)$$

تابعًا قابلًا للمفاضلة على I . حسب المبرهنة السابقة نجد أنّ التابع $f \circ \varphi$ قابل للمفاضلة على I ، وتتحقّق العلاقة المهمّة الآتية:

$$\forall t \in I, (f \circ \varphi)'(t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i'(t) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t))$$

3. تطبيق: اشتقاق تابع معرّف بواسطة تكامل

ليكن I و J مجالين مفتوحين غير خاليين من $\mathbb{R}$ ، و $a \in J$ و $b : J \to I$ تابعًا اشتقاقيًّا، وليكن التابع $f : J \times I \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto f(x,t)$. نفترض أنّ f تابع مستمرّ وأنّه يقبل مشتقًّا جزئيًّا مستمرًّا بالنسبة للمتحوّل x . عندئذٍ يقبل التابع

$$F : J \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$$

الاشتقاق على J وتتحقّق المساواة

$$\forall x \in J, F'(x) = b'(x) \cdot f(x, b(x)) + \int_a^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

لإثبات ذلك، نعرّف التابع $G : J \times I \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto \int_a^y f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

ليكن $[\alpha, \beta] \subset J$ مجالًا مغلقًا، و $y \in I$. نفترض أنّ $a \le y$ (حيث يمكن العودة إلى هذه الحالة بإضافة عدد ثابت إلى G)، لدينا

- التابع $t \mapsto f(x,t)$ مستمرّ والتكامل $\int_a^y f(x,t)\,\mathrm{d}t$ متقارب.
- التابع $x \mapsto f(x,t)$ اشتقاقيّ على $[\alpha, \beta]$.
- التابع $\frac{\partial f}{\partial x}$ مستمرّ على المجموعة المتراصّة $[\alpha, \beta] \times [a, y]$ فهو محدود عليها، فيوجد $M \in \mathbb{R}$ بحيث:

$$\forall (x,t) \in [\alpha,\beta] \times [a,y], \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq M = g(t)$$

والتابع g مستمرّ و $\int_a^y g(t)\,\mathrm{d}t$ متقارب.

نستنتج إذن حسب مبرهنة اشتقاق التكاملات التابعة لوسيط، أن G يقبل مشتقًّا جزئيًّا بالنسبة للمتحوّل x، وأنّ $\frac{\partial G}{\partial x}(x,y) = \int_a^y \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$، وبسبب استمرار التابع $t \mapsto f(x,t)$ نستنتج أنّ G يقبل مشتقًّا جزئيًّا بالنسبة للمتحوّل y، وأنّ $\frac{\partial G}{\partial y}(x,y) = f(x,y)$، وأنّ هذا المشتقّ مستمرّ.

نستنتج أنّ G من الصف $\mathcal{C}^1$ فهو قابل للمفاضلة على $J \times I$.

لدينا $F(x) = G(x,b(x))$. إنّ التابع $x \mapsto (x,b(x))$ الذي يأخذ قيمه في $J \times I$ اشتقاقيّ على J، ورأينا أنّ G قابل للمفاضلة على $J \times I$، فيمكن إذن تطبيق قاعدة السلسلة لنجد

$$\forall x \in J, F'(x) = b'(x) f(x,b(x)) + \int_a^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

وهو المطلوب إثباته. ■

نتيجة

إذا كان $F : J \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ حيث $a,b : J \to I$ تابعان اشتقاقيّان، فإنّ F اشتقاقيّ على J وأيّا كان $x \in J$ تحقّقت المساواة:

$$F'(x) = b'(x) \cdot f(x,b(x)) - a'(x) \cdot f(x,a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$$

إنّ للمبرهنة الآتية أهميّة كبيرة وخاصّة في تحديد طبيعة نقطة حرجة.

مبرهنة 13. لتكن A مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{R}^n$، و $f : A \to \mathbb{R}$ تابعٌ من الصف $\mathcal{C}^2$ و $a \in A$، عندئذٍ يوجد $0 < \delta$ بحيث $\overline{B}(a,\delta) \subset A$، وتابعٌ $\varepsilon : \overline{B}(0,\delta) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ يقبل الصفر نهايةً له عند $0 \in \mathbb{R}^n$. بحيث تتحقّق المساواة

$$\begin{aligned} f(a+h) = f(a) &+ \sum_{1\le i\le n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\big(a\big) h_i h_j + \varepsilon(h)\cdot \left\|h\right\|^2 \end{aligned}$$

وذلك لمّا $h \in \bar{B}(0,\delta)$.

الإثبات

لمّا كانت A مجموعةً مفتوحة، فإنّه يوجد $0<\delta$ بحيث $\bar{B}(a,\delta)\subset A$. ليكن $h\in \bar{B}(0,\delta)$ عندئذٍ $a+h\in \bar{B}(a,\delta)\subset A$. نضع

$$\Delta(h) = f(a+h) - f(a) - \sum_{1\le i\le n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$$

$$\begin{aligned} R(h) &= f(a+h) - f(a) \\ &\quad - \sum_{1\le i\le n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i - \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\big(a\big) h_i h_j \end{aligned}$$

وكذلك نعرّف التابع φ على المجال $[0,1]$ بالصيغة:

$$\varphi(t) = f(a+th) - f(a) + (1-t)\cdot \sum_{1\le i\le n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th) h_i$$

من الواضح أنّ φ من الصف $\mathcal{C}^1$ على $[0,1]$ ونجد بحسابٍ بسيط أنّ:

$$\forall t\in[0,1], \varphi'(t) = (1-t)\cdot \sum_{1\le i,j\le n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th) h_i h_j$$

نستنتج من ذلك أنّ:

$$\begin{aligned} \Delta(h) &= \varphi(1) - \varphi(0) \\ &= \int_0^1 \varphi'(t)\mathrm{dt} \\ &= \sum_{1\le i,j\le n} h_i h_j \int_0^1 (1-t)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th)\right)\mathrm{dt} \end{aligned}$$

وبملاحظة أنّ $\int_0^1 (1-t)\,\mathrm{dt} = \frac{1}{2}$ نجد أنّ

$$\begin{aligned} R(h) &= \sum_{1\le i,j\le n} h_i h_j \int_0^1 (1-t)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)\mathrm{dt} \\ &= \sum_{1\le i,j\le n} h_i h_j r_{ij}(h) \end{aligned}$$

حيث $r_{ij}(h) = \displaystyle\int_0^1 (1-t)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)\mathrm{dt}$.

لنثبت أنّ $\lim\limits_{h\to 0} r_{ij}(h) = 0$. لهذا الغرض نأخذ متتالية $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ من عناصر $\overline{B}(0,\delta)$ متقاربة من الصفر في $\mathbb{R}^n$. إنّ $r_{ij}(x_m) = \int_0^1 K_m(t)\,\mathrm{dt}$ حيث

$$K_m(t) = (1-t)\cdot\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+t\cdot x_m) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)$$

إنّ (K_m) متتالية من التوابع المستمرّة على $[0,1]$ متقاربة ببساطة من التابع الصفري، ولمّا كان $(h,t) \mapsto \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th)$ تابعًا مستمرًّا على المجموعة $\overline{B}(0,\delta)\times[0,1]$ المتراصّة، فإنّه يوجد عددٌ $M > 0$ بحيث أيًّا كان $(h,t)\in \overline{B}(0,\delta)\times[0,1]$، كان:

$$\left|(1-t)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+th) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)\right| \le M$$

ومنه $\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in[0,1], \left|K_m(t)\right| \le M$ ، وبتطبيق مبرهنة لوبيغ نجد أنّ

$$\lim_{m\to\infty} r_{ij}(x_m) = \lim_{m\to\infty}\int_0^1 K_m(t)\,\mathrm{dt} = \int_0^1 0\,\mathrm{dt} = 0$$

ومن ثمّ فإنّ $\lim\limits_{h\to 0} r_{ij}(h) = 0$.

لنعرّف الآن التابعَ

$$\varepsilon : \overline{B}(0,\delta) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, h \mapsto \begin{cases} \dfrac{R(h)}{\|h\|^2}, & h \neq 0 \\ 0, & h = 0 \end{cases}$$

لمّا كانت التوابع $h \mapsto h_i$ خطّيّة ومستمرّة، فإنّه يوجد عددٌ $0 < C$ بحيث

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \forall j \in \mathbb{N}_n, \forall h \in \mathbb{R}^n, \left|h_i h_j\right| \leq C \|h\|^2$$

وبملاحظة أنّ

$$\forall h \in \overline{B}(0,\delta), \left|\varepsilon(h)\right| \leq C \cdot \sum_{1 \leq i,j \leq n} \left|r_{ij}(h)\right|$$

نجد أنّ $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ وأنّ المساواة

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + \varepsilon(h) \cdot \|h\|^2$$

محقّقة وبذلك يكتمل إثبات المبرهنة. ■

تعريف 12. لتكن A مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{R}^n$، و $f : A \to \mathbb{R}$ تابعًا من الصف $\mathcal{C}^2$ على A، وليكن $a \in A$. نسمّي المصفوفة المربّعة من $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\mathrm{H}f(a) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ **مصفوفة هِس** Hesse للتابع f عند النقطة a.

وهي مصفوفة حقيقيّة متناظرة لأنّ f من الصف $\mathcal{C}^2$.

وفي ضوء التعريف السابق يمكن صياغة نتيجة المبرهنة الأخيرة بالشكل

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot (h) + \frac{1}{2}\left\langle \mathrm{H}f(a) \cdot h, h \right\rangle + \varepsilon(h) \cdot \|h\|^2$$

4. عودة إلى النقاط الحرجة والقيم الحدّيّة

مبرهنة 14. لتكن A مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{R}^n$، و $f : A \to \mathbb{R}$ تابعًا من الصف $\mathcal{C}^2$ على A، ولتكن $a \in A$ نقطةً حرجةً للتابع f. لتكن $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ القيم الذاتيّة للمصفوفة $M = \mathrm{H}f(a)$.

1. عندما $0 < \lambda_1$، فإنّ f يبلغ قيمةً صغرى محليًّا عند a.
2. عندما $\lambda_n < 0$، فإنّ f يبلغ قيمةً عظمى محليًّا عند a.
3. عندما $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$، فإنّ a نقطة سرج بالنسبة للتابع f.

الإثبات

نزوّد $\mathbb{R}^n$ بالنظيم $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$.

لمّا كانت المصفوفة $\mathrm{H}f(a)$ متناظرة، فيوجد أساس متعامد نظامي $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ من أشعّتها الذاتيّة أي يحقّق $\forall i \in \mathbb{N}_n, \mathrm{H}f(a)\cdot v_i = \lambda_i \cdot v_i$. فإذا كان $h = \sum_{i=1}^{n} h_i \cdot v_i$ عنصرًا من $\mathbb{R}^n$ كان

$$\|h\|^2 = \sum_{i=1}^{n} h_i^2$$
$$\langle \mathrm{H}f(a)\cdot h, h\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot h_i^2$$

حسب المبرهنة 9. يوجد $0 < \delta$ بحيث $\overline{B}(a,\delta) \subset A$ وتابعٌ حقيقيّ ε معرّف على $\overline{B}(0,\delta) \subset \mathbb{R}^n$ يقبل الصفر نهايةً له عند $0 \in \mathbb{R}^n$. بحيث تتحقّق المساواة

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + df(a)\cdot(h) + \frac{1}{2}\langle \mathrm{H}f(a)\cdot h, h\rangle + \varepsilon(h)\cdot\|h\|^2 \\ &= f(a) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot h_i^2 + \varepsilon(h)\cdot\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \end{aligned}$$

وذلك عندما $h \in \overline{B}(0,\delta)$.

ومنه

$$\begin{aligned}\Delta(h) &= f(a+h)-f(a)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \cdot h_i^2 + \varepsilon(h)\cdot\sum_{i=1}^{n}h_i^2\end{aligned}$$

1. عندما $0 < \lambda_1$، لدينا مهما يكن $h \in B(0,\delta)$:

$$\Delta(h) \geq \left(\frac{\lambda_1}{2}+\varepsilon(h)\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}h_i^2$$

ولكن $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$، فيوجد $0<\eta\leq\delta$ بحيث $\|h\|<\eta \Rightarrow |\varepsilon(h)|<\frac{\lambda_1}{4}$،

ومنه $\|h\|<\eta \Rightarrow |\Delta(h)| \geq \frac{\lambda_1}{4}\cdot\sum_{i=1}^{n}h_i^2$، ومن ثمّ فإنّ f يبلغ قيمةً صغرى محليًّا عند a.

2. عندما $\lambda_n < 0$، لدينا مهما يكن $h \in B(0,\delta)$:

$$\Delta(h) \leq \left(\frac{\lambda_n}{2}+\varepsilon(h)\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}h_i^2$$

ولكن $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$، فيوجد $0<\eta\leq\delta$ بحيث

$\|h\|<\eta \Rightarrow |\varepsilon(h)|<\frac{-\lambda_n}{4}$، ومنه $\|h\|<\eta \Rightarrow |\Delta(h)| \geq \frac{-\lambda_n}{4}\cdot\sum_{i=1}^{n}h_i^2$،

ومن ثمّ فإنّ f يبلغ قيمةً عظمى محليًّا عند a.

3. عندما $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$، يوجد $0<\delta_1$ بحيث

$$0<t<\delta_1 \Rightarrow |\varepsilon(tv_1)| < \frac{-\lambda_1}{4}, |\varepsilon(tv_n)| < \frac{\lambda_n}{4}$$

ومنه

$$0<t<\delta_1 \Rightarrow \Delta(tv_1) < \frac{\lambda_1}{4}t^2 < 0, \Delta(tv_n) > \frac{\lambda_n}{4}t^2 > 0$$

فالتابع Δ يغيّر إشارته في أيّ جوارٍ للصفر، ومن ثمّ فإنّ a نقطة سرج بالنسبة للتابع f. ■

ملاحظة 5. في الحالات التي لم تُذكر في المبرهنة السابقة، نحتاج أساليب أخرى لتحديد طبيعة النقطة الحرجة.

1.4. دراسة القيم الحدّيّة محليًّا لتابعٍ لمتحوّلين

لتكن A مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{R}^2$، و $f : A \to \mathbb{R}$ من الصف $\mathcal{C}^2$ على A، ولتكن $a \in A$ نقطةً حرجةً للتابع f. ولتكن $Hf(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$، ولتكن $\lambda \leq \mu$ قيمتيها الذاتيّتين. نعلم من دراستنا السابقة أنّ

$$\lambda\mu = \det\big(Hf(a)\big) = rt - s^2, \lambda + \mu = \operatorname{Tr}\big(Hf(a)\big) = r + t$$

فإذا كان المقدار $rt - s^2$ موجبًا تمامًا كانت القيمتان الذاتيّتان من إشارة واحدة هي إشارة r، أمّا إذا كان $rt - s^2$ سالبًا تمامًا، كانت القيمتان الذاتيّتان من إشارتين مختلفتين، ومنه نستنتج ما يأتي

1. عندما $rt - s^2 > 0$ و $r > 0$، فإنّ f يبلغ قيمةً صغرى محليًّا عند a.
2. عندما $rt - s^2 > 0$ و $r < 0$، فإنّ f يبلغ قيمةً عظمى محليًّا عند a.
3. عندما $rt - s^2 < 0$، فإنّ a نقطة سرج بالنسبة للتابع f.

أمّا في حالة $rt - s^2 = 0$، فيجب البحث عن طريقةٍ أخرى لتحديد طبيعة النقطة الحرجة.

مثال

ليكن التابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 + xy^2 - x$.

إنّ f من الصف $\mathcal{C}^2$ على مجموعة تعريفه، والنقاط الحرجة الموافقة له هي حلول جملة المعادلتين

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 + y^2 - 1 &&= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2xy &&= 0 \end{aligned}$$

وبحلّ الجملة السابقة نجد أنّ لها أربعة حلول

$$A=(0,-1),B=(0,1),C=(-1/\sqrt{3},0),D=(1/\sqrt{3},0)$$

تمثّل كلّ النقاط الحرجة للتابع f .

لتحديد طبيعة تلك النقاط نحسب المشتقّات الجزئيّة من المرتبة الثانية فنجد

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6x, \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=2y, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2x$$

نُنشئ الآن الجدول

	r	s	t	$rt-s^2$
A	0	-2	0	-4
B	0	2	0	-4
C	$-2\sqrt{3}$	0	$-2/\sqrt{3}$	4
D	$2\sqrt{3}$	0	$2/\sqrt{3}$	4

الذي يبيّن لنا أنّ كلًّا من A و B نقطة سرج، وأنّ f يبلغ عند C قيمة عظمى محلّيًّا وعند D قيمةً صغرى محليًّا.

مبرهنة 15. (متراجحة التزايدات المحدودة) لتكن A مجموعةً **محدّبةً** مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^n$، و $f:A\to\mathbb{R}^m$. نفترض أنّ f قابل للمفاضلة على A وأنّه يوجد $0\le M$ بحيث: $\forall x\in A, \left\|\mathrm{d}f(x)\right\|_2\le M$ ، عندئذٍ يحقّق f شرط ليبشتز الآتي

$$\forall x,y\in A, \left\|f(y)-f(x)\right\|_2\le M\left\|y-x\right\|_2$$

الإثبات

ليكن x و y عنصرين من A . لنلاحظ أوّلًا أنّه في حالة $f(x)=f(y)$ فإنّ المتراجحة صحيحة وضوحًا، أمّا في الحالة المعاكسة فإنّه أيًّا كان $t\in[0,1]$ كان $(1-t)x+ty$ عنصرًا من A وذلك لأنّ A محدّبة، ويمكننا تعريف التابع

$$\varphi:[0,1]\to\mathbb{R},t\mapsto\left\langle f(x+t(y-x)),f(y)-f(x)\right\rangle$$

إنّ φ مستمرّ على $[0,1]$ وقابلٌ للاشتقاق على $]0,1[$ ، وبحسب مبرهنة التزايدات المحدودة الخاصّة بالتوابع لمتحوّل واحدٍ، يوجد $\theta\in]0,1[$ بحيث $\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(\theta)$. ولكن

$$\varphi'(t) = \left\langle \mathrm{d}f(x + t(y - x))(y - x), f(y) - f(x) \right\rangle$$

فإذا كان $t \in [0,1]$ ، كان

$$\begin{aligned} \left|\varphi'(t)\right| &\le \left\|\mathrm{d}f(x + t(y - x))\right\|_2 \left\|y - x\right\|_2 \left\|f(y) - f(x)\right\|_2 \\ &\le M\left\|y - x\right\|_2 \left\|f(y) - f(x)\right\|_2 \end{aligned}$$

ولكن

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \left\langle f(y) - f(x), f(y) - f(x) \right\rangle = \left\|f(y) - f(x)\right\|_2^2$$

ومنه

$$\left\|f(y) - f(x)\right\|_2^2 \le M\left\|y - x\right\|_2 \cdot \left\|f(y) - f(x)\right\|_2$$

ومن ثمّ $\left\|f(y) - f(x)\right\|_2 \le M\left\|y - x\right\|_2$ ، وهذا يُتمّ إثبات المبرهنة. ■

نتيجة

لتكن A مجموعةً **محدّبةً** مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^n$ ، و $f : A \to \mathbb{R}$. نفترض أنّ f قابل للمفاضلة على A وأنّ $\forall x \in A, df(x) = 0$ عندئذٍ يكون f ثابتًا على A حيث يمكن أن نأخذ $M = 0$ في المبرهنة السابقة لنجد أنّ $\forall x, y \in A, f(x) = f(y)$.

6. مبرهنة التابع العكسي المحلّي

مبرهنة 16. لتكن A مجموعةً مفتوحة غير خالية في $\mathbb{R}^n$ ، و $f : A \to \mathbb{R}^n$ من الصف $\mathcal{C}^1$. لتكن $a \in A$ و $b = f(a)$. نفترض أنّ التطبيق $\mathrm{d}f(a)$ تقابل خطّيّ. عندئذٍ

1. توجد مجموعتان مفتوحتان U, V في $\mathbb{R}^n$ بحيث $b \in V, a \in U$ ويكون مقصور f على U تقابلًا من U إلى V . ليكن g تابعه العكسي.
2. إنّ $g : V \to U$ من الصف $\mathcal{C}^1$ على V ويتحقّق

$$\forall y \in V, \mathrm{d}g(y) = \left[\mathrm{d}f(g(y))\right]^{-1}$$

الإثبات

1. نضع $M = \mathrm{d}f(a)$ ، ونختار $\lambda \in \mathbb{R}$ بحيث $2\lambda \left\| M^{-1} \right\|_2 = 1$.

لمّا كان $\mathrm{d}f$ مستمرًّا، فإنّه توجد كرة مفتوحة $U = B(a,\delta) \subset A$ بحيث

$$\forall x \in U, \left\| \mathrm{d}f(x) - M \right\|_2 < \lambda$$

أيًّا كان $y \in \mathbb{R}^n$ ، نعرّف على A التابع $\varphi(x) = x + M^{-1}(y - f(x))$.

لاحظ أنّ $f(x) = y \Leftrightarrow \varphi(x) = x$.

من جهةٍ أخرى يتضح بسهولة أنّ φ قابلٌ للمفاضلة وأنّ:

$$\forall x \in U, \mathrm{d}\varphi(x) = I - M^{-1} \circ \mathrm{d}f(x) = M^{-1} \circ (M - \mathrm{d}f(x))$$

ومنه:

$$\forall x \in U, \left\| \mathrm{d}\varphi(x) \right\|_2 \leq \left\| M^{-1} \right\|_2 \circ \left\| M - \mathrm{d}f(x) \right\|_2 < \frac{1}{2\lambda}\lambda = \frac{1}{2}$$

فحسب متراجحة التزايدات المحدودة نجد

$$\forall x, y \in U, \left\| \varphi(x) - \varphi(y) \right\|_2 \leq \frac{1}{2} \left\| x - y \right\|_2$$

يتبيّن من ذلك أنّ φ له نقطة ثابتة واحدة على الأكثر، وأنّ المعادلة $y = f(x)$ لها حلّ واحد على الأكثر، أي إنّ مقصور f على U متباين، فهو تقابل من U إلى $V = f(U)$. لنثبت الآن أنّ V مجموعة مفتوحة.

ليكن $y_0 = f(x_0) \in V$ ، و $r > 0$ بحيث $\overline{B}(x_0, r) \subset U$.

سنثبت فيما يأتي أنّ $B(y_0, \lambda r) \subset V$.

ليكن إذن $y \in B(y_0, \lambda r)$. لدينا

$$\left\| \varphi(x_0) - x_0 \right\|_2 = \left\| M^{-1}\left(y - y_0 \right) \right\|_2 < \left\| M^{-1} \right\|_2 \lambda r = \frac{r}{2}$$

إذا كان $x \in \overline{B}(x_0, r)$ فإنّ

$$\begin{aligned}\left\|\varphi(x) - x_0\right\|_2 &\le \left\|\varphi(x) - \varphi(x_0)\right\|_2 + \left\|\varphi(x_0) - x_0\right\|_2 \\ &< \frac{1}{2}\left\|x - x_0\right\|_2 + \frac{r}{2} \\ &\le r\end{aligned}$$

إذن $\varphi(x) \in B(x_0, r)$، وعليه فإنّ التابع $\varphi : \overline{B}(x_0, r) \to \overline{B}(x_0, r)$ يحقّق شروط مبرهنة النقطة الثابتة، فيوجد $x \in \overline{B}(x_0, r)$ بحيث $\varphi(x) = x$ و $y = f(x) \in f\left(\overline{B}(x_0, r)\right) \subset f(U) = V$. وممّا سبق نستنتج أنّ V مجموعة مفتوحة، وهو المطلوب إثباته.

2. ليكن $y \in V$ و $k \in \mathbb{R}^n$ بحيث $y + k \in V$. يوجد $x \in U$ و $h \in \mathbb{R}^n$ بحيث $x + h \in U$ و $y = f(x), y + k = f(x + h)$. لدينا

$$\varphi(x + h) - \varphi(x) = h + M^{-1}\left[f(x) - f(x + h)\right] = h - M^{-1}(k)$$

ولكن $\left\|\varphi(x + h) - \varphi(x)\right\|_2 = \left\|h - M^{-1}(k)\right\|_2 \le \frac{1}{2}\left\|h\right\|_2$، ومنه $\left\|M^{-1}(k)\right\|_2 \ge \frac{1}{2}\left\|h\right\|_2$ ومن ثمّ:

$$\left\|h\right\|_2 \le 2\left\|M^{-1}\right\|_2 \left\|k\right\|_2 = \frac{\left\|k\right\|_2}{\lambda} \qquad (*)$$

من جهةٍ أخرى، وجدنا أنّ $\forall x \in U, \left\|I - M^{-1} \circ \mathrm{d}f(x)\right\|_2 \le \frac{1}{2}$، وعليه فإنّ $\mathrm{d}f(x)$ تقابل خطّيّ. ليكن T تقابله العكسيّ. لدينا

$$g(y + k) - g(y) - T(k) = -T[f(x + h) - f(x) - \mathrm{d}f(x)(h)]$$

ومنه:

$$\frac{\left\|g(y + k) - g(y) - T(k)\right\|_2}{\left\|k\right\|_2} \le \frac{\left\|T\right\|_2}{\lambda} \cdot \frac{\left\|f(x + h) - f(x) - \mathrm{d}f(x)(h)\right\|_2}{\left\|h\right\|_2}$$

وحسب $(*)$ نجد أنّه عندما يسعى k نحو الصفر فإنّ h يسعى نحو الصفر وعليه

فإنّ الطرف الأيمن في المتراجحة الأخيرة يقبل الصفر نهايةً له عندما يسعى k إلى الصفر، وكذلك، من ثمّ، الطرف الأيسر، وهذا يعني أنّ g يقبل المفاضلة عند y وأنّ $\mathrm{d}g(y) = T$ أو $\mathrm{d}g(y) = Inv\left[\mathrm{d}f(g(y))\right]$.

وبملاحظة أنّ التطبيقات $Inv, \mathrm{d}f, g$ كلّها مستمرّة نستنتج أنّ $\mathrm{d}g$ مستمرّ على V، ومن ثمّ فإنّ g من الصفّ $\mathcal{C}^1$ على V، وهذا يُكمل إثبات المبرهنة. ■

7. مبرهنة التابع الضمني

في هذه الفقرة نعبّر عن العنصر $(x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{m+n}$ بالشكل (x,y) حيث $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ و $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

لتكن A مجموعة مفتوحةً غير خالية من $\mathbb{R}^{m+n}$، و $(a,b) \in A$، و $f : A \to \mathbb{R}^n$ قابلًا للمفاضلة عند (a,b). نرمز بالرمز $\mathrm{d}_{\mathrm{x}} f(a,b)$ إلى تفاضل التابع $x \mapsto f(x,b)$ عند a وبالرمز $\mathrm{d}_{\mathrm{y}} f(a,b)$ إلى تفاضل التابع $y \mapsto f(a,y)$ عند b، وبالرمزين $\mathrm{J}_{\mathrm{x}} f(a,b), \mathrm{J}_{\mathrm{y}} f(a,b)$ إلى مصفوفتيّ جاكوبي الموافقتين. لاحظ أنّ مصفوفة جاكوبي للتابع f عند (a,b) تُكتب كُتليًّا بالشكل $\mathrm{J}f(a,b) = \begin{pmatrix} \mathrm{J}_{\mathrm{x}} f(a,b) & \mathrm{J}_{\mathrm{y}} f(a,b) \end{pmatrix}$.

مبرهنة 17. لتكن A مجموعة مفتوحةً غير خالية من $\mathbb{R}^{m+n}$، و $(a,b) \in A$، و $f : A \to \mathbb{R}^n$ تابعٌ من الصف $\mathcal{C}^1$ يحقّق $f(a,b) = 0$. نفترض أنّ $\mathrm{d}_{\mathrm{y}} f(a,b)$ تقابلٌ خطّيٌّ.

عندئذٍ توجد مجموعتان مفتوحتان $V \subset \mathbb{R}^n$، و $U \subset \mathbb{R}^m$ بحيث $(a,b) \in U \times V \subset A$ وتتحقّق الخاصّة الآتية:

أيًّا كان $x \in U$، يوجد في V عنصرٌ وحيد $y = g(x)$ يحقّق $f(x,y) = 0$، والتابع $g : U \to \mathbb{R}^n, x \mapsto g(x)$ من الصفّ $\mathcal{C}^1$، ويحقّق:

- $g(a) = b$.
- $\forall x \in U, \mathrm{d}g(x) = -\left[\mathrm{d}_{\mathrm{y}} f(x, g(x))\right]^{-1} \circ \mathrm{d}_{\mathrm{x}} f(x, g(x))$

نقول عن g في هذه الحالة إنّه **تابعٌ ضمنيّ** موافق للمعادلة $f(x,y) = 0$.

الإثبات

لنضع $M = \mathrm{d}f(a,b), M_{\mathrm{x}} = \mathrm{d}_{\mathrm{x}}f(a,b), M_{\mathrm{y}} = \mathrm{d}_{\mathrm{y}}f(a,b)$ ولنعرّف التابع

$$F : A \to \mathbb{R}^{m+n}, (x,y) \mapsto \big(x, f(x,y)\big)$$

إنّ F تابعٌ من الصفّ $\mathcal{C}^1$ على A فهو قابل للمفاضلة وتفاضله عند (a,b) هو التطبيق الخطّي

$$L : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^{m+n}, (h,k) \mapsto \big(h, M(h,k)\big)$$

وهو متباين لأنّه عندما $L(h,k) = 0$ فإنّ $h = 0$ وينتج عن ذلك أنّ $M(0,k) = M_y(k) = 0$ ، ولكن M_y تقابل إذن $k = 0$ ، ومن ثمّ فإنّ L تقابلٌ خطّيّ.

يُثبت تطبيق مبرهنة التابع العكسي المحلّي على التابع F عند النقطة (a,b) وجود مجموعتين مفتوحتين V, W في $\mathbb{R}^{m+n}$ بحيث $(a,b) \in V$ و $(a,0) \in W$ بحيث يكون التابع

$$\tilde{F} : V \to W, (x,y) \mapsto F(x,y)$$

تقابلًا من الصفّ $\mathcal{C}^1$ وتقابله العكسي G من الصف $\mathcal{C}^1$ أيضًا.

لنعرّف المجموعة U على أنّها مجموعة العناصر $x \in \mathbb{R}^m$ التي تحقّق $(x,0) \in W$.
لاحظ أنّ $a \in U$.

من الواضح أنّ U مجموعة مفتوحة لأنّ W مفتوحة، وأنّه إذا كان $x \in U$ فيوجد عنصر $(x,y) \in V$ بحيث $(x,0) = F(x,y) = (x, f(x,y))$ ، ومنه $f(x,y) = 0$.

نفترض وجود $y' \in \mathbb{R}^n$ بحيث $(x,y') \in V$ و $f(x,y') = 0$ عندئذٍ $F(x,y') = F(x,y)$ ولمّا كان F متباينًا كان $y = y'$ ، ومنه نستنتج وحدانيّة y ، ونكون بذلك أثبتنا الشقّ الأوّل من المبرهنة.

لنعرّف الآن التابع $g : U \to \mathbb{R}^n$ بحيث تكون صورة $x \in U$ وفق g هي العنصر y الوحيد الذي يحقّق $(x,y) \in V$ و $f(x,y) = 0$.

عندئذٍ $\forall x \in U, F(x, g(x)) = (x,0)$ ، ومنه $(x, g(x)) = G(x,0) = \Phi(x)$. ولمّا كان G من الصف $\mathcal{C}^1$ كان g من الصفّ $\mathcal{C}^1$ أيضًا.

من جهةٍ أخرى، لدينا $\mathrm{d}\Phi(x)(h)=\big(h,\mathrm{d}g(x)(h)\big)$ و $f(\Phi(x))=0$. فيكون المقدار $\mathrm{d}f\big(\Phi(x)\big)\circ\mathrm{d}\Phi(x)(h,\mathrm{d}g(x)(h))$ مساويًا للمقدار

$$\mathrm{d_x}f\big(\Phi(x)\big)(h)+\mathrm{d_y}f\big(\Phi(x)\big)\circ\mathrm{d}g(x)(h)=0$$

إذا كان $x\in U$ و $h\in\mathbb{R}^m$، كان

$$\mathrm{d}g(x)(h)=-\Big[\mathrm{d_y}f\big(\Phi(x)\big)\Big]^{-1}\circ\mathrm{d_x}f\big(\Phi(x)\big)(h)$$

أو

$$\mathrm{d}g(x)=-\Big[\mathrm{d_y}f\big(\Phi(x)\big)\Big]^{-1}\circ\mathrm{d_x}f\big(\Phi(x)\big)$$

كما هو مطلوب. ■

ملاحظة:

يمكن إعادة كتابة المبرهنة السابقة باستخدام مصفوفات جاكوبي على الوجه الآتي:

لتكن A مجموعة مفتوحةً غير خالية من $\mathbb{R}^{m+n}$، و $f:A\to\mathbb{R}^n$ مركّباته $f_1,f_2,\cdots,f_n$ تابعًا من الصف $\mathcal{C}^1$، و $(a,b)\in A$ بحيث $f(a,b)=0$. نفترض أنّ المصفوفة $\mathrm{J_y}f(a,b)$ قلوبة. عندئذٍ تقبل المعادلة $f(x,y)=0$ في المجهول y حلًّا وحيدًا $y=g(x)\in\mathbb{R}^n$ عندما يكون x في جوارٍ U للعنصر a.

وكذلك فإنّ التابع $g:U\to\mathbb{R}^n,x\mapsto g(x)$ من الصفّ $\mathcal{C}^1$، ويحقّق:

$$\forall x\in U,\mathrm{J}g(x)=-\Big[\mathrm{J_y}f(x,g(x))\Big]^{-1}\times\mathrm{J_x}f(x,g(x))$$

وفي الحالة الخاصّة عندما $n=1$ تصبح الصياغة أبسط :

لتكن A مجموعة مفتوحةً غير خالية من $\mathbb{R}^{m+1}$، و $(a,b)\in A$، و $f:A\to\mathbb{R}$ تابعٌ من الصف $\mathcal{C}^1$. نفترض أنّ $f(a,b)=0$، وأنّ $f'_{x_{m+1}}(a,b)\neq 0$. عندئذٍ تقبل المعادلة

$$f(x,y)=0 \qquad \big(E_x\big)$$

بالمجهول y حلًا وحيدًا عندما يكون x في جوارٍ للعنصر a. أي يوجد تابع g من الصف $\mathcal{C}^1$ بحيث يكون $y = g(x)$ هو الحلّ الوحيد للجملة E_x. وفي هذه الحالة يكون

$$g'_{x_i}(x) = -\frac{f'_{x_i}(x, g(x))}{f'_{x_{m+1}}(x, g(x))}$$

وعليه فإنّه إذا كان f من الصف $\mathcal{C}^p$ ($p \geq 1$)، كان g من الصف $\mathcal{C}^p$ أيضًا.

مثال:

ليكن التابع $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + 3y$ المعرّف على $\mathbb{R}^2$، ولنتامّل المعادلة $f(x,y) = 0$ بالمجهول y.

إنّ f تابعٌ من الصفّ $\mathcal{C}^\infty$ على $\mathbb{R}^2$ و $f(0,0) = 0$ كما نلاحظ أنّ $f'_y(0,0) = 3 \neq 0$، فحسب مبرهنة التوابع الضمنيّة يوجد مجالان مفتوحان I, J من $\mathbb{R}$ بحيث $(0,0) \in I \times J$، وتابع $\varphi : I \to J, x \mapsto \varphi(x)$ وحيد من الصفّ $\mathcal{C}^\infty$ ويحقّق

$$\varphi(0) = 0, \forall x \in I, f(x, \varphi(x)) = 0$$

كما تتحقّق المساواة

$$\forall x \in I, \varphi'(x) = -\frac{f'_x(x,\varphi(x))}{f'_y(x,\varphi(x))} = -\frac{2x - \varphi(x)}{2\varphi(x) - x + 3}$$

ولمعرفة سلوك التابع φ بجوار الصفر نجد النشر حتى المرتبة الثانية لهذا التابع فنكتب $\varphi(x) = a + bx + cx^2 + O(x^3)$، ولمّا كان $\varphi(0) = 0$ وجدنا $\varphi(x) = bx + cx^2 + O(x^3)$، ومن المعادلة $f(x,\varphi(x)) = 0$ نجد

$$x^2 + \left(bx + cx^2 + O(x^3)\right)^2 - (x-3)\left(bx + cx^2 + O(x^3)\right) = 0$$

ومنه

$$3bx + (1 + b^2 + 3c - b)x^2 + O(x^3) = 0$$

وبمطابقة أمثال كلّ من x و x^2 نجد $b=0, c=-\dfrac{1}{3}$. أي إنّ

$\varphi(x)=-\dfrac{1}{3}x^2+O(x^3)$ وهذا يعني أنّ التابع φ يبلغ قيمةً عظمى محليًّا عند الصفر.

8. القيم الحدّيّة محليًّا والنقاط الحرجة المقيّدة

مبرهنة 18. (مضاريب لاغرانج) لتكن A مجموعة مفتوحةً غير خالية من $\mathbb{R}^{m+n}$ وليكن $f:A\to\mathbb{R}$، و $g:A\to\mathbb{R}^n, t\mapsto(g_1(t),g_2(t),\cdots,g_n(t))$ تابعين من الصف $\mathcal{C}^1$ على A. لتكن، أخيرًا، $M=\{x\in A, g(x)=0\}$ و $\alpha\in M$.

نفترض أنّ:

1. أيًّا كان $t\in A$ فإنّ رتبة $\mathrm{J}g(t)\in\mathcal{M}_{n\times(m+n)}(\mathbb{R})$، مصفوفة جاكوبي للتابع g عند t، تساوي n.
2. يبلغ التابع $f_{/M}$ مقصور f على M قيمة حدّيّة محليًّا عند α.

عندئذٍ توجد مصفوفة $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$ من $\mathcal{M}_{1\times n}(\mathbb{R})$ بحيث

$$\mathrm{J}f(\alpha)=\Lambda\times\mathrm{J}g(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,\mathrm{J}g_i(\alpha)\qquad(*)$$

نقول عن كلّ نقطة α تحقّق $(*)$ إنّها **نقطة حرجة مقيّدة**، ونسمّي الأعداد $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ **مضاريب لاغرانج** الموافقة لتلك النقطة.

الإثبات

إنّ رتبة $\mathrm{J}g(\alpha)$، تساوي n، ومن ثمّ يمكن اختيار n عمودًا من هذه المصفوفة لتصبح المصفوفة المشكّلة من هذه الأعمدة قلوبةً. وعدا عن إجراء تبديل على عناصر الأساس القانوني، فإنّه يمكن اعتبار أنّ هذه الأعمدة هي التي أدلّتها $\{m+1,m+2,\cdots,m+n\}$؛ أي إنّ المصفوفة $\left(\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(\alpha)\right)_{\substack{1\le i\le n\\ m+1\le j\le m+n}}$ قلوبة.

نضع $x=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ ، $y=(x_{m+1},x_{m+2},\cdots,x_{m+n})$،
و $a=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$ و $b=(\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\cdots,\alpha_{m+n})$ أي $\alpha=(a,b)$.

ليكن التابع $g:A\to\mathbb{R}^n,(x,y)\mapsto(g_1(x,y),g_2(x,y),\cdots,g_k(x,y))$.

إنّ $\mathrm{J}_y g(\alpha)$ قلوبةٌ فيوجد حسب مبرهنة التوابع الضمنيّة جوارٌ U مفتوحٌ للنقطة، وتابعٌ وحيد $\Phi:U\to\mathbb{R}^n$ من الصف $\mathcal{C}^1$ بحيث $\forall x\in U, g(x,\Phi(x))=0$ ، و $b=\Phi(a)$ ،
ويتحقّق أيضًا:

$$\forall x\in U,\mathrm{J}\Phi(x)=-\Big[\mathrm{J}_y g(x,\Phi(x))\Big]^{-1}\times\mathrm{J}_x g(x,\Phi(x))$$

إنّ التابع $h:U\to\mathbb{R},x\mapsto f(x,\Phi(x))$ يبلغ قيمةً حدّيّة محلّيّة عند $a\in U$. عندئذٍ يتحقّق

$$\mathrm{J}_x f(\alpha)+\mathrm{J}_y f(\alpha)\times\mathrm{J}\Phi(a)=0$$

أو بشكل آخر

$$\mathrm{J}_x f(\alpha)=\underbrace{\mathrm{J}_y f(\alpha)\times\Big[\mathrm{J}_y g(\alpha)\Big]^{-1}}_{\Lambda}\times\mathrm{J}_x g(\alpha)=\Lambda\times\mathrm{J}_x g(\alpha)$$

ومن المساواة الواضحة

$$\mathrm{J}_y f(\alpha)=\underbrace{\mathrm{J}_y f(\alpha)\times\Big[\mathrm{J}_y g(\alpha)\Big]^{-1}}_{\Lambda}\times\mathrm{J}_y g(\alpha)=\Lambda\times\mathrm{J}_y g(\alpha)$$

نستنتج أنّ

$$\mathrm{J}f(\alpha)=\Lambda\times\mathrm{J}g(\alpha)$$

وإذا كان $\Lambda=(\lambda_1\quad\lambda_2\quad\cdots\quad\lambda_n)$ ، فإنّ

$$\mathrm{J}f(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mathrm{Jg}_i(\alpha)$$

وهذا ما نريد إثباته. ■

تمرين محلول

جِدِ الحدّين الأعلى والأدنى للتابع $f(x,y)=2x^2+3y^2$ على المجموعة

$$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^4=1\}$$

الحلّ

إنّ K مجموعة متراصّة لأنّها مغلقة ومحدودة، و f مستمرّ عليها فهو يبلغ حدّيه عند نقطتين حرجتين مقيّدتين. لتكن إذن (x,y) نقطة حرجة مقيّدةً عندئذٍ يوجد $\lambda\in\mathbb{R}$ بحيث

$$\begin{cases} 4x=2\lambda x & (1)\\ 6y=4\lambda y^3 & (2)\\ x^2+y^4=1 & (3)\end{cases}$$

نحلّ جملة المعادلات السابقة.

إذا كان $x=0$ نعوّض في (3) فنجد $y=\pm1$ ، والنقطتان $(0,\pm1)$ حرجتان مقيّدتان.

إذا كان $y=0$ نعوّض في (3) فنجد $x=\pm1$ ، والنقطتان $(\pm1,0)$ حرجتان مقيّدتان.

إذا كان $xy\neq0$ كان $\lambda=2$ و $3=4y^2$ ، ومنه $y=\pm\dfrac{\sqrt3}{2}$ ، وبالتعويض في (3) نجد $x=\pm\sqrt7\,/\,4$.

إذن هناك ثمان نقاط حرجة مقيّدة هي $\left(\pm\sqrt7\,/\,4,\pm\sqrt3\,/\,2\right)$ و $(0,\pm1)$ و $(\pm1,0)$ ، وبمقارنة قيم التابع عند كل هذه النقاط الثماني نجد أنّ f يبلغ حدّه الأدنى عند النقطتين $(0,\mp1)$ ويبلغ حدّه الأعلى عند النقاط الأربع $\left(\pm\sqrt7\,/\,4,\pm\sqrt3\,/\,2\right)$ وأنّ

$$\min_{(x,y)\in K} f(x,y)=2,\ \max_{(x,y)\in K} f(x,y)=\frac{25}{8}$$

تمرينات ومسائل

التمرين 1. عيّن D_f مجموعة تعريف التابع f في كلّ حالة من الحالات الآتية، وارسم خطوط التسوية؛ أي مثّل بيانيًّا المجموعات $A_z = \{(x,y) \in D : f(x,y) = z\}$:

① $f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{4}y^2}$.

② $f(x,y) = \log(y - e^x)$.

③ $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{y + xy}{\sqrt{x} - y}}$.

التمرين 2. ليكن $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ تابعين محدودين. أثبت استمرار التابع $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ المعرّف بالصيغة: $H(x,y) = \sup\limits_{t\in[0,1]} (x \cdot f(t) + y \cdot g(t))$

التمرين 3. أثبت أنّه لا يوجد تقابل مستمرّ من الدائرة الواحديّة في $\mathbb{R}^2$ إلى $\mathbb{R}$.

التمرين 4. جدْ تقابلًا مستمرًّا $f : A \to B$ واحسب التابع العكسي في كلّ من الحالات التالية:

.1 $B = \mathbb{R}, A =]0,1[$.

.2 $B = B(a',r'), A = B(a,r) \subset \mathbb{R}^2$.

.3 $B = \mathbb{R}^2, A =]0,1[\times]0,1[$.

التمرين 5. ادرس نهايات التوابع الآتية عند النقطة $(0,0)$ ، واحسبها في حال وجودها:

① $f_1(x,y) = \dfrac{(x^2 - y^2)\ln(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

② $f_2(x,y) = \dfrac{\tan(xy)}{xy}$

③ $f_3(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{xy + x^2}$

④ $$f_4(x,y)=\frac{1}{y^2}e^{\frac{-1}{|x|}}$$

⑤ $$f_5(x,y)=\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ln\left(|x|\right)$$

⑥ $$f_6\left(x,y\right)=\frac{\ln(1+x^2+2y^2)}{x^2+y^2-xy}$$

⑦ $$f_7(x,y)=\frac{e^{xy}-1-xy}{2y^2+x^2}$$

⑧ $$f_8(x,y)=\frac{\sin(x^2)}{|x|+|y|}$$

التمرين 6. ليكن التابع

$$f:\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2\to\mathbb{R}:(x,y)\mapsto\frac{x^ay^b}{x^2+y^2}$$

جد شرطًا لازمًا وكافيًا على $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ حتّى يكون للتابع f نهاية عند $(0,0)$.

التمرين 7. ليكن التابع :

$$\phi:]0,\infty[\times[0,2\pi[\to\mathbb{R}^2\setminus\{0\}:(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

أثبت أنّ ϕ تقابل مستمرّ. هل ϕ^{-1} مستمرّ ؟

التمرين 8. أثبت أنّ التابع f المعرّف بالصيغة

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ , & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

من الصفّ $\mathcal{C}^1$ على $\mathbb{R}^2$.

التمرين 9. ليكن التابع f المعرّف بالصيغة

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ , & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. ادرس استمرار التابع عند $(0,0)$، ومن ثمّ قابليّته للمفاضلة عند هذه النقطة.
2. هل التابع من الصفّ $\mathcal{C}^1$ على $\mathbb{R}^2$؟ ماذا تلاحظ؟

التمرين 10. ليكن التابع f المعرّف بالصيغة

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ , & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

أثبت أنّ f من الصفّ $\mathcal{C}^2$ على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ ولكن ليس على $\mathbb{R}^2$.

التمرين 11. ليكن التابع f المعرّف بالصيغة

$$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}:(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mapsto\int_0^1\sin\left(\sum_{k=1}^n x_k t^k\right)\mathrm{dt}$$

ادرس قابليّة f للمفاضلة في كلّ نقطة من $\mathbb{R}^n$.

التمرين 12. جِدْ- في كلّ حالة من الحالات الآتية- النقاط الحرجة للتابع f وبيّن طبيعة كلّ منها:

1. $f(x,y)=y^2+x\sin y$.
2. $f(x,y)=-x^3+x^2+y^2-xy^2+4x-4$.
3. $f(x,y)=x\ln(x+y)$.
4. $f(x,y)=\dfrac{xy}{1+y^2}$.
5. $f(x,y)=xe^y+ye^x$.
6. $f(x,y)=\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{y^2+(1-x)^2}$.
7. $f(x,y)=x^2y+\ln(1+y^2)$.

8. $f(x,y)=e^{x\sin y}$.

9. $f(x,y,z)=x^4+y^4+2x^2y^2+4(1-x^2-y^2)+z^2$.

التمرين 13. ليكن التابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعرّف بالعلاقة :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x+y)^2}{x^2+y^2} & , \quad x^2+y^2\neq 0\\ 0 & , \quad x^2+y^2=0\end{cases}$$

1. ادرس استمرار التابع f .
2. بيّن أنّ f يقبل مشتقّين جزئيّين $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ، و $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ على $\mathbb{R}^2$ ، واحسبهما.
3. جِدْ مجموعة النقاط الحرجة للتابع f ، وبيّن طبيعة كلّ منها.

التمرين 14. ليكن التابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:(x,y)\mapsto(x+y)e^{-\frac{x^2+y^2}{4}}$.

1. أثبت أنّ $f(x,y)$ يسعى نحو الصفر عندما يسعى $\sqrt{x^2+y^2}$ نحو $+\infty$.
2. استنتج أنّ f يبلغ حدّيه الأدنى والأعلى واحسبهما.

التمرين 15. ليكن التابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:(x,y)\mapsto x^3-x^2+xy^2$ احسب الحدّين الأعلى والأدنى للتابع على المجموعة $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2\leq 1\right\}$.

التمرين 16. ما هي المثلّثات المرسومة داخل دائرة والتي تكون مساحتها أكبر ما يمكن ؟

التمرين 17. أثبت أنّ مقصور التابع $f(x,y)=y^2-3x^2y+2x^4$ على أي مستقيم مارّ بالمبدأ يبلغ قيمة محلّيّة صغرى عند المبدأ. هل يبلغ التابع قيمة محلّيّة صغرى عند المبدأ ؟

التمرين 18. ادرس طبيعة النقاط الحرجة للتابع $f(x,y,z)=(x+z^2)e^{x(1+y^2+z^2)}$ المعرّف على $\mathbb{R}^3$.

التمرين 19. ليكن التابع:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:(x,y)\mapsto\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. أثبت أنّ f من الصفّ $\mathcal{C}^2$ على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.
2. بيّن أنّ f يقبل مشتقّات جزئيّة عند $(0,0)$، ولكنّه لا يقبل المفاضلة عند هذه النقطة.
3. عيّن النقاط الحرجة للتابع f وبيّن طبيعتها.

التمرين 20. ليكن f تابعًا من الصف $\mathcal{C}^2$ على $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ محقّقًا للمعادلة

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)-y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$$

نُجري تغيير المتحوّل $T:(x,y)\mapsto\left(u=xy,v=\dfrac{x}{y}\right)$ ولنضع $f=g\circ T$. اكتب معادلةً $(\mathcal{E})$ يُحقّقها g. احسب $\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)$ واستنتج صيغةً للتابع f.

التمرين 21. (الإحداثيّات القطبيّة). ليكن التابعان:

$$f:]0,\infty[\times[0,2\pi[\to\mathbb{R}^2:(r,\theta)\mapsto(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

و $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:(x,y)\mapsto g(x,y)$ من الصف $\mathcal{C}^2$.

احسب $\Delta g(x,y)=\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y)+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y)$ بدلالة المشتقّات الجزئيّة للتابع $G=g\circ f$.

التمرين 22. ليكن f تابعًا حقيقيًّا قابلًا للمفاضلة على $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$، ولتكن $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. أيًّا كان $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ و $t \in \mathbb{R}_+^*$ نضع $g(t) = t^{-\alpha} f(tx)$. أثبت أنّ g يقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ واحسب مشتقّه $g'(t)$.
2. نقول عن f إنّه متجانس من الدرجة α إذا كان $f(tx) = t^\alpha f(x)$ وذلك أيًّا كان x من $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ و t من $\mathbb{R}_+^*$. أثبت أنّ f متجانس من الدرجة α إذا وفقط إذا تحقق الشرط $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathrm{d}f(x)(x) = \alpha f(x)$. عبّر عن هذا الشرط باستخدام المشتقّات الجزئيّة.
3. أثبت أنّه إذا كان f متجانسًا من الدرجة $\alpha > 1$ فإنّ f يقبل التمديد عند المبدأ إلى تابع قابل للمفاضلة على $\mathbb{R}^n$.
4. ليكن $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ قابلًا للمفاضلة عند المبدأ ومتجانس من الدرجة 1. أثبت أنّ h خطّيّ.

التمرين 23. ليكن التابع

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

1. ماهي صور المستقيمات الموازية لمحوري الإحداثيّات وفق التابع f.
2. عيّن $K = f(\mathbb{R}^2)$ الصورة المباشرة للتابع f.
3. أثبت أنّ محدّد جاكوبي للتابع f غير معدوم عند أيّ نقطة $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. ومع ذلك فإنّ f ليس متباينًا.
4. نضع $a = (0, \pi / 3)$ و $b = f(a)$. عيّن صيغة التابع العكسي المحلّي المستمرّ g في جوار النقطة b. ثمّ احسب كلًّا من $\mathrm{J}f(a)$ و $\mathrm{J}g(b)$.

التمرين 24. ليكن التابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto y^5 + y - x^2$. أثبت وجود تابعٍ $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ من الصف C^∞ يحقّق $\forall x \in \mathbb{R}, f(x, \varphi(x)) = 0$، ثمّ عيّن النشر المحدود حتّى الدرجة الثالثة للتابع φ بجوار الصفر.

التمرين 25. أعد التمرين السابق عندما $f(x,y)=y^3+e^x y-e^{2x}$.

التمرين 26. ليكن $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},(x,y,z)\mapsto x^2+xy+y^2+2z^3+3z$. أثبت وجود تابعٍ φ من الصف C^∞ معرّف على جوارٍ للنقطة $(0,0)$ يحقّق $f(x,y,\varphi(x,y))=0$ ، واحسب المشتقّات من المرتبة الثانية للتابع φ عند النقطة $(0,0)$.

التمرين 27. ليكن التابع

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},(x,y_1,y_2)\mapsto x^2y_1+e^x y_2$$

وليكن $b=(-1,1)$. أثبت وجود جوارٍ V للنقطة b وتابعٍ $g:V\to\mathbb{R}$ من الصفّ C^1 يحقّق $\forall(y_1,y_2)\in V,f(g(y_1,y_2),y_1,y_2)=0$ و $g(b)=0$ وعيّن كلًّا من $\dfrac{\partial g}{\partial y_1}(b)$ و $\dfrac{\partial g}{\partial y_2}(b)$.

التمرين 28.

1. ما هي أكبر قيمة للتابع $f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\prod_{i=1}^{n}x_i$ على المجموعة $K=\left\{\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n:\sum_{i=1}^{n}x_i=1\right\}$.
2. استنتج المتراجحة :

$$\forall\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^n,\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{1/n}\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

التمرين 29. احسب أصغر قيمة للتابع $f\left(x,y,z\right)=2x-y-z$ على المجموعة $K=\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3:x+y+z=x^2+y^2+z^2=1\right\}$.

التمرين 30. ليكن $G:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ من الصف $\mathcal{C}^1$ و $S\subset\mathbb{R}^3$ السطح المعرّف بالمعادلة $G\left(x,y,z\right)=0$. ولتكن $X_0\in\mathbb{R}^3\setminus S$. أوجد شرطًا لازمًا على $X\in S$ حتّى يكون $\left\|X-X_0\right\|_2^2=\min\limits_{Y\in S}\left\|Y-X_0\right\|_2^2$.

التمرين 31. لتكن B مصفوفة من $M_{p\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ بحيث $\operatorname{rg}B=p$ وليكن $b\in\mathbb{R}^n$ و $c\in\mathbb{R}^p$، ولتكن أخيرًا المجموعة $K=\left\{x\in\mathbb{R}^n : Bx=c\right\}$.

عيّن $a\in K$ بحيث $\left\|a-b\right\|_2=\min\limits_{x\in K}\left\|x-b\right\|_2$.

التمرين 32. لتكن $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ مصفوفة حقيقيّة مربّعة متناظرة. نعرّف على $\mathcal{M}_{n\times1}(\mathbb{R})$ التابعَ $\varphi(X)={}^tXAX$.

1. أثبت أنّ φ يقبل المفاضلة وعيّن صيغة $\mathrm{d}\varphi$.
2. أثبت أنّ التابع φ يبلغ حدّيه الأعلى والأدنى على المجموعة $S=\left\{X\in\mathbb{R}^n : \left\|X\right\|_2=1\right\}$.
3. استنتج أنّ للمصفوفة A قيمة ذاتيّة على الأقلّ.

التمرين 33. أثبت أنّ التابع $f(x,y)=xy$ يبلغ حدّيه الأعلى والأدنى على المجموعة $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}$، واحسبهما.

التمرين 34. أثبت أنّ التابع $f(x,y,z)=x+y+z$ يبلغ حدّيه الأعلى والأدنى على المجموعة $S=\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3 : 4x^2+2y^2+z^2=1\right\}$، واحسبهما.

التمرين 35. أثبت أنّ للتابع $f(x,y,z)=x+y+z$ نقطتين حرجتين مقيّدتين على المجموعة $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : -4x^2+2y^2+z^2=1\right\}$ ولكنّه غير محدود على هذه المجموعة.

التمرين 36. لتكن المجموعة $S=\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3 : x^4+y^4+z^4=1\right\}$ والتابع $f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z^2$.

1. أثبت، دون حساب، أنّ للتابع f نقطة حرجة على الأقلّ في S.
2. احسب كلّ النقاط الحرجة للتابع f في S.
3. استنتج أكبر قيمة للتابع f على S.

التمرين 37. لتكن المجموعة $S=\left\{\left(x,y,z\right)\in\mathbb{R}^3 : xyz=1\right\}$ والتابع $f\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z^2$.

1. أثبت، دون حساب، أنّ للتابع f أربع نقاط حرجة على الأقلّ على المجموعة S.
2. احسب كلّ النقاط الحرجة للتابع f على S.
3. استنتج أصغر قيمة للتابع f على S.

الفصل السادس: التكاملات على طريق والتكاملات المضاعفة

1. الأشكال التفاضليّة من المرتبة الأولى

تعريف 1. لتكن A مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{R}^n$. نسمّي **شكلاً تفاضليّاً من المرتبة الأولى** على A كلّ تطبيق ω منطلقه A ومستقرّه $(\mathbb{R}^n)^* = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ فضاء الأشكال الخطّيّة على $\mathbb{R}^n$.

ليكن $(e_1^*,e_2^*,\cdots,e_n^*)$ الأساس الثنوي الموافق للأساس القانوني $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ في $\mathbb{R}^n$. نذكّر بأنّه إذا كان $k \in \mathbb{N}_n$، فإنّ e_k^* هو الشكل الخطّي

$$\mathrm{x}_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (h_1,h_2,\cdots,h_n) \mapsto h_k$$

وهو تابع قابل للمفاضلة وتفاضله هو ذاته لأنّه خطّيّ، وهذا ما يبرّر استخدام الرمز $e_k^* = \mathrm{dx}_k$. وعليه فإنّ كلّ شكل تفاضليّ من المرتبة الأولى ω، يُكتب بالشكل الوحيد $\forall x \in A, \omega(x) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(x)\,\mathrm{dx}_k$، حيث $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ توابع حقيقيّة لعدّة متحوّلات معرّفة على A نسمّيها **مركّبات** الشكل التفاضلي ω.

وإذا كان $p \in \mathbb{N}$، فإنّنا نقول إنّ ω من الصفّ $\mathcal{C}^p$ إذا وفقط إذا كانت جميع مركّباته من الصفّ $\mathcal{C}^p$.

تعريف 2. لتكن A مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{R}^n$، و ω شكلاً تفاضليّاً من المرتبة الأولى على A. نقول إنّ ω **تامّ (أو تفاضل تام)** إذا وفقط إذا وُجد تابعٌ $f : A \to \mathbb{R}$ قابلٌ للمفاضلة بحيث $\mathrm{d}f = \omega$. في هذه الحالة نسمّي f **تابعاً أصليّاً (أو تكاملاً أوّليّاً)** للشكل التفاضلي ω، وهو ليس وحيداً إذ إنّ كلّ تابع من النمط $f+\lambda$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) تابع أصليّ للشكل التفاضلي ω.

ونقول إنّ ω **مغلق** إذا وفقط إذا كان من الصفّ $\mathcal{C}^1$، وحقّق الشرط:

$$\forall i,j \in \mathbb{N}_n, \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$$

أمثلة

1. الشكل التفاضلي $\omega(x,y) = y\,\mathrm{dx} + x\,\mathrm{dy}$ على $\mathbb{R}^2$ مغلق وتامّ إذ إنّ $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, \dfrac{\partial \omega_1}{\partial y}(x,y) = 1 = \dfrac{\partial \omega_2}{\partial x}(x,y)$، وكذلك فإنّ التابع $f(x,y) = xy$ تابعٌ أصليّ لـ ω.

2. الشكل التفاضلي $\omega(x,y) = y\,\mathrm{dx} - x\,\mathrm{dy}$ على $\mathbb{R}^2$ ليس مغلقاً، ولا تامّاً.
في الحقيقة لدينا:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial y}(0,0) = 1 \neq -1 = \frac{\partial \omega_2}{\partial x}(0,0)$$

من جهةٍ أخرى، لنفترض أنّ f تابعٌ أصليّ للشكل التفاضليّ ω عندئذٍ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \qquad (1)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x \qquad (2)$$

من المعادلة (1) نستنتج وجود تابع g اشتقاقيّ على $\mathbb{R}$ يحقّق $f(x,y) = xy + g(y)$ وبالاشتقاق بالنسبة للمتحوّل y نجد أنّ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x = x + g'(y)$ أو $g'(y) = -2x$ وبالاشتقاق بالنسبة للمتحوّل x نجد أنّ $-2 = 0$ وهذا تناقضٌ واضح. إذن ω ليس تامّاً.

مبرهنة 1. لتكن A مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{R}^n$، و ω شكلاً تفاضليّاً من المرتبة الأولى على A. إذا كان ω تامّاً ومن الصف $\mathcal{C}^1$، كان مغلقاً.

الإثبات

ليكن f تابعاً أصليّاً للشكل التفاضلي $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i\,\mathrm{dx}_i$، عندئذٍ يقبل f المفاضلة على A ويكون $\mathrm{d}f = \omega$ أو بشكلٍ آخر $\forall i \in \mathbb{N}_n, \dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \omega_i$، ولمّا كان ω من الصفّ $\mathcal{C}^1$، كان

f من الصفّ $\mathcal{C}^2$ ونستطيع أن نكتب

$$\forall i,j \in \mathbb{N}_n, \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i}$$

وذلك بمقتضى مبرهنة شوارتز. إذن ω مغلق. ■

1.1. تكامل شكل تفاضلي من المرتبة الأولى على طريق

تعريف 3. ليكن $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ تابعاً من الصف $\mathcal{C}^1$ (أو مستمرًّا ومن الصف $\mathcal{C}^1$ قِطعيّاً)، ولنضع $\Gamma = \varphi\big([a,b]\big)$. نسمّي Γ (وبشكل أدقّ (Γ,φ)) **طريقاً من الصف $\mathcal{C}^1$** (**أو من الصفّ $\mathcal{C}^1$ قِطعيّاً**) بدايته $\varphi(a)$ ونهايته $\varphi(b)$، ونقول عن φ إنّه تمثيلٌ وسيطيّ للطريق Γ. وإذا كان $\varphi(a) = \varphi(b)$ قلنا إنّ Γ طريقٌ مغلقٌ.

ليكن $\theta : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ تقابلاً من الصفّ $\mathcal{C}^1$ هو وتقابله العكسي. إنّ التابع $\psi = \varphi \circ \theta$ من الصفّ $\mathcal{C}^1$ قِطعيّاً ويحقّق $\Gamma = \psi\big([\alpha,\beta]\big)$، فهو يعرّف تمثيلاً وسيطيّاً للطريق Γ، ونقول إنّ θ **تغيير مقبول للوسيط**، وإذا كان θ متزايداً قلنا إنّ للتمثيلين φ و ψ **التوجيه** نفسه، أمّا إذا كان θ متناقصاً فإنّنا نقول إنّ للتمثيلين φ و ψ **توجيهين متعاكسين**.

أمثلة

1. ليكن $a,b \in \mathbb{R}^n$، إنّ التابع $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n, t \mapsto a + t(b-a)$ تمثيلٌ وسيطيّ للقطعة المستقيمة التي بدايتها a ونهايتها b، والتابع $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}^n, t \mapsto b + t(a-b)$ تمثيلٌ وسيطيّ آخر لتلك القطعة المستقيمة يعاكس φ في التوجيه، إذ إنّ $\psi = \varphi \circ \theta$ حيث $\theta : [0,1] \to [0,1], t \mapsto 1-t$.

2. ليكن $\mathcal{E}$ القطع الناقص الذي معادلته $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ في $\mathbb{R}^2$.

   إنّ التابع

$$\varphi : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (x_0 + a\cos t, y_0 + b\sin t)$$

تمثيل وسيطيّ للقطع $\mathcal{E}$ يعاكس في التوجيه التمثيل الوسيطي

$$\psi : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (x_0 + a\cos t, y_0 - b\sin t)$$

لاحظ أنّ $\mathcal{E}$ طريق مغلق لأنّ $\varphi(0) = \varphi(2\pi) = (a,0)$.

تعريف 4. لتكن A مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{R}^n$ ، و ω شكلاً تفاضليّاً مستمرّاً من المرتبة الأولى على A ، وليكن Γ طريقاً من الصفّ C^1 محتوى في A ، وممثّلاً وسيطيّاً بالتابع

$$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n, t \mapsto \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)\big)$$

نسمّي المقدار

$$\int_a^b \omega\left(\varphi(t)\right)\big(\varphi'(t)\big)\mathrm{dt} = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \omega_i(\varphi(t))\varphi_i'(t)\right)\mathrm{dt}$$

تكاملَ الشكل التفاضلي ω على الطريق Γ ، ونرمز إليه بالرمز $\int_\Gamma \omega$ أو $\int_\varphi \omega$.

أمّا إذا كان Γ طريقاً من الصفّ C^1 قطعيّاً فإنّه توجد أعدادٌ حقيقيّة $t_0, t_1, \cdots, t_m$ تحقّق $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$ بحيث يكون $\varphi_k = \varphi|_{[t_{k-1}, t_k]}$ من الصفّ C^1 وذلك في حالة $k \in \mathbb{N}_m$. في هذه الحالة نعرّف تكاملَ ω على الطريق Γ على أنّه $\int_\Gamma \omega = \sum_{k=1}^m \int_{\Gamma_k} \omega$ حيث $\Gamma_k = \varphi([t_{k-1}, t_k])$ هو الطريق من الصفّ C^1 الممثَّل وسيطيّاً بالتابع φ_k .

لاحظ أنّه إذا كان ψ تمثيلاً وسيطيّاً للطريق Γ له توجيه φ نفسه فإنّ $\int_\varphi \omega = \int_\psi \omega$ ، أمّا إذا كان للتمثيلين الوسيطيّين φ و ψ توجيهان متعاكسان فإنّ $\int_\varphi \omega = -\int_\psi \omega$.

مبرهنة 2. لتكن A مجموعة مفتوحة غير خالية من $\mathbb{R}^n$ ، و ω شكلاً تفاضليّاً مستمرّاً وتامًّا من المرتبة الأولى على A و f تابعٌ أصليّ له، وليكن $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ التمثيل الوسيطي

للطريق Γ من الصف $\mathcal{C}^1$ قطعيّاً والمحتوى في A. عندئذٍ تتحقّق المساواة $\int_\Gamma \omega = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))$.

الإثبات

لتكن $t_0, t_1, \cdots, t_m$ أعداداً حقيقيّة تحقّق $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b$، وبحيث يكون $\gamma_k = \varphi_{|[t_{k-1}, t_k]}$ من الصفّ $\mathcal{C}^1$ وذلك أيّاً كان $k \in \mathbb{N}_m$. عندئذٍ يكون

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \omega &= \sum_{k=1}^m \int_{\gamma_k} \omega = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \omega\big(\gamma_k(t)\big) \circ \gamma_k{}'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[f(\gamma_k(t))\big]\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^m \Big(f(\gamma_k(t_k)) - f(\gamma_k(t_{k-1}))\Big) \\
&= \sum_{k=1}^m \Big(f(\varphi(t_k)) - f(\varphi(t_{k-1}))\Big) = f(\varphi(t_m)) - f(\varphi(t_0)) \\
&= f(\varphi(b)) - f(\varphi(a))
\end{aligned}$$

وهو المطلوب إثباته. ■

مبرهنة 3. لتكن A مجموعة مفتوحة **نجميّة** من $\mathbb{R}^n$، و ω شكلاً تفاضليّاً من المرتبة الأولى على A. إذا كان ω مغلقاً، كان تامّاً.

الإثبات

ليكن a عنصرًا من A بحيث $\forall x \in A, \Gamma_x = [a, x] \subset A$، ولنعرّف التابع $f : A \to \mathbb{R}, x \mapsto \int_{\Gamma_x} w$ أي:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (x_i - a_i) \int_0^1 \omega_i(a + t(x-a))\,\mathrm{d}t$$

ليكن i و j عنصرين من $\mathbb{N}_n$. لنضع $g_i(x_j, t) = \omega_i(a + t(x-a))$، و $G_i(x_j) = \int_0^1 g_i(x_j, t)\,\mathrm{d}t$، ولندرس قابليّة G_i للاشتقاق. بملاحظة أنّ التابع $t \mapsto g_i(x_j, t)$ مستمرّ، وأنّ التابع $x_j \mapsto g_i(x_j, t)$ اشتقاقيّ وأنّ $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}$ مستمرّ ومحدود

في جوارٍ للنقطة x فإنّنا نستطيع تطبيق مبرهنة اشتقاق التكاملات التابعة لوسيط لنجد أنّ G_i اشتقاقيّ وأنّ $G_i'(x_j) = \int_0^1 t\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}(a+t(x-a))\,\mathrm{dt}$ ، وعليه

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \int_0^1 \omega_j(a+t(x-a))\,\mathrm{dt} + \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\int_0^1 t\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}(a+t(x-a))\,\mathrm{dt}\\ &= \int_0^1 \omega_j(a+t(x-a))\,\mathrm{dt} + \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\int_0^1 t\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}(a+t(x-a))\,\mathrm{dt}\\ &= \int_0^1 \omega_j(a+t(x-a))\,\mathrm{dt} + \int_0^1 t\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}(a+t(x-a))\right)\mathrm{dt}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \int_0^1 \omega_j(a+t(x-a))\,\mathrm{dt} + \int_0^1 t\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\omega_j(a+t(x-a))\right)\mathrm{dt}\\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Big(t\omega_j(a+t(x-a))\Big)\mathrm{dt}\\ &= t\omega_j(a+t(x-a))\Big]_0^1 = \omega_j(x)\end{aligned}$$

وذلك بالاستفادة من المساواة $\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j} = \frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}$.

إذن f تابعٌ أصليّ للشكل التفاضلي ω فهو تامّ. ■

ملاحظة 1. إنّ النتيجة السابقة غير صحيحة في الحالة العامّة، وهذا ما يبيّنه المثال الآتي:

ليكن الشكل التفاضلي $\omega(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{dx} - \frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{dy}$ المعرّف على $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. نتحقّق بسهولة أنّ هذا الشكل التفاضليّ مغلق. فإذا كان Γ الطريق الموافق للدائرة الواحديّة موجّهة بالاتجاه الموجب وفق التمثيل الوسيطي المعتاد $\varphi : [0,2\pi] \to A, t \mapsto (\cos t, \sin t)$ عندئذٍ يكون

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^{2\pi}(-\sin^2 t - \cos^2 t)\,\mathrm{dt} = -2\pi$$

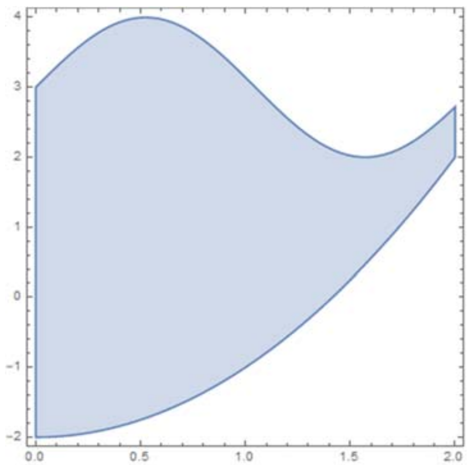
لنفترض الآن أنّ ω تام عندئذٍ يكون تكامله على كلّ طريق مغلق من الصف $\mathcal{C}^1$ معدوماً ومنه $\int_\Gamma \omega = 0 = -2\pi$ ، وهذا تناقضٌ واضح. نستنتج إذن أنّ ω غير تامّ.

2. التكاملات المضاعفة

سنكتفي، في هذه الفقرة، بدراسة التكاملات المضاعفة على حيّزٍ بسيطٍ من $\mathbb{R}^2$. في كل هذه الفقرة D مجموعةٌ جزئيةٌ من $\mathbb{R}^2$ داخلها $\overset{\circ}{D}$ غير خالٍ.

تعريف 5. ليكن $[a,b]$ و $[c,d]$ مجالين مغلقين غير تافهين من $\mathbb{R}$ ، وليكن المستطيل $R = [a,b] \times [c,d]$. نسمّي **حيّزاً بسيطاً** في R كلّ مجموعة D من أحد النمطين الآتيين:

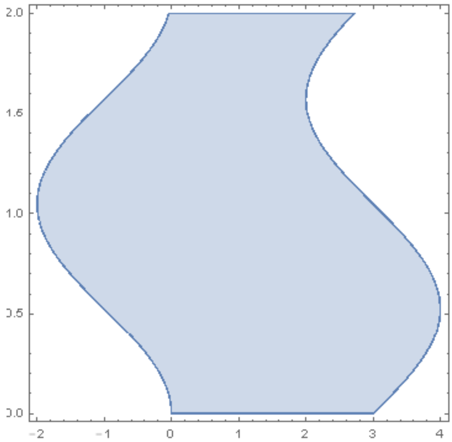
1. النمط $\mathcal{D}_1$: يوجد تابعان مستمرّان على $[a,b]$ بحيث $\varphi_1 \leq \varphi_2$ و



$\mathcal{D}_1$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

2. النمط $\mathcal{D}_2$: يوجد تابعان ψ_2,ψ_1 مستمرّان على $[c,d]$ بحيث $\psi_1 \le \psi_2$ و



$\mathcal{D}_2$

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, c\le y\le d, \psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$$

مبرهنة 4. ليكن $[a,b]$ و $[c,d]$ مجالين مغلقين غير تافهين من $\mathbb{R}$، وليكن المستطيل $R=[a,b]\times[c,d]$. وليكن D حيّزاً بسيطاً من النمط $\mathcal{D}_2$ معرّفاً بالتابعين ψ_2,ψ_1، وليكن f تابعاً مستمرّاً على D. عندئذٍ يكون التابع

$$h:[c,d]\to\mathbb{R}, y\mapsto\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{dx}$$

مستمرّاً.

الإثبات

نعرّف التابع

$$\tilde{f}:R\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto\begin{cases} f(x,y),(x,y)\in D \\ 0 \qquad\quad ,(x,y)\notin D\end{cases}$$

إنّ $\tilde{f}$ محدود لأنّ f مستمرّ على المجموعة المتراصّة D فهو محدود عليها. فيوجد $0<M_0$ بحيث $\forall(x,y)\in R,\left|\tilde{f}(x,y)\right|\le M_0$. ويتحقّق في هذه الحالة

$$\forall y\in[c,d], h(y)=\int_a^b \tilde{f}(x,y)\,\mathrm{dx}$$

ليكن $y\in[c,d]$ و (y_n) متتالية من عناصر $[c,d]$ متقاربة من y.

نضع $\alpha_n = \min(\psi_1(y), \psi_1(y_n))$ ، $\beta_n = \max(\psi_1(y), \psi_1(y_n))$ ، $\gamma_n = \min(\psi_2(y), \psi_2(y_n))$ و $\delta_n = \max(\psi_2(y), \psi_2(y_n))$. من الواضح أنّ $\lim_{n\to\infty} (\beta_n - \alpha_n) = 0, \lim_{n\to\infty} (\delta_n - \gamma_n) = 0$.

ليكن $\varepsilon > 0$ ، يوجد $n_1 \in \mathbb{N}$ بحيث

$$n > n_1 \Rightarrow (\delta_n - \gamma_n) + (\beta_n - \alpha_n) < \frac{\varepsilon}{2M_0}$$

ولأنّ f مستمرّ بانتظام على D ، يوجد $\delta > 0$ بحيث إذا كان $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ و $\max(\left|x_2 - x_1\right|, \left|y_2 - y_1\right|) < \delta$ ، كان

$$\left|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2(d-c)}$$

من جهةٍ أخرى يوجد $n_2 \in \mathbb{N}$ بحيث $n > n_2 \Rightarrow \left|y_n - y\right| < \delta$ وعليه، إذا كان $n > n_2$ تحقّقَ الشرط

$$\forall x \in [a,b], \left|f(x, y_n) - f(x, y)\right| < \frac{\varepsilon}{2(d-c)}$$

ليكن $n > n_0 = \max(n_1, n_2)$ ، عندئذٍ:

$$\begin{aligned}
\left|h(y_n) - h(y)\right| &= \left|\int_{\psi_1(y_n)}^{\psi_2(y_n)} f(x, y_n)\,\mathrm{dx} - \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{dx}\right| \\
&\leq \int_{\alpha_n}^{\beta_n} M_0\,\mathrm{dx} + \int_{\gamma_n}^{\delta_n} M_0\,\mathrm{dx} \\
&\quad + \left|\int_{\beta_n}^{\gamma_n} \left|f(x, y_n) - f(x, y)\right|\mathrm{dx}\right| \\
&\leq M_0(\beta_n - \alpha_n) + M_0(\delta_n - \gamma_n) \\
&\quad + \left|\gamma_n - \beta_n\right| \frac{\varepsilon}{2(d-c)} \\
&\leq M_0 \frac{\varepsilon}{2M_0} + (d-c)\frac{\varepsilon}{2(d-c)} = \varepsilon
\end{aligned}$$

إذن $\lim_{n\to\infty} h(y_n) = h(y)$ ، ومنه $\lim_{t\to y} h(t) = h(y)$ ، وهذا يعني أنّ h مستمرّ عند y ، ومن ثمّ فهو مستمرّ على $[c,d]$ ، ويكتمل بذلك إثبات المبرهنة. ■

مبرهنة 5. (Fubini) ليكن $R=[a,b]\times[c,d]$ مستطيلاً غير تافهٍ في $\mathbb{R}^2$ و $D\subset R$.

نفترض أنّ D حيّز بسيط من النمط $\mathcal{D}_1$ ومعطى بالتابعين $\varphi_1,\varphi_2:[a,b]\to\mathbb{R}$،

وكذلك هو حيّز بسيط من النمط $\mathcal{D}_2$ ومعطى بالتابعين $\psi_1,\psi_2:[c,d]\to\mathbb{R}$ أي

$$\begin{aligned}D&=\{(x,y)\in R,\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y),c\le y\le d\}\\&=\{(x,y)\in R,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),a\le x\le b\}\end{aligned}$$

وليكن $f:R\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً على D.

عندئذٍ تتحقّق المساواة

$$\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx}=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{dx}\right)\mathrm{dy}$$

الإثبات

نعرّف التابع

$$\tilde{f}:R\to\mathbb{R},(x,y)\mapsto\begin{cases}f(x,y),(x,y)\in D\\0\qquad\quad,(x,y)\notin D\end{cases}$$

إنّ $\tilde{f}$ محدود لأنّ f مستمرّ على المجموعة المتراصّة D فهو محدود عليها، ويوجد $0<M_0$ بحيث

$$\forall(x,y)\in R,\left|\tilde{f}(x,y)\right|\le M_0$$

لمّا كان التابع $y\mapsto\tilde{f}(x,y)$ مستمرّاً قطعيّاً على $[c,d]$، تحقّقت المساواة

$$\begin{aligned}\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx}&=\int_a^b\left(\int_c^d \tilde{f}(x,y)\,\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx}\\&=\int_a^b\lim_{n\to\infty}\left(\frac{d-c}{n}\sum_{k=1}^{n}\tilde{f}(x,y_k)\right)\mathrm{dx}\end{aligned}$$

حيث نعطي (y_k) بالصيغة: $\forall k\in\{0,1,n\},y_k=c+k\dfrac{d-c}{n}$.

من الواضح أيضاً أنّ

$$\int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{dx}\right)\mathrm{dy}=\int_c^d\left(\int_a^b \tilde{f}(x,y)\,\mathrm{dx}\right)\mathrm{dy}$$

نعرّف متتالية التوابع $(S_n)_{n\geq 1}$ على $[a,b]$ بالصيغة

$$S_n(x)=\frac{d-c}{n}\sum_{k=1}^{n}\tilde{f}(x,y_k)$$

توطئة: إنّ متتالية التوابع (S_n) السابق ذكرها متقاربة بانتظام من التابع

$$h:[a,b]\to\mathbb{R}, x\mapsto\int_c^d \tilde{f}(x,y)\,\mathrm{dy}$$

إثبات التوطئة

لنكتب $S_n(x)-h(x)$ بطريقة ثانية:

$$\begin{aligned}S_n(x)-h(x)&=\frac{d-c}{n}\sum_{k=1}^{n}\tilde{f}(x,y_k)-\sum_{k=1}^{n}\int_{y_{k-1}}^{y_k}\tilde{f}(x,y)\,\mathrm{dy}\\&=\sum_{k=1}^{n}\int_{y_{k-1}}^{y_k}\tilde{f}(x,y_k)\,\mathrm{dy}-\sum_{k=1}^{n}\int_{y_{k-1}}^{y_k}\tilde{f}(x,y)\,\mathrm{dy}\\&=\sum_{k=1}^{n}\int_{y_{k-1}}^{y_k}\left(\tilde{f}(x,y_k)-\tilde{f}(x,y)\right)\mathrm{dy}\end{aligned}$$

ليكن $\varepsilon>0$. نعلم أنّ f مستمرّ بانتظام على D إذن يوجد $\delta>0$ بحيث إذا كان $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D$ و $\max\left(\left|x_2-x_1\right|,\left|y_2-y_1\right|\right)<\delta$، كان

$$\left|f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)\right|\leq\frac{\varepsilon}{2(d-c)}$$

ويوجد $n_0\in\mathbb{N}$ بحيث إذا كان $n>n_0$، كان $\frac{d-c}{n}<\max\left(\delta,\frac{\varepsilon}{8M_0}\right)$.

فإذا كان $\varphi_1(x)\notin[y_{k-1},y_k]$ و $\varphi_2(x)\notin[y_{k-1},y_k]$ كانت القطعة المستقيمة الواصلة بين (x,y_{k-1}) و (x,y_k) محتواةً إمّا في D أو في $[a,b]\times[c,d]\setminus D$ ويتحقّق

$$\forall y\in[y_{k-1},y_k],\left|\tilde{f}(x,y_k)-\tilde{f}(x,y)\right|=\left|f(x,y_k)-f(x,y)\right|\leq\frac{\varepsilon}{2(d-c)}$$

من جهةٍ أخرى، لتكن $\mathbb{N}_n=\{1,\cdots,n\}$ و

$$K_x = \{k \in \mathbb{N}_n, \varphi_1(x) \in [y_{k-1}, y_k] \vee \varphi_2(x) \in [y_{k-1}, y_k]\}$$

لاحظ أنّ $\forall x \in [a,b], K_x \leq 2$.

ليكن $n_0 \leq n$ و $x \in [a,b]$ عندئذٍ:

$$\begin{aligned}
\left|S_n(x) - h(x)\right| &\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \left|\tilde{f}(x, y_k) - \tilde{f}(x, y)\right| \mathrm{dy} \\
&= \sum_{k \in K_x} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \left|\tilde{f}(x, y_k) - \tilde{f}(x, y)\right| \mathrm{dy} \\
&\quad + \sum_{k \in \mathbb{N}_n \setminus K_x} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \left|\tilde{f}(x, y_k) - \tilde{f}(x, y)\right| \mathrm{dy} \\
&\leq \sum_{k \in K_x} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \left|\tilde{f}(x, y_k) - \tilde{f}(x, y)\right| \mathrm{dy} \\
&\quad + \sum_{k \in \mathbb{N}_n \setminus K_x} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \left|\tilde{f}(x, y_k) - \tilde{f}(x, y)\right| \mathrm{dy}
\end{aligned}$$

ولكن عندما $k \in \mathbb{N}_n \setminus K_x$ ، و $y \in [y_{k-1}, y_k]$ فإنّ $\left|y_k - y\right| \leq \frac{d-c}{n} < \delta$ ، ومن

ثمّ $\left|\tilde{f}(x, y_k) - \tilde{f}(x, y)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2(d-c)}$.

وعندما $k \in K_x$ فإنّ $\left|\tilde{f}(x, y_k) - \tilde{f}(x, y)\right| \leq \left|\tilde{f}(x, y_k)\right| + \left|\tilde{f}(x, y)\right| \leq 2M_0$.

إذن:

$$\begin{aligned}
\left|S_n(x) - h(x)\right| &\leq \sum_{k \in K_x} \int_{y_{k-1}}^{y_k} (2M_0)\, \mathrm{dy} + \sum_{k \in \mathbb{N}_n} \int_{y_{k-1}}^{y_k} \frac{\varepsilon}{2(d-c)} \mathrm{dy} \\
&\leq 4M_0 \cdot \frac{d-c}{n} + \frac{\varepsilon}{2(d-c)} \sum_{k \in \mathbb{N}_n} (y_k - y_{k-1}) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

وهذا يُثبت التوطئة. ■

نستنتج من ذلك أنّ $\lim_{n \to \infty} \int_a^b S_n(t)\, \mathrm{dt} = \int_a^b h(t)\, \mathrm{dt}$.

نعرّف التابع $g:[c,d]\to\mathbb{R}, y\mapsto \int_a^b \tilde{f}(x,y)\,\mathrm{dx}$ وهو تابعٌ مستمرّ بمقتضى المبرهنة السابقة. لدينا إذن

$$\begin{aligned}\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx} &= \int_a^b\left(\int_c^d \tilde{f}(x,y)\,\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx}\\ &= \int_a^b \lim_{n\to\infty}\left(\frac{d-c}{n}\sum_{k=1}^{n}\tilde{f}(x,y_k)\right)\mathrm{dx}\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_a^b\left(\frac{d-c}{n}\sum_{k=1}^{n}\tilde{f}(x,y_k)\right)\mathrm{dx}\end{aligned}$$

حيث أمكننا المبادلة بين التكامل والنهاية بسبب التقارب المنتظم للمتتالية (S_n) من h. ومنه:

$$\begin{aligned}\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx} &= \lim_{n\to\infty}\frac{d-c}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\int_a^b \tilde{f}(x,y_k)\,\mathrm{dx}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{d-c}{n}\sum_{k=1}^{n} g(y_k) = \int_c^d g(y)\,\mathrm{dy}\\ &= \int_c^d\left(\int_a^b \tilde{f}(x,y)\,\mathrm{dx}\right)\mathrm{dy}\\ &= \int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{dx}\right)\mathrm{dy}\end{aligned}$$

وهو المطلوب إثباته. ■

ملاحظة 2. لا تبقى النتيجة السابقة صحيحة في الحالة العامّة وهذا ما يبيّنه المثال الآتي:

$$-\frac{\pi}{4} = \int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{dx}\right)\mathrm{dy} \neq \int_0^1\left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx} = \frac{\pi}{4}$$

ما تبريرك لذلك؟

تعريف 6. نحتفظ برموز المبرهنة السابقة. ليكن $f:D\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمرّاً على المجموعة غير الخالية D. نعرّف **تكامل** f على D كما يأتي:

1. إذا كانت D حيّزاً بسيطاً من النمط $\mathcal{D}_1$ فإنّ

$$\int_D f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{dy} \right) \mathrm{dx}$$

2. إذا كانت D حيّزاً بسيطاً من النمط $\mathcal{D}_2$ فإنّ

$$\int_D f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{dx} \right) \mathrm{dy}$$

3. إذا كان $D = \bigcup_{i=1}^{m} D_i$ اجتماع أحياز $D_1, D_2, \cdots, D_m$ منفصلة مثنى مثنى كلّ منها من أحد النمطين $\mathcal{D}_1$ أو $\mathcal{D}_2$ فإنّ

$$\int_D f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \sum_{i=1}^{m} \int_{D_i} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$$

ملاحظة: ليس هنالك مشكلة في التعريف السابق فالتكاملات كلّها معرّفة بشكل جيّد، ومن جهة أخرى إذا كان D من النمطين $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ معاً فإنّ:

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{dy} \right) \mathrm{dx} = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{dx} \right) \mathrm{dy}$$

وذلك حسب مبرهنة Fubini.

مبرهنة 6. ليكن $R = [a,b] \times [c,d]$ مستطيلاً مغلقاً غير تافهٍ من $\mathbb{R}^2$، و D حيّزاً بسيطاً فيه، وليكن f, g تابعين مستمرّين على D، و λ, μ عددين حقيقيّين. عندئذٍ

1. $\int_D (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_D f + \mu \int_D g$.
2. إذا كان $0 \le f$، كان $0 \le \int_D f$.
3. إذا كان $g \le f$، كان $\int_D g \le \int_D f$.
4. $(b-a)(d-c)\min_D f \le \int_D f \le (b-a)(d-c)\max_D f$
5. $\left| \int_D f \right| \le \int_D |f|$.

الإثبات

مباشرةً من التعريف، ومن خواصّ التكامل المحدود المماثلة.

تمرينان محلولان

1. احسب قيمة التكامل $I = \int_1^e \left(\int_0^1 (1+y)x^y \,\mathrm{dy} \right) \mathrm{dx}$.

الحل: نلاحظ أنّ التابع $f(x,y) = (y+1)x^y$ مستمرّ على $[1,e] \times [0,1]$. فحسب مبرهنة Fubini نجد أنّ:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_1^e (1+y)x^y \,\mathrm{dx} \right) \mathrm{dy} \\ &= \int_0^1 \left(e^{y+1} - 1 \right) \mathrm{dy} \\ &= e^2 - e - 1 \end{aligned}$$

2. ليكن $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 \le y \le 1\}$. احسب $I = \int_D (xy + xy^2 + 1) \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$.

الحل: نلاحظ أوّلاً أنّ D حيّز بسيط من النمط $\mathcal{D}_1$ مع φ_1, φ_2 معرّفان على المجال $[-1,1]$ بالصيغتين: $\varphi_1(x) = x^2, \varphi_2(x) = 1$، وأنّ التابع $f : D \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x,y) = xy + xy^2 + 1$ مستمرّ. إذن

$$\begin{aligned} I &= \int_D (xy + xy^2 + 1) \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \\ &= \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 (xy + xy^2 + 1) \,\mathrm{dy} \right) \mathrm{dx} \\ &= \int_{-1}^1 \left[xy^2/2 + xy^3 + y \right]_{x^2}^1 \mathrm{dx} \\ &= 4/3 \end{aligned}$$

يمكننا أيضاً حساب التكامل بكتابة D بالشكل

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}, 0 \le y \le 1\}$$

تمرين: ليكن $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,|x|\le y\le 1, 0\le y\le 1\}$. احسب بطريقتين التكاملَ $I=\int_D\left(\frac{1}{1+y^2}\right)\mathrm{dx\,dy}$.

مبرهنة 7. (غرين Green) ليكن D حيّزاً بسيطاً من النمطين $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ معاً، محيطه Γ طريقٌ موجّه بالاتّجاه الموجب مستمرّ ومن الصفّ $\mathcal{C}^1$ قِطعيّاً، و $p,q:D\to\mathbb{R}$ تابعين من الصفّ $\mathcal{C}^1$ على D. عندئذٍ تتحقّق المساواة

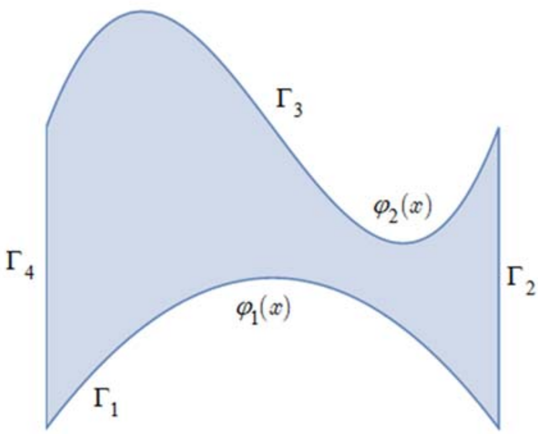
$$\int_D\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)\mathrm{dx\,dy}=\int_\Gamma p(x,y)\,\mathrm{dx}+q(x,y)\,\mathrm{dy}$$

الإثبات

إنّ D من النمط $\mathcal{D}_1$، نفترض أنّه معطًى بالتابعين $\varphi_1,\varphi_2:[a,b]\to\mathbb{R}$. نفترض أنّ

$\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3\cup\Gamma_4$

كما في الشكل المرفق



لدينا

$$\begin{aligned}
-\int_D \frac{\partial p}{\partial y}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} &= -\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial p}{\partial y}\,\mathrm{dy}\right)\mathrm{dx} \\
&= -\int_a^b \Big(p(x,\varphi_2(x)) - p(x,\varphi_1(x))\Big)\,\mathrm{dx} \\
&= \int_{\Gamma_3} p(x,y)\,\mathrm{dx} + \int_{\Gamma_1} p(x,y)\,\mathrm{dx} \\
&= \int_{\Gamma_3} p(x,y)\,\mathrm{dx} + \int_{\Gamma_1} p(x,y)\,\mathrm{dx} \\
&\quad + \underbrace{\int_{\Gamma_2} p(x,y)\,\mathrm{dx} + \int_{\Gamma_4} p(x,y)\,\mathrm{dx}}_{=0} \\
&= \int_{\Gamma} p(x,y)\,\mathrm{dx}
\end{aligned}$$

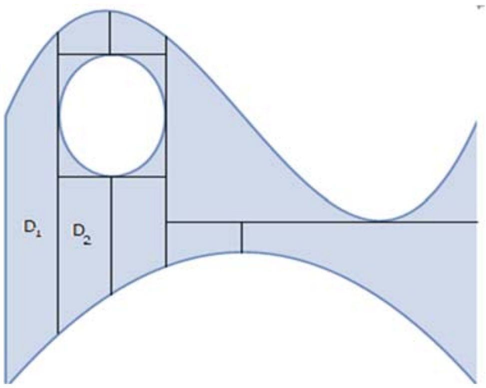
وبالاستفادة من كون D من النمط $\mathcal{D}_2$ وبطريقة مشابهة نثبت صحّة المساواة

$$\int_D \frac{\partial q}{\partial x}\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_\Gamma q(x,y)\,\mathrm{dy}$$

ومنه

$$\int_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} = \int_\Gamma p(x,y)\,\mathrm{dx} + q(x,y)\,\mathrm{dy} \qquad \blacksquare$$

ملاحظة 3. يمكن إثبات صحّة النتيجة السابقة بسهولةٍ في حال كان $D = \bigcup_{i=1}^{m} D_i$ اجتماع أحيازٍ بسيطةٍ كلّ واحدٍ منها من النمطين $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ معاً، وهذا يتيح لنا تطبيق المبرهنة في حالات كثيرة كما يوضّح الشكل المجاور (لاحظ أنّ مجموع التكاملات على القواطع الداخليّة معدوم).



تطبيق: ليكن $D=\bigcup_{i=1}^{m} D_i$ اجتماع أحيازٍ بسيطةٍ كلّ واحدٍ منها من النمطين $\mathcal{D}_1$ و $\mathcal{D}_2$ معاً، عندئذٍ تُعطى مساحة الحيّز D بالصيغة $\mathcal{A}_D=\int_D 1\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$.

كمثالٍ على ذلك سنحسب مساحة الشكل المعطى بالصيغة $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1\right\}$ مع $a>0, b>0$.

نعرّف التابعين $p(x,y)=0, q(x,y)=x$. بتطبيق مبرهنة غرين، مع أخذ التمثيل الوسيطي للمحيط $\varphi:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2, t\mapsto(a\cos t, b\sin t)$ نجد

$$\mathcal{A}_D=\int_D \mathrm{dx}\,\mathrm{dy}=\int_\Gamma x\,\mathrm{dy}=\int_0^{2\pi} ab\cos^2 t\,\mathrm{dt}=\pi ab$$

عموماً لدينا

$$\mathcal{A}_D=\int_D \mathrm{dx}\,\mathrm{dy}=\int_\Gamma x\,\mathrm{dy}=-\int_\Gamma y\,\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\int_\Gamma x\,\mathrm{dy}-y\,\mathrm{dx}$$

إنّ للمبرهنة الآتية أهميّة كبيرة في حساب التكاملات المضاعفة وسوف نذكر نصّها من دون أن نثبتها.

مبرهنة 8. (المكاملة بتغيير المتحوّل) ليكن D و Δ حيّزين بسيطين وليكن $\Phi:\mathring{\Delta}\to\mathring{D}$ تقابلاً من الصف $\mathcal{C}^1$ هو وتقابله العكسيّ. وليكن $f:D\to\mathbb{R}$ تابعاً مستمراً. عندئذٍ تتحقّق المساواة

$$\int_D f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}=\int_\Delta f\circ\Phi(u,v)\left|\det\left(\mathrm{J}\Phi(u,v)\right)\right|\mathrm{dudv}$$

حيث $\mathrm{J}\Phi$ مصفوفة جاكوبي للتابع Φ.

مثال

ليكن الحيّز البسيط $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\ge 0, y\ge 0, x^2+y^2\le 1\}$ المطلوب حساب التكامل $I=\int_D(1-x^2-y^2)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$. يمكننا حساب I بطريقة التكاملات المتعاقبة

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2)\, \mathrm{dy} \right) \mathrm{dx}$$

ولكن بملاحظة أنّ D يمكن تمثيله باستخدام الإحداثيّات القطبيّة (r,θ) بالمتراجحات $0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi / 2$ نضع إذن

$\Delta = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2, 0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi / 2\}$. ليكن التابع

$$\Phi : \overset{\circ}{\Delta} \to \overset{\circ}{D}, (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

إنّ Φ تقابل من الصفّ $\mathcal{C}^1$ هو وتقابله العكسي، وكذلك فإنّ

$$\left|\det\left(\mathrm{J}\Phi(r,\theta)\right)\right| = \left|\det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\right| = r$$

وعليه

$$\begin{aligned} I &= \int_\Delta (1 - r^2) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/2} r(1 - r^2) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{dr} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 r(1 - r^2) \mathrm{dr} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

تمرينات ومسائل

التمرين 1. جِدْ تابعاً أصليّاً لكل من الأشكال التفاضلية الآتية:

1. $\omega(x,y)=(3x^2+5y)\mathrm{dx}+5x\mathrm{dy}$.
2. $\omega(x,y)=(1+x)ye^x\mathrm{dx}+xe^x\mathrm{dy}$.
3. $\omega(x,y)=3x^2y\mathrm{dx}+(x^3-\sin y)\mathrm{dy}$.
4. $\omega(x,y,z)=\dfrac{1}{1+z^2}\mathrm{dx}+\dfrac{1}{1+z^2}\mathrm{dy}-\dfrac{2z(x+y)}{(1+z^2)^2}\mathrm{dz}$.
5. $\omega(x,y,z)=zy\cos(xy)\mathrm{dx}+zx\cos(xy)\mathrm{dy}+\sin(xy)\mathrm{dz}$.
6. $\omega(x,y,z)=\dfrac{1}{z+y}\mathrm{dx}+\dfrac{z-x}{(z+y)^2}\mathrm{dy}-\dfrac{x+y}{(z+y)^2}\mathrm{dz}$.

التمرين 2. في كلّ حالة من الحالات الآتية جِدْ تابعاً μ من النمط المعطى بحيث يصبح الشكل التفاضلي $\tilde{\omega}=\mu\cdot\omega$ مغلقاً، وعيّن تابعاً أصلياً للشكل التفاضلي $\tilde{\omega}$:

.1	$\omega(x,y)=(y-xy)\,\mathrm{dx}+x\,\mathrm{dy}$ $\mu(x,y)=g(x)$
.2	$\mu(x,y)=g(x^2+y^2)$ $\omega(x,y)=\dfrac{1}{x^2y}\mathrm{dx}-\dfrac{1}{xy^2}\mathrm{dy}$
.3	$\mu(x,y)=g(xy)$ $\omega(x,y)=\dfrac{y}{xy-1}\mathrm{dx}-\dfrac{x}{xy-1}\mathrm{dy}$
.4	$\omega(x,y)=\dfrac{x-y}{x}\mathrm{dx}+\mathrm{dy}$ $\mu(x,y)=g(x)$
.5	$\omega(x,y)=\mathrm{sh}(2xy)\,\mathrm{dx}-\mathrm{ch}(2xy)\,\mathrm{dy}$ $\mu(x,y)=g(x^2+y^2)$
.6	$\omega(x,y,z)=yz\,\mathrm{dx}+zx\,\mathrm{dy}+xy(1+z)\mathrm{dz}$ $\mu(x,y,z)=g(z)$

التمرين 3. ابحث عن تابع $g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ يحقق $g(0)=0$ بحيث يكون الشكل التفاضلي الآتي تامّاً:

$$\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2,\ \ \omega(x,y)=\frac{2xy}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{dx}+g(x)\,\mathrm{dy}$$

ثمّ جد تابعاً أصليّاً لهذا الشكل التفاضلي.

التمرين 4. احسب تكامل كل من الأشكال التفاضلية التالية على الطرق المعطاة:

1. $w(x,y)=x\mathrm{dx}+(1-x)y\mathrm{dy}$

على الدائرة الواحدية ثمّ المربع الذي مركزه المبدأ وضلعه 2.

2. $w(x,y,z)=zx\mathrm{dx}+zy\mathrm{dy}+\mathrm{dz}$

على المسار $\varphi:[0,1]\to\mathbb{R}^3$ مع $\varphi(t)=(\cos 8t,\sin 8t,t)$.

3. $w(x,y)=y\mathrm{dx}+xe^{-x^2}\mathrm{dy}$

على محيط المستطيل $[-a,a]\times[0,1]$.

4. $w(x,y,z)=y\mathrm{dx}+z\mathrm{dy}+x\mathrm{dz}$

على الدائرة التي مركزها $(1,1,1)$ وواقعة في المستوي الذي معادلته $x+y-z=1$ ونصف قطرها 1.

5. $w(x,y)=(x+y)\mathrm{dx}+(x-y)\mathrm{dy}$

على المسار الممثّل قطبياً بالمعادلة $r=1+\cos\theta$ مع $\theta\in[0,\pi]$.

التمرين 5. نعرّف على $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ الشكلين التفاضليّين:

$$u(x,y)=\frac{e^x(x\sin y-y\cos y)}{x^2+y^2}\mathrm{dx}+\frac{e^x(x\cos y+y\sin y)}{x^2+y^2}\mathrm{dy}$$

$$v(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}(y\,\mathrm{dx}-x\,\mathrm{dy})$$

1. أثبت أنّ u و v مغلقان.

2. احسب تكامل v على الدائرة الواحدية. هل v شكل تام؟
3. أثبت أنّ الشكل $w = u + v$ يقبل التمديد عند المبدأ إلى شكل تفاضلي من الصّف $\mathcal{C}^1$، هل هو تام؟
4. استنتج تكامل u على الدائرة الواحدية، ثم استنتج قيمة التكامل $I = \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t)\,\mathrm{dt}$.

التمرين 6. احسب التكامل المضاعف $\int_D f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$ في كلّ حالة من الحالات الآتية:

$f(x,y) = x^2 + x + 3$ $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 \leq y \leq 1 + \dfrac{x^2}{2}\right\}$	.1
$f(x,y) = y$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq y \leq \min(x, 2-x)\}$	.2
$f(x,y) = x - y$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq -x \leq y \leq x+2\}$	.3
$f(x,y) = xy\sqrt{x^2+y^2}$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 2y^2 \leq 1\}$	.4
$f(x,y) = xy\sqrt{x^2+y^2}$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x, y \geq 0, x^2 + 2y^2 \leq 1\}$	.5
$f(x,y) = (x+y)e^{-x-y}$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$	.6
$f(x,y) = x^2 + y^2$ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \leq x^2 + y^2 \leq x\}$	.7
$f(x,y) = \dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$ $D = \{(x,y) \in [0,1]^2, x^2 + y^2 \geq 1\}$	.8

$f(x,y)=xy$ $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x,y\geq 0, \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$ $a,b>0$	.9
$f(x,y)=\dfrac{1}{(4x+4y+1)^2}$ $D=\{(x,y)\in[0,1]^2, x^2\leq y, y^2\leq x\}$	.10
$f(x,y)=\dfrac{1}{y\cos x+1}$ $D=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$	.11
$f(x,y)=\dfrac{1}{(x+y+1)^2}$ $D=\left[0,1\right]^2$	.12
$D=\{(x,y)\in[0,1]^2, y\leq x\leq\sqrt{y}\}$ $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x}$	.13
$f(x,y)=x^2+y^2$ $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+y^2\leq 1\}$	.14
$f(x,y)=xe^{(x^2+y^2)^{3/2}}$ $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\geq 0, x^2+y^2\leq 1\}$	.15
$f(x,y)=x^2+y^2$ $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, y\leq x^2+y^2\leq x\}$	.16

التمرين 7. ليكن $R > 0$ وليكن $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x,y \geq 0, x^2+y^2 \leq R^2\}$ و $D'_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x,y \geq 0, x^2+y^2 \leq 2R^2\}$ و S_R هو المربّع $S_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x,y \geq 0, \max(x,y) \leq R\}$، وليكن $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$.

1. بيّن أنّ:

$$\int_{D_R} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \leq \int_{S_R} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy} \leq \int_{D'_R} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$$

2. بإجراء تغيير متحوّل مناسب احسب كلاًّ من $\int_{D_R} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$ و $\int_{D'_R} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$.

3. استنتج قيمة التكامل $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$. لاحظ أنّ:

$$\begin{aligned}(\int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{dx})^2 &= (\int_0^R e^{-x^2}\,\mathrm{dx})(\int_0^R e^{-y^2}\,\mathrm{dy}) \\ &= \int_{S_R} f(x,y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}\end{aligned}$$

التمرين 8. استخدم الإحداثيّات المعطاة بالصيغة $x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$ لتحسب التكامل $I = \int_D (2x^3 - y)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$ حيث

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x,y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\} \text{ و } a,b > 0$$

التمرين 9. احسب $\int_\Gamma (x-y)\,\mathrm{dx} + (x+y)\,\mathrm{dy}$ حيث Γ هي الدائرة المعطاة بالمعادلة $x^2+y^2 = a^2$ وموجّهة بالاتجاه الموجب.

التمرين 10. احسب $\int_\Gamma xy^2\,\mathrm{dx} - x^2y\,\mathrm{dy}$ حيث Γ هي الدائرة المعطاة بالمعادلة $x^2+y^2 = 4$ وموجّهة بالاتجاه الموجب.

التمرين 11. احسب بطريقتين $\int_\Gamma y^3\,\mathrm{dx} - x^3\,\mathrm{dy}$ حيث Γ هي الدائرة المعطاة بالمعادلة $x^2+y^2 = 4$ وموجّهة بالاتجاه الموجب.

التمرين 12. ليكن $0 < a < b$. احسب التكامل المضاعف $\int_D x^y \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$ حيث $D = [0,1] \times [a,b]$ ، واستنتج قيمة التكامل $I_{a,b} = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} \mathrm{dx}$.

التمرين 13. احسب التكامل المضاعف $\int_D \frac{\sin x}{1 + \cos x \cos y} \mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$ حيث $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2$ ، واستنتج قيمة التكامل $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + \cos x)}{\cos x} \mathrm{dx}$.

التمرين 14. بإجراء تغيير متحول مناسب، احسب التكاملين

1. $\int_D x^2 y \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$ حيث $D = \{(x,y) \in [0,\infty[^2, x^2 + y^2 - 2x \le 0\}$.
2. $\int_D (x^2 - y) \,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$ حيث D هو المربّع الذي رؤوسه $(1,0),(2,1),(1,2),(0,1)$.

قائمة المراجع

1. **Cours de Mathématiques Spéciales I,II,III,IV, E.Ramis & C.Deschamls & J.Odoux,Masson,1979**
2. **Cours de Mathématiques J.M.Arnaudies, H.Fraysse, Dunod université,1989**
3. **Real and Complex Analysis W.Rudin,McGraw Hill,second edition,1974**
4. **Cacul Différentiel A.Avez,Masson,1983**
5. **Cours D'Analyse 6, El Hassan Essaky, Faculté poly disciplinaires de Safi**

6. **Mathématique 2^e année ,cours et exércices corrigés. Serie E.Ramis C. Deschamps, J.F.Ruaud,F.Moulin,J.C,Sifre,A. Miquel,Dunod 2001.**

7. **عمران قوبا، التحليل، الجزء الأوّل، من منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقيّة والتكنولوجيا، الجمهوريّة العربيّة السوريّة، الطبعة الثانية، 2017.**

8. **عمران قوبا، التحليل، الجزء الثاني، من منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقيّة والتكنولوجيا، الجمهوريّة العربيّة السوريّة، 2017.**

9. **عمران قوبا، التحليل، الجزء الثالث، من منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقيّة والتكنولوجيا، الجمهوريّة العربيّة السوريّة، الإصدار الأوّل، الطبعة الأولى، 2018.**

10. **عمران قوبا، التحليل، الجزء الرابع، من منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقيّة والتكنولوجيا، الجمهوريّة العربيّة السوريّة، 2018.**

11. **عمران قوبا، التحليل، الجزء الخامس، من منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقيّة والتكنولوجيا، الجمهوريّة العربيّة السوريّة، 2018.**

12. **عمران قوبا، الجبر، الجزء الأوّل، مبادئ الجبر المجرّد، من منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقيّة والتكنولوجيا، الجمهوريّة العربيّة السوريّة، الطبعة الثانية، 2017.**

13. **عمران قوبا، الجبر، الجزء الثاني، الجبر الخطّي، من منشورات المعهد العالي للعلوم التطبيقيّة والتكنولوجيا، الجمهوريّة العربيّة السوريّة، 2017.**

مسرد المصطلحات العلميّة

العربيّة	الإنكليزيّة

الألف

اشتقاقيّ	Differentiable
أدقّ (تقسيمة)	Smoother(partition)

التاء

تابع أصليّ	Primitive function (antiderivative)
تابع زيتا لريمان	Riemann zeta function
تابع ضمني	Implicit Function
تابع كسري	Rational function
تابعاً لعدّة متحوّلات	Multivariable function
تدرّج	Gradient
تفاضل	Differential
تفاضل تام	Exact differential
تقسيمة	partition
تقسيمة منقوطة	Tagged partition
تقسيمة أنعم	Finer Partition
تكامل	Integral
تكامل محدود	Definite Integral
تكامل معمّم أو معتلّ	Improper Integral

الجيم

جوار	Neighborhood

الحاء

حدّ أدنى (أعلى)	Infimum (Supremum)
حيّز بسيط	Simple domain

الخاء

خطوة (التقسيمة)	Step (partition)
خليّة	Cell

الدال

داخل	Interior
درجي (تابع)	Step function

السين

سالب	Less than or equal

الشين

شرط كوشي	Cauchy condition
شرط كوشي بانتظام	Uniformly Cauchy condition
شكل تفاضليّ	Differential form

الصاد

صفّ	Class

العين

عنصرٌ داخليّ	Interior element

الفاء

فضاء شعاعيّ منظم	Normed vector space
فضاءٌ تامٌّ	Complete space
فضاء باناخ	Banach space

القاف

قابل للمفاضلة	Differentiable
قطعة مستقيمة	Segment
قيمة حدّيّة محليّاً	Local extremum
قيمة صغرى (كبرى) محليّاً	Local minimum (maximum)

الكاف

كثيفة (مجموعة جزئية)	Dense (subset)

كرة مغلقة	Closed ball
كرة مفتوحة	Open ball
كرة واحديّة	Unit ball

اللام

لاصق	Adherent
لصاقة	Closure

الميم

مبرهنة التابع العكسي	Inverse function theorem
متتالية	Sequence
متتالية توابع	Sequence of functions
متجانس	Homogenous
متراجحة المثلّث	Triangle inequality
متراصّة (مجموعة)	Compact (set)
متسلسلة	Series
متسلسلة توابع	Function series
متقارب بالإطلاق	Absolutely convergent
متقاربة	Convergent
متقاربة بالنظيم	Normally convergent
متقاربة بانتظام	Uniformly convergent
متقاربة ببساطة	Simply convergent
متكافئان (نظيمان)	Equivalent (norms)
مجال متراصّ	compact interval
مجموع ريمان	Riemann sum
مجموعة مغلقة	Closed set
مجموعة مفتوحة	Open set
محدّب	Convex
محدد جاكوبي	Jacobian

مركّبات	Components
مسافة	Distance
مستقيم الارتجاع	Regression line
مستمرّ	Continuous
مستمرّ بانتظام	Uniformly continuous
مستمرّ قِطعيّاً	Piecewise continuous
مشتقّ جزئي	Partial derivative
مصفوفة جاكوبي	Jacobian matrix
مصفوفة هِس	Hesse matrix
مضاريب لاغرانج	Lagrange multipliers
مضبوطٌ	Regulated (Ruled)
معرّف	Defined
مغلق (شكل)	Closed (form)
مكاملة بتغيير المتحوّل	Integration by substitution
مكاملة بالتجزئة	Integration by parts
منتظمة (تقسيمة)	Uniform (partition)
موجب (سالب)	Greater (less) than or equal to zero

النون

نجميّة (مجموعة)	Star (set)
نظيم التطبيقات الخطّيّة المستمرّة	Operator norm
نظيم	Norm
نقطة ثابتة	Fixed point
نقطة حرجة	Critical point
نقطة سرج	Saddle point
نهاية	Limit

لمحة عن المؤلف

المؤلّف حاصل على شهادة "الأغريغاسيون" في الرياضيّات من فرنسا عام 1993، وعلى شهادة الدكتوراه في الرياضيّات في مجال المعادلات التفاضليّة الجزئيّة من المدرسة العليا للمدرسين في كاشان-فرنسا عام 1998. يدرّس الدكتور حلاوه الرياضيّات في المعهد العالي للعلوم التطبيقيّة والتكنولوجيا منذ ما يزيد عن 25 عامًا.

هذا الكتاب

التحليل الرياضي هو أحد الأعمدة الراسخة في الرياضيّات الحديثة. يعرض هذا الكتاب مفاهيم التحليل الرياضي بأسلوب منهجي موجه لطلّاب السنة الثانية في كليّات الهندسة والعلوم، ويعالج في طيّاته مواضيعَ مهمّةً مثل متتاليات التوابع والتكاملات التابعة لوسيط والتكاملات المضاعفة والفضاءاة الشعاعيّة المنظّمة، إضافةً إلى التوابع لعدة متحولات. تتّسم منهجيّة الكتاب بدقة الصياغة وصرامة البرهان، ويضم أمثلة توضيحية وتمارين منتقاة لتعزيز الفهم وتنمية المهارات التحليلية لدى الطالب.

ISBN 978-9933-9379-2-8

9 789933 937928

المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا

Higher Institute for Applied Sciences and Technology

www.hiast.edu.sy

HIAST